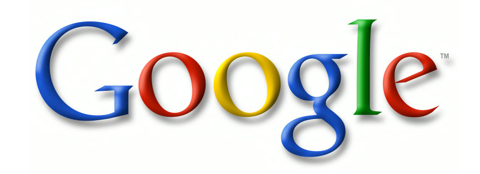


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

## Usage guidelines

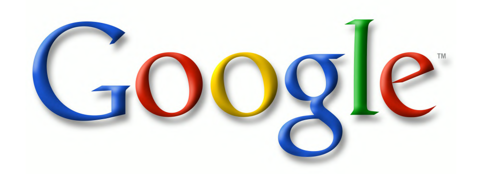
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

## About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

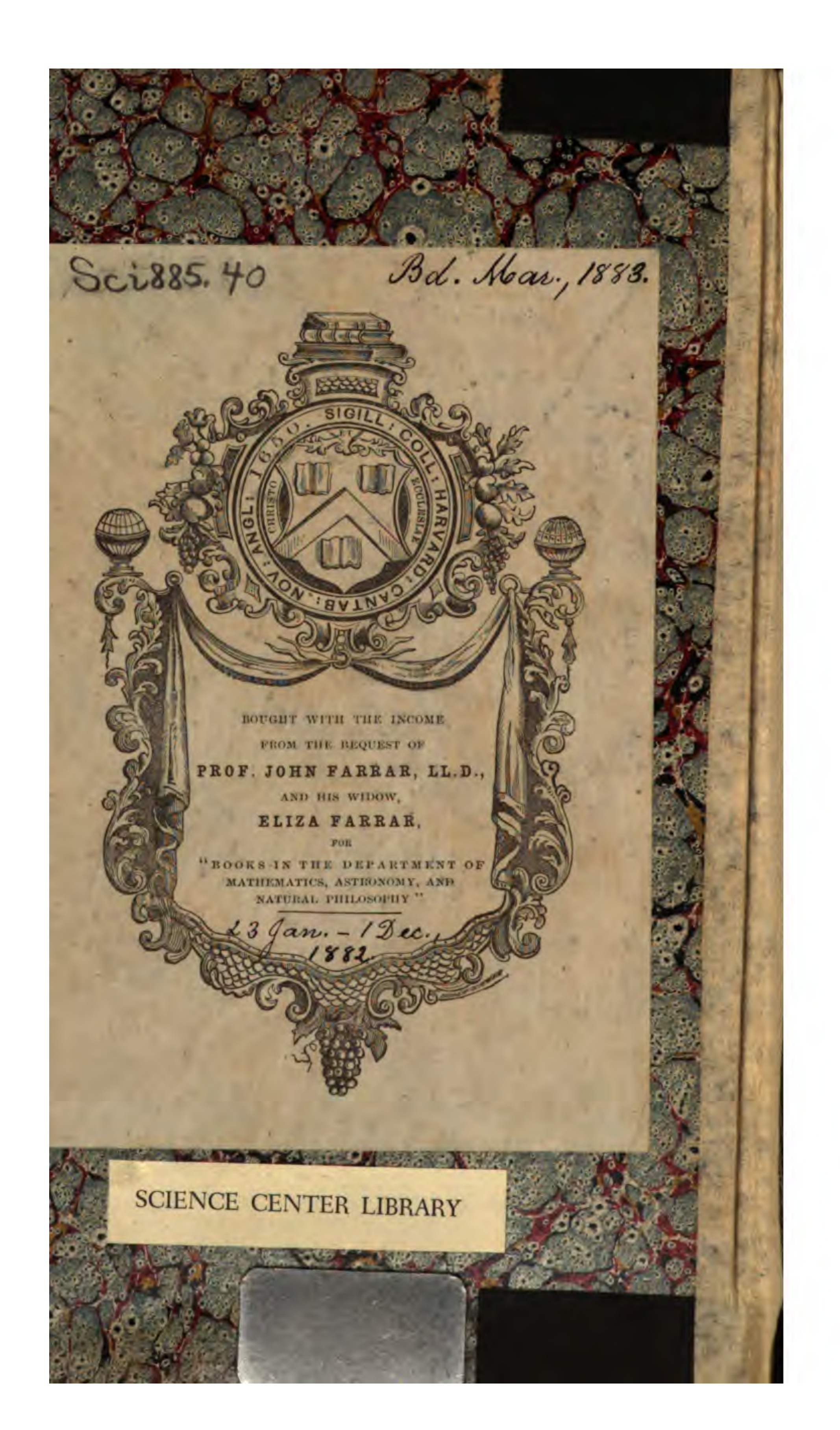
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

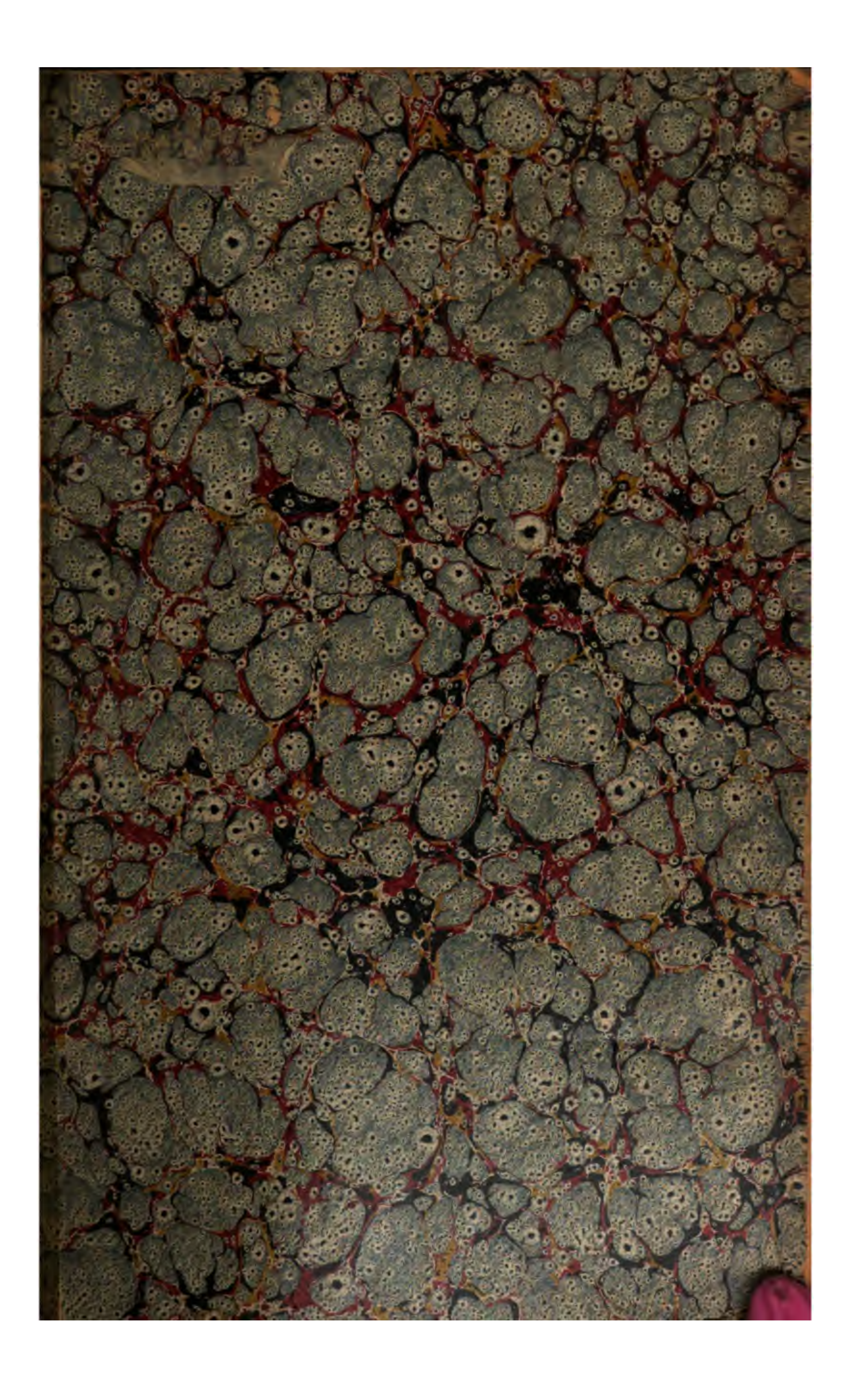
## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





Sci885.40
Bd. Mar., 1883.
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
23 Jan. - 1 Dec.
1882.
SCIENCE CENTER LIBRARY



Pagination wrong

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**XXVII. Jahrgang.**

**Mit 5 lithographirten Tafeln.**

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

~~135.8~~
Sci885.40

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

**Arithmetik und Analysis.** Seite

Zur Integration der Differentialgleichungen. Von Cand. **W. Heymann** 1

Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Fortsetzung. Von Prof. Dr. **Thomae** . . . . . . . . . . . . . . . 41

Notiz über gewisse elliptische Integrale. Von **O. Schlömilch** . . . . . . . 62

Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenzahl binärer Formen auftreten. Von Dr. **Hurwitz** . . . . . . . . . . . . . . . 86

Untersuchungen über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen Von Dr. **Schwering** 102

Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppeltperiodischen Functionen betreffend. Von Dr. **Schumann** . . . . . . . . . . . . . . . 125

Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Von **W. Veltmann** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176

Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung. Von Prof. Dr. **Thomae** . . . . 179

Ueber specielle elliptische Functionen. Von Prof. Dr. **Thomae** . . . . . . 181

Ueber die Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften. Von **F. Hofmann** . . . . . . . . . . . . . . . 189

Erklärung (das Additionstheorem d. ellipt. Funct. betr.). Von **Much** . . . 192

Die Fourier'sche Reihe. Von **W. Veltmann** . . . . . . . . . . . . 193

Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Von Prof. Dr. **Wittstein** . . 315

Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Von **O. Schlömilch** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 317

Ueber eine Transformation der Differentialgleichung $\varphi_0 y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. Von Cand. **Heymann** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 374

**Synthetische und analytische Geometrie.**

Zur Geometrie des Tetraeders. Von **H. Thieme** . . . . . . . . . . . . 56

Geometrischer Satz. Von Prof. Dr. **Schröter** . . . . . . . . . . . . . 61

Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung. Von **J. Cardinaal** . . . 119

Bemerkung zur Kegelschnitt-Theorie. Von Prof. Dr. **Pasch** . . . . . . . 122

Bemerkung über projective Punktreihen. Von Prof. Dr. **Pasch** . . . . . . 124

Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks. Von **P. v. Schaewen** 126

Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Von Prof. Dr. **Wiener** . . . . . . . . . . . . . . . 129

Ueber Distanzrelationen. Von **E. Study** . . . . . . . . . . . . 140

Perspectivische Studien. Von Prof. Dr. **Hauck** . . . . . . . . . . . 236

Construction algebraischer Ausdrücke mit Hilfe von Involutionen auf Kegelschnitten. Von Stud. **Kotanyi** . . . . . . . . . . . . . . . . . 248

Seite

Constructive Lösung der Aufgabe, eine Gerade zu bestimmen, die zwei gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet. Von M. Petzold . . . 252
Erzeugnisse von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Von Dr. A. Weiler . . . 257
Zur Theorie der Punktmengen. Von W. Veltmann . . . 313
Ueber den Mittelpunkt der Raumcurve dritter Ordnung. Von Dir. Dr. Geisenheimer . . . 321
Grundzüge einer Dipolargeometrie. Von Dr. Leonhardt . . . 346
Die Wechselbeziehungen zwischen gewissen Sätzen von Chasles und Steiner. Von A. Schumann . . . 363
Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes. Von A. Schumann 368
Ueber die Krümmung der Flächen. Von Dr. Böklen . . . 369
Zwei projectivische Sätze. Von O. Schlömilch . . . 380
Beweis der vorigen Sätze. Von Dr. Sachse . . . 381
Ein elementarstereometrischer Satz als Beitrag zur Theorie der stereographischen Projection. Von F. Hofmann . . . 383

**Optik.**

Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel. Von Bauschullehrer Meisel . . . 65
Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Von Dr. Böklen . . 160
Zur Reflexion und Refraction des Lichts an Curven und Flächen. Von J. Morawetz . . . 310

**Molecularphysik.**

Grundzüge der mathematischen Chemie. III. Von Prof. Dr. Wittwer . 289
——, Schluss dieser Abhandlung . . . 329

---

Preisaufgaben der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft . . . 253

JAN 23 1882

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**27. Jahrgang. 1. Heft.**

Ausgegeben am 29. December 1881.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

Bei **S. Hirzel** in Leipzig erschien soeben:

# Theorie und Anwendung
der
# Determinanten
von
**Dr. Richard Baltzer,**
Professor an der Universität Giessen, Mitglied der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

**Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage.**

gr. 8°. Preis geheftet: ℳ 5. —

---

Für den Verlag von **B. G. Teubner** befinden sich unter der Presse:

**Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.** (Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen.) Von Felix Klein. gr. 8. geh.

Der Zusammenhang zwischen der Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes und der Lehre von den stationären Strömungen der Wärme oder der Elektrizität ist seit lange bekannt und bildet heutzutage einen integrierenden Bestandteil unserer besseren Werke über mathematische Physik. Dabei aber beschränkt man sich zumeist auf die Betrachtung einfach zusammenhängender berandeter Flächenstücke. Der Verfasser wünscht in der vorliegenden Schrift zu zeigen, dass Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale nichts anderes ist als eine mathematische Formulierung derjenigen Anschauungen und Thatsachen, welche die physikalische Betrachtung für den seltener untersuchten Fall beliebig zusammenhängender geschlossener Flächen zu Tage fördert. Eine Vergleichung zerstreuter Bemerkungen, die von Riemann oder seinen Schülern herrühren, sowie die Betrachtnahme desjenigen Ideenkreises, in welchem Riemann aufgewachsen ist, lassen wahrscheinlich erscheinen, dass die vom Verfasser gegebene Darstellung, von Einzelheiten abgesehen, geradezu eine Reproduktion des ursprünglich von Riemann selbst eingeschlagenen Gedankenganges sein möge. Riemann hat in seinen eigenen Publikationen vielleicht nur deshalb eine andere Form der Exposition gewählt, weil eine erste Darlegung seiner mathematischen Resultate ohnehin bedeutende redaktionelle Schwierigkeiten mit sich bringen musste.

Sei hiernach das kleine Schriftchen, welches sich nur als Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen geben will, dem Mathematiker wie dem mathematischen Physiker, dem Lehrer sowohl als dem Studierenden, bestens empfohlen. Dass der Verfasser der modernen Bestrebungen ausführlich gedenkt, die sich an Riemann anschliessen, dass er ferner das Problem der konformen Abbildung von Flächen auf einander zu einem gewissen Abschlusse führt, der explicite bisher nicht bekannt war, wird dem Fachmanne willkommen sein und doch der allgemeinen Brauchbarkeit des Schriftchens, auf die es zunächst abgesehen ist, keinen Abbruch thun.

**Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte** von A. Milinowski, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. E. gr. 8. geh.

Da ausser den von Geiser unter dem Titel: „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung" herausgegebenen Vorlesungen Steiners in der deutschen Litteratur kein Werk vorhanden ist, welches eingehend und ausführlich die Kegelschnitte elementar behandelt, so hat es der Verfasser unternommen, in elementar-synthetischer Form die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten. Diese Form der Darstellung „elementar", weil sie die Projektivität nicht benutzt, und „synthetisch", weil sie die Eigenschaften der Gebilde nicht durch Rechnung, sondern unmittelbar an ihnen selbst ableitet, wird manchem, dem

# I.

## Zur Integration der Differentialgleichungen.

Von

WOLDEMAR HEYMANN,

Cand. math. in Dresden.

### I.

Im XXIV. Bande dieser Zeitschrift habe ich kurz gezeigt, dass man die gleichzeitig bestehenden Substitutionen

$$x=\frac{dv}{du},\quad y=u\frac{dv}{du}-v,\quad \frac{dy}{dx}=u,\quad x\frac{dy}{dx}-y=v$$

mit Vortheil bei der Integration gewisser Differentialgleichungen erster Ordnung verwenden kann.

Ist

$$F\left(u,\ v,\ \frac{dv}{du}\right)=0$$

eine Differentialgleichung, deren Integral

$$F_1(u,v,c)=0$$

bekannt ist, so ordnet sich dieser Differentialgleichung stets eine andere, im Allgemeinen von ihr verschiedene zu, wenn man die Variabelen $u$ und $v$ in der oben angezeigten Weise durch $x$ und $y$ ersetzt. Das Integral der neuen Gleichung ist alsdann das Resultat der Elimination von $u,\ v,\ \frac{dv}{du}$ aus den Gleichungen $F=0,\ F_1=0,\ x=\frac{dv}{du},\ y=u\frac{dv}{du}-v$; d. h. es ist gegeben durch die beiden Gleichungen

$$F(u,\ ux-y,\ x)=0,\quad F_1(u,\ ux-y,\ c)=0,$$

in welchen $u$ als Parameter anzusehen ist.*

---

* Wenn es gestattet ist, illustriren wir das Gesagte durch folgendes Beispiel. Die Gleichung

$$\frac{dv}{du}=a_0u^n+a_1u^{n-1}+\ldots+a_{n-1}u+a_n$$

besitzt das Integral

$$v=\frac{a_0}{n+1}u^{n+1}+\frac{a_1}{n}u^n+\ldots+a_nu+c,\quad c=const.$$

Die transformirte Gleichung lautet

## 1. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Um die Substitutionen auch bei der Integration von Differentialgleichungen der zweiten Ordnung benützen zu können, betrachten wir $u$ als unabhängige Variabele und bilden

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\frac{d^2 v}{du^2}}.$$

Man kann alsdann jeder Differentialgleichung zweiter Ordnung eine andere an die Seite stellen, und ist die eine integrirt, so ist es auch die andere. Führt man nämlich in eine Differentialgleichung

$$F\left(u,\, v,\, \frac{dv}{du},\, \frac{d^2 v}{du^2}\right) = 0,$$

deren Integral

$$F_1(u,\, v,\, k_1,\, k_2) = 0$$

irgendwie ermittelt ist, die erwähnten Substitutionen ein, so erhält man eine Differentialgleichung in den Variabelen $x$ und $y$. Das Integral dieser Gleichung wird dann gefunden, wenn man die Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad x = \frac{dv}{du}, \quad y = u\frac{dv}{du} - v$$

berücksichtigt oder, mit anderen Worten, wenn man $u$ und $v$ aus

$$F_1 = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} + x\frac{\partial F_1}{\partial v} = 0, \quad v - ux + y = 0$$

eliminirt.

Sehen wir zu, welche Gleichung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

1) $$\frac{d^2 v}{du^2} + f_1(u)\frac{dv}{du} + f_2(u)\, v = 0,$$

deren Integral

a) $$v = k_1\, \varphi_1(u) + k_2\, \varphi_2(u) = \varphi(u)$$

heissen möge, entspricht. Wir finden

---

$$a_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + a_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n = x,$$

und ihr wird genügt durch

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_{n-1} u + a_n, \\ ux - y &= \frac{a_0}{n+1} u^{n+1} + \frac{a_1}{n} u_n + \ldots + a_n u + c. \end{aligned}\right\}$$

Das Integral ist sonach algebraisch, obgleich die zugehörige Differentialgleichung, wofern sie überhaupt nach $\frac{dy}{dx}$ auflösbar ist, auf Integrale irrationaler Functionen führt. — Noch sei hingewiesen auf die früher mitgetheilte Integration der Gleichung

$$x\, \varphi(y') + y\, \psi(y') + (xy' - y)^m \chi(y') = 0.$$

$$y'' = -\frac{1}{x f_1(y') + (xy' - y) f_2(y')}$$

oder

2) $$y'' = \frac{1}{y f_2(y') - x f_3(y')},$$

wobei für $f_1(y') + y' f_2(y')$ kurz $f_3(y')$ geschrieben wurde. Das Integral der Gleichung 2) ist nun gegeben durch

b) $$x = \varphi'(u), \quad y = u\varphi'(u) - \varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ das allgemeine Integral der Gleichung 1) bedeutet, $u$ aber als Parameter zu betrachten ist.

Man bemerkt, dass die eben integrirte Differentialgleichung 2) in die Classe der homogenen gehört; es lassen sich sonach alle homogenen Differentialgleichungen, welche der Form 2) angehören, auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen. Da das Integral, welches durch die Gleichungen b) gegeben ist, im Allgemeinen keiner weitern Reduction unterliegt, so ist klar, dass der hier eingeschlagene Integrationsweg der directeste ist. In der That, behandeln wir die Gleichung 2) in gewöhnlicher Weise, setzen wir

$$y'' = q, \quad y' = p, \quad \frac{y}{x} = t,$$

so erhält sie die Gestalt

$$xq = \frac{1}{t f_2(p) - f_3(p)} = F(p, t),^*$$

und ihre Integration kommt zurück auf die Integration von

$$\frac{dp}{dt} = \frac{F(p, t)}{p - t}$$

oder

3) $$\frac{dt}{dp} = (p - t)(t f_2(p) - f_3(p)).$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich nicht direct integriren, ihr Integral kann nur aus dem der Gleichung 1) hergeleitet werden; man hat nämlich

$$t = \frac{y}{x} = \frac{u\varphi'(u) - \varphi(u)}{\varphi'(u)} \quad \text{und} \quad p = y' = u,$$

mithin

$$t = p - \frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)}$$

als vollständiges Integral der Gleichung 3).

---

* Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis. I, § 116.

2. Anwendung auf die Liouville'sche Gleichung

1) $$(a_2 + b_2 u + c_2 u^2)\frac{d^2 v}{du^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{dv}{du} + a_0 v = 0.$$

Führt man hier die Substitutionen

$$u = y', \quad v = xy' - y, \quad \frac{dv}{du} = x, \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{1}{y''}$$

ein, so erhält man folgende homogene Differentialgleichung:

2) $$y'' = \frac{a_2 + b_2 y' + c_2 y'^2}{\alpha x + \beta y + \gamma x y'},$$

wobei $\alpha = -a_1$, $\beta = a_0$, $\gamma = -(a_0 + b_1)$, sowie $a_2$, $b_2$, $c_2$ beliebig gegebene Zahlen sind.

Das Integral dieser Gleichung fliesst nun aus

$$x = \varphi'(u), \quad y = u\,\varphi'(u) - \varphi(u),$$

unter $\varphi(u)$ das allgemeine Integral der Liouville'schen Gleichung* verstanden.

Behandelt man Gleichung 2) in gewöhnlicher Weise, so hat man nach der vorigen Bezeichnungsart

$$xq = \frac{a_2 + b_2 p + c_2 p^2}{\alpha + \beta t + \gamma p} = F(p, t).$$

Diese Gleichung kommt zurück auf

3) $$(a_2 + b_2 p + c_2 p^2)\frac{dt}{dp} = (p - t)(\alpha + \beta t + \gamma p),$$

und das Integral dieser letzten lautet

$$t = p - \frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)},$$

wenn $\varphi$ das vollständige Integral der Gleichung

$$(a_2 + b_2 p + c_2 p^2)\frac{d^2\varphi}{dp^2} + (a_1 + b_1 p)\frac{d\varphi}{dp} + a_0\varphi = 0$$

bedeutet.

Das letzte Resultat ist insofern bemerkenswerth, als wir später (Abschnitt $III_1$) zeigen werden, dass sich die Differentialgleichung

$$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

auf Gleichung 3) zurückführen lässt.

Bezüglich der Gleichung 2) sei noch erwähnt, dass auf dieselbe die allgemeinere

4) $$\eta'' = \frac{A_2 + B_2\eta' + C_2\eta'^2}{(A_1\xi + B_1\eta + C_1) + (A_0\xi + B_0)\eta'} \quad \left(\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

zurückkommt. Setzt man nämlich

$$A_0\xi + B_0 = x, \quad A_1\xi + B_1\eta + C_1 = y,$$

also

* Liouville im „Journal de l'école polytechnique, tom XIII". Ueber die Integration dieser Differentialgleichung durch Reihen oder bestimmte Integrale vergleiche Abschnitt $III_2$ dieses Aufsatzes.

$$\eta' = \frac{1}{B_1}(A_0 y' - A_1), \quad \eta'' = \frac{A_0^2}{B_1} y'',$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$2) \qquad y'' = \frac{a_2 + b_2 y' + c_2 y'^2}{\alpha x + \beta y + \gamma x y'}.$$

Ist $A_0 = 0$ oder $B_1 = 0$, so führt dieses Verfahren nicht zum Ziele; dann substituire man direct in Gleichung 4)

$$\xi = \frac{dv}{du}, \quad \eta = u\frac{dv}{du} - v, \quad \eta' = u, \quad \eta'' = \frac{1}{\frac{d^2 v}{du^2}}.$$

Es entsteht

$$(A_2 + B_2 u + C_2 u^2)\frac{d^2 v}{du^2} - [A_1 + (A_0 + B_1)u]\frac{dv}{du} + B_1 v = C_1 + B_0 u,$$

eine Gleichung, deren vollständiges Integral in bekannter Weise aus den beiden particulären Integralen der reducirten Differentialgleichung zusammengesetzt wird und welche in den Ausnahmefällen benutzt werden kann.

Wir führen die Rechnung am folgenden einfachen Beispiel durch.

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$\eta'' = \frac{A_2 + B_2 \eta'}{A_1 \xi + B_1 \eta + C_1}.$$

Wir substituiren

$$\xi = x + \lambda, \quad \eta = \mu y + \nu,$$

und erhalten

$$\mu y'' = \frac{(A_2 + B_2 \nu) + B_2 \mu y'}{(A_1 + B_1 \nu)x + B_1 \mu y + (A_1 \lambda + C_1)}.$$

Bestimmen wir $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ so, dass

$$A_2 + B_2 \nu = 0, \quad A_1 \lambda + C_1 = 0, \quad \frac{B_1 \mu}{B_2} = 1,$$

und setzen zur Abkürzung

$$\frac{A_1 + B_1 \nu}{B_2} = \alpha,$$

dann ergiebt sich

$$\lambda = -\frac{C_1}{A_1}, \quad \mu = \frac{B_2}{B_1}, \quad \nu = -\frac{A_2}{B_2}, \quad \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_2^2},$$

und die Differentialgleichung lautet einfacher

$$y'' = \frac{y'}{\alpha x + y}.$$

Führen wir in diese Gleichung die Substitutionen

$$x = \frac{dv}{du}, \quad y = u\frac{dv}{du} - v, \quad y' = u, \quad y'' = \frac{1}{\frac{d^2 v}{du^2}}$$

ein, so erscheint folgende lineare Differentialgleichung:

$$u\frac{d^2v}{du^2}-(\alpha+u)\frac{dv}{du}+v=0,$$

welche, wie leicht zu sehen, das particuläre Integral

$$v=\alpha+u$$

besitzt. Für das allgemeine Integral erhält man alsdann

$$v=(\alpha+u)\left\{k_1+k_2\int\frac{du}{(\alpha+u)^2}e^{\int\frac{\alpha+u}{u}du}\right\}$$

oder

$$v=k_1(\alpha+u)-k_2\left\{u^\alpha e^u-(\alpha+u)\int u^{\alpha-1}e^u\,du\right\}.$$

Hieraus findet man

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & x=\dfrac{dv}{du} & =\quad k_1\ +k_2\displaystyle\int u^{\alpha-1}e^u\,du \\ \text{b)} & y=u\dfrac{dv}{du}-v & =-k_1\alpha+k_2\displaystyle\int u^\alpha\ e^u\,du \end{array}\right\},$$

und diese Ausdrücke stellen das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y''=\frac{y'}{\alpha x+y}$$

dar. Da aus a) und b) die Beziehung

c) $$\alpha x+y=k_2u^\alpha e^u$$

folgt, so ist nur eine Quadratur zu vollziehen.

Es sei beispielsweise $\alpha=+1$, dann findet man aus a)

$$x=k_1+k_2e^u,$$

aus c)

$$x+y=k_2ue^u,$$

mithin das Integral

$$x+y=(x-k_1)\,l\,\frac{x-k_1}{k_2}.$$

Ist $\alpha=0$, so folgt aus a)

$$x=k_1+k_2\int\frac{e^u}{u}\,du,$$

aus c)

$$y=k_2e^u,$$

daher lautet das Integral

$$x=k_1+\int\frac{dy}{l\left(\frac{y}{k_2}\right)}.$$

---

## II.

### Integration in homogenen Coordinaten.

Setzt man in einer Differentialgleichung $x=\frac{dv}{du}$, $y=u\frac{dv}{du}-v$, $y'=u$, so heisst das im Grunde nichts Anderes, als man vertauscht die

Punktcoordinaten mit Liniencoordinaten. Am einfachsten gestaltet sich nun die Sache, wenn man die Differentialgleichung in homogenen Coordinaten auffasst, also $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ statt $x$ und $y$ schreibt. Die Differentiale $dy$, $dx$ und $x\,dy - y\,dx$ (wenn solches vorkommt) werden proportional den Differentialen

$$x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2, \quad x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3, \quad x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1,$$

so dass man eine Gleichung von folgender Gestalt erhält:

$$f(x_1, x_2, x_3;\; x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2,\; x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3,\; x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = 0,$$

welche sowohl homogen in den $x$, als auch in den Differentialen ist.* Diese Gleichung geht natürlich in die nicht homogene Form zurück, wenn man $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ setzt.

Eine Differentialgleichung $f = 0$ ordnet jedem Punkte eine oder mehrere Richtungen zu, welche wir durch Liniencoordinaten ausdrücken können; d. h, die Elemente der Differentialgleichung lassen sich darstellen durch die gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\text{a)} \quad \left.\begin{aligned} f(x_i, u_i) &= f(x_1, x_2, x_3;\; u_1, u_2, u_3) = 0 \\ (x_i u_i) &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 \end{aligned}\right\},$$

Die letzte Relation drückt aus, dass die Gerade $(x_i u_i) = 0$ durch den Punkt $x_i$ der Curve $f = 0$ geht; soll diese Gerade in jenem Punkte Tangente sein, so fordert dies noch die Bedingung

$$\text{b)} \quad u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 = 0,$$

und diese in Verbindung mit a) führt auf folgende Proportionalitäten:

$$u_1 = \mu(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2), \quad u_2 = \mu(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3), \quad u_3 = \mu(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

unter $\mu$ an dieser, wie an allen anderen Stellen dieses Abschnittes einen Proportionalitätsfactor verstanden. Setzt man die $u_i$ in die Gleichung $f = 0$ ein, so erhält man thatsächlich eine Differentialgleichung der besprochenen Form.

Wird der Punkt als Schnitt zweier benachbarter Geraden aufgefasst, so hat man der Gleichung a) die Bedingung

$$\text{c)} \quad x_1\,du_1 + x_2\,du_2 + x_3\,du_3 = 0$$

an die Seite zu stellen. Aus beiden folgen die Proportionalitäten

$$x_1 = \mu(u_2\,du_3 - u_3\,du_2), \quad x_2 = \mu(u_3\,du_1 - u_1\,du_3), \quad x_3 = \mu(u_1\,du_2 - u_2\,du_1),$$

und diese ergeben, in $f = 0$ eingeführt,

$$f(u_2\,du_3 - u_3\,du_2,\; u_3\,du_1 - u_1\,du_3,\; u_1\,du_2 - u_2\,du_1;\; u_1, u_2, u_3) = 0,$$

d. h. die Differentialgleichung in Liniencoordinaten.

Es stellt also die Gleichung

$$f(x_i, u_i) = f(x_1, x_2, x_3;\; u_1, u_2, u_3) = 0$$

in Verbindung mit

---

* Man vergleiche: Clebsch-Lindemann, Geometrie. Die Connexe.

$$(x_i u_i) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

eine Differentialgleichung in Punktcoordinaten dar, wenn für die $u$ die Differentiale, gebildet aus den $x$, genommen werden; sie stellt eine Differentialgleichung in Liniencoordinaten dar, wenn für die $x$ die Differentiale, gebildet aus den $u$, genommen werden.

Denken wir uns, die Differentialgleichung sei in Punktcoordinaten integrirt, dann ist auch das Integral der Differentialgleichung in Liniencoordinaten durch eine Parameterdarstellung gegeben. Denn lautet das Integral in Liniencoordinaten $\varphi(x_i) = 0$, so hat man für das Integral in Liniencoordinaten gleichzeitig

$$f(x_i, u_i) = 0, \quad (x_i u_i) = 0, \quad \varphi(x_i) = 0.$$

Die Elimination der $x_i$ aus diesen drei homogenen Gleichungen würde auf ein Resultat von der Form

$$\psi(u_i) = 0$$

führen, welches das Integral der Differentialgleichung in Liniencoordinaten sein muss.

Umgekehrt kann man durch die Lösung eines rein algebraischen Problems das Integral in Punktcoordinaten finden, wenn dasjenige in Liniencoordinaten gegeben ist.

Nehmen wir folgendes Beispiel.

Die Differentialgleichung

$$-(a_0 x^2 + a_1 x y + a_2 y^2)\frac{dy}{dx} + (b_0 x^2 + b_1 x y + b_2 y^2) + (c_0 x^2 + c_1 x y + c_2 y^2)\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

deren Integration als Jacobi'sche Form keine Schwierigkeit hat, lautet in homogenen Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2)(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2) \\ +\,&(b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2)(x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3) \\ +\,&(c_0 x_1^2 + c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2)(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Transformirt man dieselbe in Liniencoordinaten, so hat man zu setzen

$$x_1 = \mu(u_2\, du_3 - u_3\, du_2) \qquad x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2 = \mu' u_1$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und man erhält bei anderer Anordnung der Glieder

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 u_1 + b_0 u_2 + c_0 u_3)(u_2\, du_3 - u_3\, du_2)^2 \\ +\,&(a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3)(u_2\, du_3 - u_3\, du_2)(u_3\, du_1 - u_1\, du_3) \\ +\,&(a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3)(u_3\, du_1 - u_1\, du_3)^2 \end{aligned}\right\} = 0$$

oder, wenn man wieder die nicht homogene Form herstellen wollte ($u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = 1$),

$$-(a_0 u + b_0 v + c_0)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (a_1 u + b_1 v + c_1)\left(\frac{dv}{du}\right) + (a_2 u + b_2 v + c_2) = 0.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung lässt sich demnach aus dem Integral der Jacobi'schen Gleichung ableiten. Nach demselben Princip kann man auch die allgemeinere Gleichung $n^{ten}$ Grades

$$U_0 x_1^n + U_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + U_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + U_n x_2^n = 0,$$

in welcher

$$U_k = a_k u_1 + b_k u_2 + c_k u_3, \quad x_1 = \mu (u_2\, du_3 - u_3\, du_2) \text{ etc.}$$

ist, integriren.

## Einführung homogener Constanten.

Wir behandeln einige andere Differentialgleichungen in homogenen Coordinaten, deren Integrale bezüglich ihrer Form vielleicht Interesse haben dürften.

1. Sei die Differentialgleichung

$$1) \qquad a_1 x_1 u_1^n + a_2 x_2 u_2^n + a_3 x_3 u_3^n = 0,$$

in welcher $n$ und die $a$ gegebene Zahlen sind, vorgelegt. Fasst man sie zunächst in Liniencoordinaten auf, so lautet sie:

$$a_1 u_1^n (u_2\, du_3 - u_3\, du_2) + a_2 u_2^n (u_3\, du_1 - u_1\, du_3) + a_3 u_3^n (u_1\, du_2 - u_2\, du_1) = 0,$$

und dann hat ihre Integration keine Schwierigkeit; man findet

$$\frac{a_2 u_3^{1-n} - a_3 u_2^{1-n}}{a_1 u_3^{1-n} - a_3 u_1^{1-n}} = const.$$

Den letzten Ausdruck kann man durch die folgenden beiden ersetzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 = 0 \\ \beta) & C_1 u_1^{1-n} + C_2 u_2^{1-n} + C_3 u_3^{1-n} = 0 \end{array}\right\},$$

wobei die $C$ willkürliche Zahlen sind. Diese zweite Form des Integrals wird sich in der Folge als zweckmässig erweisen, wie überhaupt die Einführung dreier willkürlichen Constanten bei Differentialgleichungen in Dreieckscoordinaten nicht selten Berechtigung zu haben scheint. Von der Richtigkeit des Integrals überzeugt man sich, wenn man aus den letzten beiden Gleichungen und dem Differential

$$C_1 u_1^{-n} du_1 + C_2 u_2^{-n} du_2 + C_3 u_3^{-n} du_3 = 0$$

die $C$ eliminirt; man erhält

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1^{1-n} & u_2^{1-n} & u_3^{1-n} \\ u_1^{-n} du_1 & u_2^{-n} du_2 & u_3^{-n} du_3 \end{vmatrix}$$
$$= (u_1 u_2 u_3)^{-n} . \{a_1 u_1^n x_1 + a_2 u_2^n x_2 + a_3 u_3^n x_3\},$$

und hierbei hat

$$(u_1 u_2 u_3)^{-n}$$

eine dem integrirenden Factor nicht fernstehende Bedeutung.

Fassen wir die Gleichung 1) in Punktcoordinaten auf, so bekommen wir folgende Differentialgleichung $n^{ten}$ Grades:

$$a_1 x_1 (x_2 dx_3 - x_3 dx_2)^n + a_2 x_2 (x_3 dx_1 - x_1 dx_3)^n + a_3 x_3 (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^n = 0.$$

Ihr Integral ist enthalten in den gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lc} 1) & a_1 x_1 u_1^n + a_2 x_2 u_2^n + a_3 x_3 u_3^n = 0 \\ \alpha) & C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 = 0 \\ \beta) & C_1 u_1^{1-n} + C_2 u_2^{1-n} + C_3 u_3^{1-n} = 0 \\ & (x_i u_i) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Diese vier Gleichungen können wir jedoch durch zwei ersetzen, welche die $u_i$ nicht mehr enthalten. Denn es lassen sich für die $u_i$ drei proportionale Ausdrücke

$$u_1 = \mu (C_1 x_1^{-1})^{\frac{1}{n}}, \quad u_2 = \mu (C_2 x_2^{-1})^{\frac{1}{n}}, \quad u_3 = \mu (C_3 x_3^{-1})^{\frac{1}{n}}$$

ausfindig machen, welche die Gleichung 1) identisch erfüllen, weil $\alpha$) besteht, und welche die anderen beiden Gleichungen $\beta$) und $(x_i u_i) = 0$ in einen und denselben Ausdruck

$$C_1^{\frac{1}{n}} x_1^{\frac{n-1}{n}} + C_2^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{n-1}{n}} + C_3^{\frac{1}{n}} x_3^{\frac{n-1}{n}} = 0$$

überführen. Verbindet man letzteren mit der Bedingung $\alpha$), so hat man das vollständige Integral der Gleichung 1) in Punktcoordinaten. Bei Aenderung der Constanten lässt es sich auch folgendermassen schreiben:

$$2) \quad \left.\begin{array}{lc} \text{a)} & C_1^n a_1 + C_2^n a_2 + C_3^n a_3 = 0 \\ \text{b)} & C_1 x_1^{\frac{n-1}{n}} + C_2 x_2^{\frac{n-1}{n}} + C_3 x_3^{\frac{n-1}{n}} = 0 \end{array}\right\}.$$

Der Fall $n = 1$ bildet eine Ausnahme; er führt auf

$$x_1^{a_2 - a_3} x_2^{a_3 - a_1} x_3^{a_1 - a_2} = const.$$

Um aus dem allgemeinen Integral 2) das singuläre abzuleiten, haben wir die beiden Gleichungen a) und b) nach den willkürlichen Constanten $C_i$ zu differenziren und letztere zu eliminiren. Da es jedoch nur darauf ankommt, dass die Verhältnisse der $C_i$ willkürlich gedacht werden, so kann man irgend eine dieser Zahlen gleich der Einheit nehmen. Je nachdem nun $C_1$, $C_2$ oder $C_3$ in dieser Weise specialisirt wird, erhält man durch Differentiation

$$a_2 C_2^{n-1} \partial C_2 + a_3 C_3^{n-1} \partial C_3 = 0, \qquad a_3 C_3^{n-1} \partial C_3 + a_1 C_1^{n-1} \partial C_1 = 0,$$

$$x_2^{\frac{n-1}{n}} \partial C_2 + x_3^{\frac{n-1}{n}} \partial C_3 = 0, \qquad x_3^{\frac{n-1}{n}} \partial C_3 + x_1^{\frac{n-1}{n}} \partial C_1 = 0,$$

$$a_1 C_1^{n-1} \partial C_1 + a_2 C_2^{n-1} \partial C_2 = 0,$$

$$x_1^{\frac{n-1}{n}} \partial C_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}} \partial C_2 = 0.$$

Hieraus folgen für die $C_i$ folgende Proportionalitäten:

$$C_1 = \mu a_1^{\frac{1}{1-n}} x_1^{\frac{1}{n}}, \quad C_2 = \mu a_2^{\frac{1}{1-n}} x_2^{\frac{1}{n}}, \quad C_3 = \mu a_3^{\frac{1}{1-n}} x_3^{\frac{1}{n}},$$

und diese ergeben, sowohl in 2a), als auch in 2b) eingesetzt,

$$a_1^{\frac{1}{1-n}} x_1 + a_2^{\frac{1}{1-n}} x_2 + a_3^{\frac{1}{1-n}} x_3 = 0.$$

Diese Gerade genügt der vorgelegten Differentialgleichung singulär.

Um das singuläre Integral aus der Differentialgleichung abzuleiten, hat man einen analogen Process mit den Differentialen $u_i$ vorzunehmen. Liegt vor

$$\left.\begin{array}{l} f = f(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3) = 0 \\ (x_i u_i) = \ x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \ = 0 \end{array}\right\},$$

und wird diese Differentialgleichung in Punktcoordinaten aufgefasst, so ergiebt die entsprechende Differentiation

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial u_2}\partial u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\partial u_3 = 0 \\ x_2\,\partial u_2 + x_3\,\partial u_3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial u_3}\partial u_3 + \frac{\partial f}{\partial u_1}\partial u_1 = 0 \\ x_3\,\partial u_3 + x_1\,\partial u_1 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial u_1}\partial u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\partial u_2 = 0 \\ x_1\,\partial u_1 + x_2\,\partial u_2 = 0 \end{array}\right|,$$

und hieraus fliessen folgende Proportionalitäten:

$$\mu x_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \mu x_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad \mu x_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3}.$$

Aus diesen Ausdrücken und der Gleichung $f = 0$ hat man schliesslich die $u_i$ zu eliminiren. An Stelle der Gleichung $f = 0$ kann man einfacher die Identität $(x_i u_i) = 0$ verwenden, denn nach dem Euler'schen Satze für homogene Functionen $\nu^{\text{ten}}$ Grades hat man die Beziehung

$$\nu f = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} u_i,$$

und weil

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \mu x_i,$$

so ist

$$\nu f = \mu\, \Sigma x_i u_i.$$

Für unser Beispiel

$$f = a_1 x_1 u_1^n + a_2 x_2 u_2^n + a_3 x_3 u_3^n = 0$$

findet man hiernach

$$\mu x_i = n a_i x_i u_i^{n-1}, \text{ d. h. } u_i = \mu' a_i^{\frac{1}{1-n}},$$

welche Werthe, in $(x_i u_i) = 0$ eingeführt, dasselbe singuläre Integral ergeben, welches wir früher fanden, nämlich

$$a_1^{\frac{1}{1-n}} x_1 + a_2^{\frac{1}{1-n}} x_2 + a_3^{\frac{1}{1-n}} x_3 = 0.$$

Die soeben gewonnenen Resultate weisen auf einen sehr kurzen Weg hin, das Integral der Differentialgleichung

$$3)\qquad \left.\begin{array}{c} a_1 x_1^m u_1^n + a_2 x_2^m u_2^n + a_3 x_3^m u_3^n = 0 \\ u_1 = \mu(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2) \text{ etc.} \end{array}\right\}$$

herzuleiten. Führt man nämlich in diese Gleichung und in die Identität

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

die Proportionalitäten

$$u_1 = \mu C_1 x_1^{-\frac{m}{n}}, \quad u_2 = \mu C_2 x_2^{-\frac{m}{n}}, \quad u_3 = \mu C_3 x_3^{-\frac{m}{n}},$$

ein, so erhält man

$$4)\quad \left.\begin{array}{ll} \text{a)} & a_1 C_1^n + a_2 C_2^n + a_3 C_3^n = 0 \\ \text{b)} & C_1 x_1^{\frac{n-m}{n}} + C_2 x_2^{\frac{n-m}{n}} + C_3 x_3^{\frac{n-m}{n}} = 0 \end{array}\right\}.$$

Dies ist aber das gesuchte Integral, denn aus Gleichung b) und deren Differential folgen die benutzten Proportionalitäten. Für das singuläre Integral findet man folgenden Ausdruck:

$$a_1^{\frac{1}{1-n}} x_1^{\frac{m-n}{1-n}} + a_2^{\frac{1}{1-n}} x_2^{\frac{m-n}{1-n}} + a_3^{\frac{1}{1-n}} x_3^{\frac{m-n}{1-n}} = 0.$$

Der besondere Fall, in welchem $n = m$ ist, findet seine Erledigung bei der nächsten Untersuchung.

## 2. Integration der Differentialgleichung

$$1)\qquad f(x_1^m u_1,\ x_2^m u_2,\ x_3^m u_3) = 0,$$

unter $f$ eine beliebige homogene Function von $x_i^m u_i$ verstanden; $u_1 = \mu(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2)$ etc.

Genau so wie im letzten Beispiel findet man, von den Ausdrücken

$$x_i^m u_i = \mu C_i$$

ausgehend, folgendes Integral:

$$2)\quad \left.\begin{array}{ll} \text{a)} & f(C_1, C_2, C_3) = 0 \\ \text{b)} & C_1 x_1^{1-m} + C_2 x_2^{1-m} + C_3 x_3^{1-m} = 0 \end{array}\right\},$$

dessen Richtigkeit durch Differentiation der letzten Gleichung unmittelbar bestätigt werden kann.

Beiläufig sei bemerkt, dass die allgemeiner aussehende Gleichung

$$f(x_1^m u_1^n,\ x_2^m u_2^n,\ x_3^m u_3^n) = 0$$

in Gleichung 1) mit enthalten ist.

Das singuläre Integral ist durch die vier Gleichungen

$$(x_i u_i) = 0,\quad \mu x_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

gegeben.

Der Fall, in welchem $m = 1$ ist, erfordert eine besondere Betrachtung, denn das allgemeine Integral geht über in

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & f(C_1, C_2, C_3) = 0 \\ \text{b)} & C_1 + C_2 + C_3 = 0 \end{array}\right\},$$

welche Form die $x_i$ gar nicht mehr enthält.

Nimmt man zu diesen Gleichungen folgende Identität:

$$\{C_1 x_1^{1-m} + C_2 x_2^{1-m} + C_3 x_3^{1-m} - (C_1 + C_2 + C_3)\}_{m=1} = \{(1-m)c\}_{m=1}$$
$$(c = const.)$$

hinzu und beachtet, dass

$$\lim_{m=1} \left\{\frac{x_i^{1-m} - 1}{1-m}\right\} = l x_i,$$

so erhält man folgende neue Beziehung:

$$\text{c)}\qquad C_1\, l x_1 + C_2\, l x_2 + C_3\, l x_3 = c,$$

welche im Verein mit den Gleichungen a) und b) das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\text{3)}\qquad f(x_1 u_1,\ x_2 u_2,\ x_3 u_3) = 0$$

darstellen wird. Die $C_i$ figuriren hier als Parameter, welche zu eliminiren sind; $c$ ist die Integrationsconstante. Die Richtigkeit der angegebenen Integralform kann direct dargethan werden, wenn man die Gleichung b) mit dem Differential der Gleichung c) verbindet. Dann ergeben sich die Proportionalitäten

$$C_1 = \mu x_1 u_1,\quad C_2 = \mu x_2 u_2,\quad C_3 = \mu x_3 u_3,$$

vermöge deren sich die Gleichung a) in die Differentialgleichung 3) verwandelt. Eine singuläre Lösung existirt hier nicht.

Bezeichnet man beispielsweise eine ganze rationale Function der $x_i u_i$ symbolisch durch

$$(a_1 x_1 u_1 + a_2 x_2 u_2 + a_3 x_3 u_3)^n = 0,$$

so ist das Integral dieser Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3)^n = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1\, l x_1 + C_2\, l x_2 + C_3\, l x_3 = c \end{array}\right\}.$$

Ist in Gleichung 1) der Exponent $m = 0$, dann liegt die Differentialgleichung

$$\text{4)}\qquad f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

vor, welche offenbar mit der „Clairaut'schen Form" in impliciter Gestalt übereinkommt.

Ihr allgemeines Integral ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & f(C_1, C_2, C_3) = 0 \\ \text{b)} & C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \end{array}\right\},$$

also immer eine Gerade.

Für das singuläre Integral hat man wiederum

$$(x_i u_i) = 0,\qquad \mu x_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Man findet beispielsweise in der symbolischen Form für

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)^2 = 0$$

das allgemeine Integral

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3)^2 = 0 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \end{array}\right\},$$

und das singuläre

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3)^2 = 0,$$

wobei die $A_{ik}$ die Unterdeterminanten gebildet aus den $a_{ik}$ sind.

---

## III.

### Beiträge zur Integration der Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

in welcher

$$\left.\begin{aligned} M &= A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 \\ N &= A_1x^2 + B_2y^2 + 2C_2xy + 2D_2x + 2E_2y + F_2 \end{aligned}\right\}.$$

Während schon zu Euler's Zeiten die Integration der Gleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ im Falle, dass $M$ und $N$ Polynome ersten Grades sind. eine bekannte Sache war, ist es bis jetzt noch nicht gelungen, die eben angeführte Gleichung in allen Fällen zu integriren. Die Integration ist im Allgemeinen nur in den Fällen geglückt, in denen sich diese Gleichung direct oder durch geeignete Substitutionen auf die lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt, oder in denen der integrirende Factor aus den particulären Lösungen zusammengesetzt werden kann.* Gewisse Specialfälle der Gleichung hat man dadurch erledigt, dass man dieselben auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführte.**

Auch in Abschnitt $I_2$ (S. 3) zeigte es sich, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(a_2 + b_2p + c_2p^2)\frac{dt}{dp} = (p-t)(\alpha + \beta t + \gamma p)$$

mit Hilfe der Substitution

$$p - t = \frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)}$$

auf eine lineare Differentialgleichung der zweiten Ordnung gebracht werden konnte, deren Integration bekannt ist.

1. Betrachten wir jetzt die vollständigere Gleichung

a) $$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + (y - \alpha_1 - \beta_1x)(y - \alpha_2 - \beta_2x) = 0$$

und setzen dem vorigen Beispiele gemäss

$$y - \alpha_1 - \beta_1x = z,$$

so entsteht

$$(a + 2bx + cx^2)\left(\frac{dz}{dx} + \beta_1\right) + z\{z + (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)x\} = 0,$$

oder für

$$z = -\frac{\beta_1}{z_1}$$

---

* F. Minding, Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen I. Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen; St. Petersburg 1862. G. Darboux, Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré; Bulletin des sciences mathématiques, Paris 1878.

** Die Riccati'sche Gleichung, Salomon's Uebersetzung der Euler'schen Integralrechnung, Bd. 2 S. 18.

$$(a+2bx+cx^2)\left(\frac{dz_1}{dx}+z_1^2\right)-z_1\{(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)x\}+\beta_1=0.$$

Um nun zur Liouville'schen Gleichung aufzusteigen, erübrigt noch die Substitution

$$z_1=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad \text{also}\quad \frac{dz_1}{dx}+z_1^2=\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)},$$

wodurch

$$(a+2bx+cx^2)\,\varphi''(x)-\{(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)x\}\,\varphi'(x)+\beta_1\,\varphi(x)=0$$

erhalten wird.

Das Integral dieser Gleichung hat die Form

$$\varphi=c_1\,\varphi_1(x)+c_2\,\varphi_2(x),$$

mithin wird der Gleichung a) genügt durch

$$y=\alpha_1+\beta_1 x-\beta_1\frac{c_1\,\varphi_1(x)+c_2\,\varphi_2(x)}{c_1\,\varphi'_1(x)+c_2\,\varphi'_2(x)},\quad c_1:c_2=const.$$

Wäre $\beta_1=0$, so fände man hierdurch nur ein particuläres Integral. Dieser Fall lässt sich jedoch leicht für sich erledigen, und abgesehen davon könnte man auch den zweiten Factor $y-\alpha_2-\beta_2 x$ bei der Rechnung benutzen.

Auf die Gleichung a) lässt sich die allgemeinere

1) $$(a+2bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$$

zurückführen. Setzt man nämlich

$$y=y_1+\lambda x,$$

so erhält man eine Gleichung derselben Form

$$(a+2bx+cx^2)\frac{dy_1}{dx}+A_1x^2+B_1y_1^2+2C_1xy_1+2D_1x+2E_1y_1+F_1=0,$$

und hier bedeuten

$$A_1=A+(2C+c)\lambda+B\lambda^2,\quad B_1=B,\quad C_1=C+B\lambda,$$
$$D_1=D+(E+b)\lambda,\quad E_1=E,\quad F_1=F+a\lambda.$$

Jetzt verfüge man über $\lambda$ so, dass der Kegelschnitt $(x, y_1)$ in ein Linienpaar zerfällt, d. h., dass die Discriminante

$$\Delta_1=\frac{1}{B_1}\{(E_1^2-B_1F_1)(C_1^2-A_1B_1)-(E_1C_1-B_1D_1)^2\}$$

verschwindet. Setzt man zur Abkürzung

$$E_1^2-B_1F_1=g_1,\quad E_1C_1-B_1D_1=h_1,\quad C_1^2-A_1B_1=k_1,$$

so lautet unsere Bedingung

$$g_1k_1-h_1^2=0.$$

Nun findet man aber leicht, dass

$$g_1=g-aB\lambda,\quad h_1=h-bB\lambda,\quad k_1=k-cB\lambda$$

ist, wenn unter $g$, $h$ und $k$ dieselben Ausdrücke, wie unter $g_1$, $h_1$ und $k_1$ verstanden werden, jedoch gebildet aus den Coefficienten der ursprüng-

lichen Gleichung 1). Führt man die obigen Werthe in die Bedingungsgleichung ein, so erhält man für $\lambda$ folgende quadratische Gleichung:

$$(g - aB\lambda)(k - cB\lambda) - (h - bB\lambda)^2 = 0$$

oder

$$(ac - b^2)(B\lambda)^2 - (ak - 2bh + cg)(B\lambda) + (gk - h^2) = 0.$$

Schreibt man schliesslich die Zerlegung des Kegelschnittes $(x, y_1)$ *in extenso* auf, so entsteht

$$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy_1}{dx} + \frac{1}{B_1}\left\{\begin{array}{l}\left[(C_1 + \sqrt{k_1})x + B_1 y_1 + (E_1 + \sqrt{g_1})\right] \\ .\left[(C_1 - \sqrt{k_1})x + B_1 y_1 + (E_1 - \sqrt{g_1})\right]\end{array}\right\} = 0,$$

eine Differentialgleichung, welche sich wie die Gleichung a) integriren lässt.

2. Man kann die Differentialgleichung

$$1) \qquad (a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + . \, . + F = 0$$

auf die Liouville'sche Gleichung zurückführen, ohne dass man sie erst auf die Form a) bringt. Transformirt man nämlich Gleichung 1) mittels der linearen Substitution

$$y = z + \lambda x + \varkappa,$$

so erhält man

$$(a + 2bx + cx^2)\left(\frac{dz}{dx} + \lambda\right) + A'x^2 + B'z^2 + \ldots + F' = 0,$$

und zwar ist

$$\begin{array}{ll} A' = A + 2C\lambda + B\lambda^2, & B' = B, \\ C' = C + B\lambda, & D' = D + E\lambda + C\varkappa + B\lambda\varkappa, \\ E' = E + B\varkappa, & F' = F + 2E\varkappa + B\varkappa^2. \end{array}$$

Bestimmen wir jetzt einen Factor $\varrho$ so, dass

$$A'x^2 + 2D'x + F' = \varrho(a + 2bx + cx^2),$$

d. h.

$$A' = c\varrho, \quad D' = b\varrho, \quad F' = a\varrho,$$

so entstehen folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} A + 2C\lambda + B\lambda^2 = c\varrho \\ D + E\lambda + C\varkappa + B\lambda\varkappa = b\varrho \\ F + 2E\varkappa + B\varkappa^2 = a\varrho \end{array}\right\}.$$

Für die Berechnung der Grössen $\lambda$, $\varkappa$ und $\varrho$ ist es zweckmässig, diese Gleichungen umzuformen in

$$\alpha) \qquad \left.\begin{array}{r} (B\lambda + C)^2 = Bc\varrho + k \\ (B\lambda + C)(B\varkappa + E) = Bb\varrho + h \\ (B\varkappa + E)^2 = Ba\varrho + g \end{array}\right\},$$

wobei, wie früher, zur Abkürzung

$$E^2 - BF = g, \quad CE - BD = h, \quad C^2 - AB = k$$

gesetzt wurde, denn dann ist augenscheinlich, dass

$$(Ba\varrho + g)(Bc\varrho + k) = (Bb\varrho + h)^2$$

oder

$\beta$) $$(ac-b^2)(B\varrho)^2+(ak-2bh+cg)(B\varrho)+(gk-h^2)=0.$$

Aus dieser Gleichung, welche zu der auf voriger Seite entwickelten quadratischen Gleichung in engster Beziehung steht, ergiebt sich $\varrho$; aus den Gleichungen $\alpha$) findet man alsdann $\lambda$ und $\varkappa$. Nach diesen Bestimmungen gestattet die Differentialgleichung 1) folgende Schreibweise:

$$(a+2bx+cx^2)\left(\frac{dz}{dx}+\lambda+\varrho\right)+B'z^2+2(C'x+E')z=0$$

oder für

$$z=-\frac{1}{z_1}(\lambda+\varrho)$$

$$(a+2bx+cx^2)\left(\frac{dz_1}{dx}+z_1^2\right)-2(C'x+E')z_1+B'(\lambda+\varrho)=0.$$

Ist $\lambda+\varrho=0$, so ist diese Substitution unbrauchbar, aber auch überflüssig.

Nun wird der Uebergang der Liouville'schen Gleichung durch die Ausdrücke

$$z_1=\frac{\frac{dv}{dx}}{v},\quad \frac{dz_1}{dx}+z_1^2=\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{v}$$

vermittelt, und man erhält

$$(a+2bx+cx^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2(C'x+E')\frac{dv}{dx}+B'(\lambda+\varrho)v=0$$

Es ist bekannt, dass man die letzte Gleichung durch eine Substitution von der Form

$$x=mu+n$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$u(1-u)\frac{d^2v}{du^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)u]\frac{dv}{du}-\alpha\beta v=0$$

überführen kann. Unmöglich ist dies nur dann, wenn $c=0$ oder wenn $a+2bx+cx^2$ ein vollständiges Quadrat ist, auf welche Fälle wir später zurückkommen. Die letzte Differentialgleichung kann in allen Fällen durch bestimmte Integrale oder durch hypergeometrische Reihen integrirt werden;* ihre beiden particulären Integrale lauten

$$v_1=F(\alpha,\beta,\gamma,u),$$
$$v_2=u^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ u),$$

wobei unter $F(\alpha,\beta,\gamma,u)$ nach Gauss die Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}u+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}u^2+\dots$$

zu verstehen ist. Indem man zurückrechnet, erhält man nun auch das Integral der Liouville'schen Gleichung in der Form von hypergeometrischen Reihen, etwa

* Jacobi (Heine), Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe; Crelle Bd. 56. — Man findet daselbst eine vollständige Integraltafel.

$$v = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x).$$

Für das Integral der vorgelegten Gleichung

$$1) \qquad (a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + \ldots + F = 0$$

folgt sonach ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$y = \lambda x + \varkappa - (\lambda + \varrho)\frac{c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)}{c_1 \varphi'_1(x) + c_2 \varphi'_2(x)}, \quad c_1 : c_2 = const.$$

Ein einfaches Beispiel hierzu ist folgendes:

$$(x - r_1)(x - r_2)\frac{dy}{dx} + y^2 + k(y + x - r_1)(y + x - r_2) = 0.$$

Es genügt, zu setzen

$$y = -\frac{\varkappa}{z},$$

denn man bekommt

$$(x - r_1)(x - r_2)\left(\varkappa \frac{dz}{dx} + kz^2\right) - \varkappa k(2x - r_1 - r_2)z + \varkappa^2(1 + k) = 0,$$

oder für

$$\varkappa = k \text{ und } z = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

$$(x - r_1)(x - r_2)\frac{d^2 v}{dx^2} - k(2x - r_1 - r_2)\frac{dv}{dx} + k(k+1)v = 0.$$

Dieser linearen Gleichung genügt

$$v = c_1(x - r_1)^{k+1} + c_2(x - r_2)^{k+1},$$

mithin besitzt die vorgelegte Differentialgleichung das Integral

$$y = \frac{-k}{k+1}\,\frac{c_1(x - r_1)^{k+1} + c_2(x - r_2)^{k+1}}{c_1(x - r_1)^k + c_2(x - r_2)^k}$$

oder

$$\frac{k(x - r_1) + (k+1)y}{k(x - r_2) + (k+1)y}\left\{\frac{x - r_1}{x - r_2}\right\}^k = const.$$

Diese Integralformen sind für $k = 0$ und $k = -1$ nicht zu gebrauchen, doch erledigen sich jene Fälle leicht auf anderem Wege.

Ist im Speciellen

$$r_1 = +i, \quad r_2 = -i, \quad k = -\tfrac{1}{2}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

so liegt vor

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + y^2 - \tfrac{1}{2}\{(y + x)^2 + 1\} = 0.$$

Das Integral lautet

$$y = \frac{c_1\sqrt{x - i} + c_2\sqrt{x + i}}{c_1\sqrt{x + i} + c_2\sqrt{x - i}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}.$$

Da

$$\sqrt{x \pm i} = m \pm ni, \quad m = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2}}, \quad n = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2}},$$

so hat man bei Aenderung der Constanten

$$y = \frac{c'm + c''n}{c'm - c'n} \cdot \sqrt{x^2+1}$$

oder

$$\frac{y+\sqrt{x^2+1}}{y-\sqrt{x^2+1}} = \frac{cm}{c''n},$$

und weil

$$\frac{m}{n} = \sqrt{x^2+1} + x,$$

so genügt der gegebenen Differentialgleichung der Ausdruck

$$\frac{y+\sqrt{x^2+1}}{y-\sqrt{x^2+1}} = c(x+\sqrt{x^2+1}).$$

### 3. Besondere Fälle der Differentialgleichung

1) $$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + \ldots + F = 0.$$

*a)* Es sei $c = 0$. Die Gleichung kann dann transformirt werden in

$$(a + 2bx)\frac{d^2v}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dv}{dx} + a_0 v = 0,$$

und diese lässt sich auf die „Weiler'sche Normalform"

$$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p + q + \xi)\frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0\text{*}$$

bringen, deren Integration in allen Fällen durch bestimmte Integrale oder Reihen geleistet werden kann.

*b)* Es sei $a + 2bx + cx^2$ ein vollständiges Quadrat, dann kann man der Gleichung 1) immer folgende Gestalt geben:

$$c(x-r)^2\frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + \ldots + F = 0,$$

und diese kommt nach dem Früheren zurück auf

$$(x-r)^2\frac{d^2v}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dv}{dx} + a_0 v = 0.$$

Um diese Differentialgleichung in die Weiler'sche Normalform überzuführen, setze man zunächst

$$x - r = \frac{\gamma}{\xi},$$

dann entsteht

$$\xi^2\frac{d^2v}{d\xi^2} + \left(2 - b_1 - \frac{a_1 + b_1 r}{\gamma}\xi\right)\xi\frac{dv}{d\xi} + a_0 v = 0$$

oder, wenn

---

* O. Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Physik Bd. V, oder dessen Vorlesungen über höhere Analysis 1874; Integration von

$$(a_2 + b_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)y = 0.$$

$$\gamma = -(a_1 + b_1 r)$$

gewählt wird,

$$\xi^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + (2 - b_1 + \xi)\,\xi \frac{dv}{d\xi} + a_0 v = 0.$$

Für

$$v = \xi^p . \varphi$$

geht diese Gleichung über in

$$\xi^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (2p + 2 - b_1 + \xi)\,\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + (p^2 + (1 - b_1)p + a_0 + p\xi)\varphi = 0.$$

Verfügt man über $p$ so, dass

$$p^2 + (1 - b_1)p + a_0 = 0,$$

und setzt

$$p + 2 - b_1 = q,$$

so resultirt

$$\xi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0,$$

also die verlangte Normalform.

In gewissen Fällen kann man sich diese Reduction ersparen. Sei vorgelegt

$$(a + bx)^2 \frac{dy}{dx} + (y - \alpha_1 - \beta_1 x)(y - \alpha_2 - \beta_2 x) = 0$$

mit der Beschränkung, dass

$$a = \alpha_1 - \alpha_2, \quad b = \beta_1 - \beta_2$$

sei. Dem Abschnitt $\mathrm{III}_1$ gemäss hat man

$$y = \alpha_1 + \beta_1 x - \beta_1 \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

zu setzen, wodurch folgende lineare Gleichung erhalten wird:

$$(a + bx)^2 \varphi''(x) - (a + bx)\,\varphi'(x) + \beta_1\,\varphi(x) = 0.$$

Derselben genügt offenbar particulär

$$\varphi = (a + bx)^\mu,$$

wenn $\mu$ eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$b^2 \mu^2 - (b + 1)\,b\mu + \beta_1 = 0$$

bedeutet. Das vollständige Integral lautet sonach

$$\varphi = c_1 (a + bx)^{\mu_1} + c_2 (a + bx)^{\mu_2}.$$

Mithin genügt der gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y = \alpha_1 + \beta_1 x - \frac{\beta_1}{b} \frac{c_1 (a + bx)^{\mu_1} + c_2 (a + bx)^{\mu_2}}{c_1 \mu_1 (a + bx)^{\mu_1 - 1} + c_2 \mu_2 (a + bx)^{\mu_2 - 1}}.$$

*c)* Um die übrigen Sonderfälle der Gleichung 1) zu erkennen, muss man die Gleichung zur Bestimmung von $\varrho$

$$\beta) \qquad (ac - b^2)(B\varrho)^2 + (ak - 2bh + cg)(B\varrho) + (gk - h^2) = 0$$

ins Auge fassen.

Ist $gk - h^2 = 0$, so zerfällt der Kegelschnitt $(x, y)$ der Gleichung 1) an und für sich in ein Linienpaar, und dann ist der in Abschnitt $\mathrm{III}_1$ angezeigte Weg einzuschlagen.

Ist $B=0$, so lässt sich Gleichung 1) wie eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung behandeln.

Ist $ac-b^2=0$, so liefert obige Gleichung nur einen brauchbaren Werth für $\varrho$. Da in diesem Falle der Ausdruck $a+2bx+cx^2$ ein vollständiges Quadrat ist, so tritt das unter *b)* aufgeführte Verfahren ein. Ist gleichzeitig

$$ac-b^2=0 \quad \text{und} \quad ak-2bh+cg=0,$$

so ergiebt sich für $\varrho$ kein brauchbarer Werth. Die Differentialgleichung 1) lautet wegen der ersten Bedingung

$$c(x-r)^2\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+\ldots+F=0$$

und sie geht, wenn man für $x-r$ eine andere Variabele, etwa wieder $x$ setzt, über in

$$cx^2\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+\ldots+F=0,$$

wobei zu beachten ist, dass die neuen Coefficienten $D$, $E$ und $F$ nicht mit den vorigen entsprechenden identisch sind. Wir operiren nun mit der letzten Gleichung oder, was dasselbe ist, mit Gleichung 1) unter der Voraussetzung, dass

$$a=b=0$$

sei. In diesem Falle findet man aus Gleichung $\beta$)

$$\varrho=\frac{h^2-gk}{Bcg},$$

und dieser Werth ist brauchbar, so lange $g$ von Null verschieden ist. Ist

$$g=E^2-BF=0,$$

d. h. $By^2+2Ey+F$ ein vollständiges Quadrat, so kann man der letzten Differentialgleichung, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, folgende Gestalt geben:

$$cx^2\frac{dy}{dx}+(y+\alpha+\beta x)^2+\alpha'x+\beta'x^2=0$$

oder für

$$y+\alpha+\beta x=z$$

$$cx^2\frac{dz}{dx}+z^2+\alpha'x+(\beta'-c\beta)\,x^2=0.$$

Bevor man zu einer Gleichung zweiter Ordnung aufsteigt, ist es zweckmässig, noch weiter zu reduciren. Man setze

$$z=w+\lambda x,$$

dann entsteht

$$cx^2\frac{dw}{dx}+w^2+2\lambda wx+\alpha'x+(\lambda^2+c\lambda+\beta'-c\beta)x^2=0$$

oder, wenn $\lambda$ so gewählt wird, dass

$$\lambda^2+c\lambda+(\beta'-c\beta)=0,$$

$$c x^2 \frac{dw}{dx} + w^2 + 2\lambda w x + \alpha' x = 0.$$

Substituirt man nun hierin nach einander

$$x = \frac{1}{u}, \quad w = -c \frac{\frac{dv}{du}}{v},$$

so bekommt man

$$c^2 u \frac{d^2 v}{du^2} - 2c\lambda \frac{dv}{du} + \alpha' v = 0,$$

eine Differentialgleichung, welche schliesslich auf die Weiler'sche Normalform gebracht werden kann.

Lautet das Integral der letzten Gleichung

$$v = k_1 \varphi_1(u) + k_2 \varphi_2(u),$$

so genügt der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$y + \alpha + \beta x = w + \lambda x = \lambda x - c \frac{k_1 \varphi'_1(u) + k_2 \varphi'_2(u)}{k_1 \varphi_1(u) + k_2 \varphi_2(u)},$$

wobei

$$u = \frac{1}{x}, \quad k_1 : k_2 = const.$$

Kommt die Bedingung $ac - b^2 = 0$ so zu Stande, dass $b = c = 0$, so hat man es mit der Differentialgleichung

$$a \frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

zu thun. Aus der Gleichung $\beta$) findet man in diesem Falle

$$\varrho = \frac{h^2 - gk}{Bak},$$

und aus den Gleichungen $\alpha$) S. 16

$$B\lambda + C = \sqrt{k} = C', \qquad B\varkappa + E = \frac{h}{k}\sqrt{k} = E'.$$

Die vorliegende Differentialgleichung verwandelt sich sonach durch die Substitution

$$y = z + \lambda x + \varkappa$$

in

$$a\left(\frac{dz}{dx} + \lambda + \varrho\right) + Bz^2 + 2\left(x + \frac{h}{k}\right) z \sqrt{k} = 0.$$

Um diese Gleichung in eine der zweiten Ordnung überzuführen, kann man, wie früher (Abschnitt $III_2$) eine reciproke Substitution benutzen; man kommt indessen hier auch mit einer directen aus. Setzt man

$$z = \frac{a}{B} z_1,$$

so entsteht

$$a\left(\frac{dz_1}{dx} + z_1^2\right) + 2\sqrt{k}\left(x + \frac{h}{k}\right) z_1 + B(\lambda + \varrho) = 0$$

oder für

$$z_1 = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + 2\sqrt{k}\left(x + \frac{h}{k}\right)\frac{dv}{dx} + B(\lambda + \varrho)v = 0,$$

welche Gleichung leicht auf die Weiler'sche Normalform gebracht werden kann. Lautet das Integral der letzten Gleichung

$$v = c_1\,\varphi_1(x) + c_2\,\varphi_2(x),$$

so genügt der gegebenen Differentialgleichung

$$y = \lambda x + \varkappa + \frac{a}{B}\,\frac{c_1\,\varphi'_1(x) + c_2\,\varphi'_2(x)}{c_1\,\varphi_1(x) + c_2\,\varphi_2(x)}, \quad c_1 : c_2 = const.$$

Schliesslich muss noch der Fall $k = 0$, in welchem die letzte Rechnung unbrauchbar ist, erledigt werden. Da $k = C^2 - AB$ war, so ist jetzt der Kegelschnitt $(x, y)$ eine Parabel, und der in Rede stehenden Differentialgleichung kann jedenfalls die Form

$$a\frac{dy}{dx} + (y + \alpha + \beta x)^2 + \alpha' + \beta' x = 0$$

ertheilt werden. Setzt man

$$y + \alpha + \beta x = z$$

und sodann

$$\alpha' + \beta' x - a\beta = a\beta' u,$$

so entsteht

$$\frac{dz}{du} + z^2 + a\beta' u = 0$$

oder für

$$z = \frac{\frac{dv}{du}}{v}$$

$$\frac{d^2v}{du^2} + a\beta' u v = 0.$$

Diese Riccati'sche Gleichung* kann bequem durch Reihen integrirt werden. Nach Kummer genügt ihr folgendes bestimmte Integral:

$$v = \int_0^\infty e^{-\frac{t^3}{3}}\left(C_1\mu_1 e^{\mu_1 u t} + C_2\mu_2 e^{\mu_2 u t} + C_3\mu_3 e^{\mu_3 u t}\right) dt,$$

wenn die willkürlichen $C$ an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

geknüpft werden und $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ die Wurzeln der Gleichung

* O. Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis, Bd. I, 1874, § 110. — Kummer, Crelle's Journal Bd. XIX; Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ mit Hilfe mehrfacher, bestimmter Integrale.

$$\mu^2 = -a\beta'$$

bedeuten. Schreibt man das Integral kurz

$$v = \int_0^\infty F(u, t)\, dt,$$

und beachtet, dass

$$z = \frac{\frac{dv}{du}}{v}, \text{ also } zv - \frac{dv}{du} = 0,$$

so findet man als Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$\int_0^\infty \left\{ z\, F(u, t) - \frac{\partial F(u, t)}{\partial u} \right\} dt = 0,$$

wobei für $u$ und $z$ noch die entsprechenden Werthe, ausgedrückt in $x$ und $y$, zu setzen sind.

Ein besonders einfacher Fall ist folgender:

$$\frac{dy}{dx} + (y + \alpha + \beta x)^2 = 0.$$

Für

$$y + \alpha + \beta x = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

ergiebt sich

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \beta v,$$

also

$$v = c_1 e^{x\sqrt{\beta}} + c_2 e^{-x\sqrt{\beta}}.$$

Mithin genügt der gegebenen Differentialgleichung

$$y + \alpha + \beta x = \sqrt{\beta} \cdot \frac{c_1 e^{x\sqrt{\beta}} - c_2 e^{-x\sqrt{\beta}}}{c_1 e^{x\sqrt{\beta}} + c_2 e^{-x\sqrt{\beta}}}.$$

Beiläufig sei erwähnt, dass man auf diesem Wege Gleichungen von der Form

$$a \frac{dy}{dx} + (y + \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^2 = 0$$

integriren kann, denn für

$$y + \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = z$$

entsteht

$$a \frac{dz}{dx} - a(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2) + z^2 = 0,$$

welche Gleichung zu den vorher betrachteten gehört.

Auch die Differentialgleichung

b) $$(a + bx) \frac{dy}{dx} + (y + \alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 = 0$$

geht für

$$y + \alpha + \beta x + \gamma x^2 = z$$

über in

$$(a+bx)\frac{dz}{dx}-(a+bx)(\beta+2\gamma x)+z^2=0$$

und lässt sich dann integriren.

Allgemeiner noch könnte man verlangen, dass die rechten Seiten der Gleichungen a) und b) gegebene Ausdrücke von der Form $\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2$ sind.

### 4. Integration durch Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

Liouville hat bekanntlich (a. a. O.) bei der Integration der nach ihm benannten Differentialgleichung höhere Differentialquotienten benutzt. Ein besonderer Fall der Differentialgleichung a) (Abschnitt $III_1$), bei welcher schliesslich das Liouville'sche Verfahren Anwendung findet, ist folgender:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l}(x-r_1)(x-r_2)\dfrac{dy}{dx}+(y-\alpha_1-\beta_1 x)(y-\alpha_2-\beta_2 x)=0,\\ \qquad\text{wobei}\quad \dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_2-\beta_1}=\dfrac{r_1+r_2}{2}.\end{array}\right.$$

Wir setzen dem Früheren gemäss

$$y=\alpha_1+\beta_1 x-\beta_1\frac{v}{\frac{dv}{dx}}$$

und erhalten

$$(x-r_1)(x-r_2)\frac{d^2v}{dx^2}-\{(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)x\}\frac{dv}{dx}+\beta_1 v=0$$

oder wegen der Bedingung

$$2)^*\quad \left\{\begin{array}{l}(x-r_1)(x-r_2)\dfrac{dy}{dx}+\gamma(2x-r_1-r_2)\dfrac{dv}{dx}+\beta_1 v=0,\\ \qquad\text{wobei}\quad \dfrac{\beta_2-\beta_1}{2}=\gamma.\end{array}\right.$$

Zur Abkürzung sei noch

$$x-r_1=X_1,\quad x-r_2=X_2.$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

*a)* Es sei $\beta_2-\beta_1=1$. Dann lässt die Gleichung

$$2a)\qquad X_1X_2\frac{d^2v}{dx^2}+\tfrac{1}{2}(X_1+X_2)\frac{dv}{dx}+\beta_1 v=0$$

folgende Schreibweise zu:

$$\frac{d}{dx}\left\{X_1X_2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}+\beta_1\frac{d(v^2)}{dx}=0,$$

woraus

* Vergl. S. Spitzer, Studien über lineare Differentialgleichungen, II. Abschnitt, §§ 13 u. 26.

$$X_1 X_2 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \beta_1 v^2 = const.,$$

also

$$\frac{dv}{\sqrt{c+\varepsilon^2 v^2}} = \frac{dx}{\sqrt{X_1 X_2}} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^2 = -\beta_1, \\ c = const. \end{pmatrix}$$

folgt.

Eine nochmalige Integration ergiebt

$$\frac{1}{\varepsilon} \log(\sqrt{c+\varepsilon^2 v^2} + \varepsilon v) = 2 \log(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2}) + const.$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{c+\varepsilon^2 v^2} + \varepsilon v = C'(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} \\ \sqrt{c+\varepsilon^2 v^2} - \varepsilon v = C''(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} \end{array}\right\},$$

mithin durch Subtraction

$$v = C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}.$$

Dies ist das vollständige Integral der Gleichung 2a).

Da nun

$$\frac{dv}{dx} = \{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} - C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{X_1 X_2}},$$

so genügt der Differentialgleichung

$$(x-r_1)(x-r_2)\frac{dy}{dx} + (y-\alpha_1-\beta_1 x)(y-\alpha_2-\beta_2 x) = 0,$$

wenn

$$\beta_2-\beta_1 = 1, \quad \alpha_1-\alpha_2 = \tfrac{1}{2}(r_1+r_2),$$

folgender Ausdruck:

$$y = \alpha_1 + \beta_1 x + \sqrt{-\beta_1} \cdot \frac{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\sqrt{-\beta_1}} + C_2(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\sqrt{-\beta_1}}}{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\sqrt{-\beta_1}} - C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\sqrt{-\beta_1}}} \cdot \sqrt{X_1 X_2}.$$

Die Bedingungen sind im Speciellen erfüllt, wenn beispielsweise

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0, & \beta_1 = 1, & r_1 = -1, \\ \alpha_2 = 0, & \beta_2 = 2, & r_2 = +1. \end{array}$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + (y-x)(y-2x) = 0$$

und ihr Integral

$$y = x + i\frac{C_1(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^{2i} + C_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^{2i}}{C_1(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^{2i} - C_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^{2i}} \cdot \sqrt{x^2-1}$$

oder in reeller Form

$$\frac{y-x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{A \tan 2\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) + B}{B \tan 2\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) - A}, \qquad A:B = const.$$

*b)* Benutzt man Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, so kann Gleichung 1) auch in den Fällen integrirt werden, in welchen $\beta_2-\beta_1$ überhaupt eine ganze positive oder negative ungerade Zahl ist. Führt man nämlich in 2)

$$v = \frac{d^{-\lambda} w}{dx^{-\lambda}}$$

ein und differenzirt die Gleichung $\lambda$-mal, $\lambda$ als positive ganze Zahl gedacht, so entsteht

$$X_1 X_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + (\lambda+\gamma)(X_1+X_2)\frac{dw}{dx} + [\beta_1 + \lambda(\lambda+2\gamma-1)]w = 0.$$

Man wähle $\lambda$ so, dass

$$\lambda+\gamma = \tfrac{1}{2}, \text{ also } -\lambda = \frac{\beta_2-\beta_1-1}{2},$$

und setze

$$\beta_1 + \lambda(\lambda+2\gamma-1) = \beta_1 - \lambda^2 = -\varepsilon^2,$$

dann geht die letzte Differentialgleichung über in

$$X_1 X_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \tfrac{1}{2}(X_1+X_2)\frac{dw}{dx} - \varepsilon^2 w = 0$$

und besitzt nach der Untersuchung des Falles *a)* folgendes Integral:

$$w = C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon},$$

wobei

$$\varepsilon = \sqrt{\lambda^2-\beta_1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta_2^2+\beta_1^2+1-2\beta_2\beta_1-2\beta_2-2\beta_1}.$$

Der Gleichung 2) genügt sonach

$$v = \frac{d^{\frac{\beta_2-\beta_1-1}{2}}}{dx^{\frac{\beta_2-\beta_1-1}{2}}}\{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\},$$

wo $\beta_2-\beta$ eine ganze positive ungerade Zahl ist.

Wir kommen mithin zu folgendem Resultat:

Der Differentialgleichung

$$1)\qquad (x-r_1)(x-r_2)\frac{dy}{dx} + (y-\alpha_1-\beta_1 x)(y-\alpha_2-\beta_2 x) = 0$$

genügt, falls

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_2-\beta_1} = \frac{r_1+r_2}{2}$$

und $\beta_2-\beta_1$ eine ganze positive ungerade Zahl ist, nachstehender Ausdruck:

$$y = \alpha_1 + \beta_1 x - \beta_1 \cdot \frac{\{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\}^{\left(\frac{\beta_2-\beta_1-1}{2}\right)}}{\{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\}^{\left(\frac{\beta_2-\beta_1+1}{2}\right)}},$$

wobei

$$X_1 = x-r_1, \quad X_2 = x-r_2,$$

$$2\varepsilon = \sqrt{\beta_2^2+\beta_1^2+1-2\beta_2\beta_1-2\beta_2-2\beta_1},$$

und $\frac{d^n w}{dx^n}$ mit $w^{(n)}$ bezeichnet wurde.

Ist $\beta_2-\beta_1$ eine ganze negative ungerade Zahl, so vertausche man $\alpha_1$ mit $\alpha_2$ und $\beta_1$ mit $\beta_2$. Dabei bleibt Gleichung 1) sammt der Bedingung ungeändert, während das Integral folgende Gestalt erlangt:

$$y = \alpha_2 + \beta_2 x - \beta_2 \cdot \frac{\{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\}^{\left(\frac{\beta_1-\beta_2-1}{2}\right)}}{\{C_1(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2})^{2\varepsilon} + C_2(\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2})^{2\varepsilon}\}^{\left(\frac{\beta_1-\beta_2+1}{2}\right)}},$$

und hier ist die Ordnungszahl des Differentialquotienten wieder positiv.

Man kann auf ähnlichem Wege noch andere integrable Fälle dieser Gleichung finden, doch wird die Rechnung beschwerlicher. Vollkommen gelingt die Integration, wenn man bestimmte Integrale benutzt; mit diesen wollen wir noch den besondern Fall $\varepsilon = 0$, in welchem obige Formeln nicht mehr gelten, erledigen.

Ist nämlich $\varepsilon = 0$, d. h.

$$\beta_2^2 + \beta_1^2 + 1 - 2\beta_2\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_1 = 0,$$

so führt die Gleichung 1) auf

$$\left\{\begin{array}{l} (x-r_1)(x-r_2)\dfrac{d^2 v}{dx^2} + \gamma\,(2x - r_1 - r_2)\dfrac{dv}{dx} + \beta_1 v = 0, \\ \text{wobei } \gamma = \dfrac{\beta_2-\beta_1}{2} = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\beta_1}, \end{array}\right.$$

und dieser Gleichung genügt*

$$v = C_1\int_{r_1}^{r_2} \frac{(x-t)^{\sqrt{\beta_1}}}{\sqrt{(t-r_1)(t-r_2)}}\,dt + C_2\int_{r_1}^{r_2} \frac{(x-t)^{\sqrt{\beta_1}}}{\sqrt{(t-r_1)(t-r_2)}}\,log\,\frac{x-t}{(t-r_1)(t-r_2)}\,.\,dt.$$

Ist etwa $r_1 = -1$, $r_2 = +1$, und man setzt $t = -\cos\omega$, so entsteht hieraus

$$v = \int_0^{\pi} \left\{c_1 + c_2\,log\,\frac{x+\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}(x+\cos\omega)^{\sqrt{\beta_1}}\,d\omega.$$

Um noch die Bedingung

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_2-\beta_1} = \frac{r_1+r_2}{2}$$

zu erfüllen, sei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, und die in Rede stehende Differentialgleichung lautet

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + (y-\beta_1 x)(y-\beta_2 x) = 0,$$

wobei $\beta_1$ und $\beta_2$ der Bedingung $\varepsilon = 0$ unterliegen, sonst aber beliebige Zahlen sind. Diese Gleichung wird nun befriedigt durch den Ausdruck

$$y = \beta_1\left(x - \frac{v}{\frac{dv}{dx}}\right),$$

unter $v$ das zuletzt angegebene bestimmte Integral verstanden.

---

* S. Spitzer, a. a. O.

5. Differentialgleichungen der Form

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} M &= A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1\,xy + 2D_1\,x + 2E_1\,y + F_1 \\ N &= A_2 x^2 + B_2 y^2 + 2C_2\,xy + 2D_2\,x + 2E_2 y + F_2 \end{aligned}\right\},$$

welche auf die Gleichung

$$1)\qquad (a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + \ldots + F = 0$$

zurückgeführt werden können.

Wir benützen zuerst die lineare Substitution

$$x = \alpha y + u$$

und erhalten aus der allgemeinen Differentialgleichung

$$M\,du + (M\alpha + N)\,dy = 0.$$

Um eine Gleichung der Form 1) zu gewinnen, greifen wir aus

$$M\alpha + N = A'u^2 + B'y^2 + 2C'uy + 2D'u + 2E'y + F'$$

die Coefficienten $B'$, $C'$ und $E'$ heraus und setzen dieselben der Null gleich. Es entsteht

$$\left.\begin{aligned} &\alpha) \quad A_1\alpha^3 + (A_2 + 2C_1)\alpha^2 + (B_1 + 2C_2)\alpha + B_2 = 0, \\ &\beta) \quad A_1\alpha^2 + (A_2 + C_1)\alpha \quad + C_2 = 0, \\ &\gamma) \quad D_1\alpha^2 + (D_2 + E_1)\alpha \quad + E_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

und die Elimination des $\alpha$ fordert alsdann zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung.

Die Gleichung 1) ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass sie zwei der $y$-Axe parallele Gerade

$$x = r_1 \text{ und } x = r_2$$

als particuläre Integrale besitzt, unter $r_1$ und $r_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a + 2bx + cx^2 = 0$$

verstanden. Um die Bedingungen zu finden, unter welchen der allgemeinen Gleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ zwei parallele Gerade particulär genügen, substituire man in selbige die Gleichung einer Geraden

$$x = \alpha y + \beta,$$

dann müssen, wofern dieselbe genügen soll, drei Bedingungen erfüllt sein, nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\alpha') \quad A_1\alpha^3 + (A_2 + 2C_1)\alpha^2 + (B_1 + 2C_2)\alpha + B_2 = 0, \\ &\beta') \quad [A_1\alpha^2 + (A_2 + C_1)\alpha + C_2]\beta + [D_1\alpha^2 + (D_2 + E_1)\alpha + E_2] = 0, \\ &\gamma') \quad (A_1\alpha + A_2)\beta^2 + 2(D_1\alpha + D_2)\beta + F_1\alpha + F_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Man erhält aus Gleichung $\gamma'$) zwei Werthe von $\beta$; für beide muss die Gleichung $\beta'$) bestehen, und das ist der Fall, wenn beide Klammergrössen dieser Gleichung verschwinden. Da schliesslich auch noch Gleichung $\alpha'$) zu beachten ist, so finden sich im Gleichungssystem ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$) dieselben Bedingungen wieder, als im System ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

Besitzt sonach die Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

zwei parallele Gerade als particuläre Integrale, so lässt sie sich stets durch die lineare Substitution

$$x = \alpha y + u$$

auf eine Gleichung der Form 1) bringen und als solche integriren.

Es kann sich ereignen, dass eine dieser Geraden oder auch beide ihrer ganzen Erstreckung nach in unendlicher Entfernung liegen. Ist etwa die Differentialgleichung

$$(2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1)\,dx + (2C_2 xy + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2)\,dy = 0$$

gegeben, so lautet das Gleichungssystem $(\alpha', \beta', \gamma')$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha') & C_1\alpha + C_2 = 0, \\ \beta') & D_1\alpha^2 + (D_2 + E_1)\,\alpha + E_1 = 0, \\ \gamma') & 2(D_1\alpha + D_2)\beta + F_1\alpha + F_2 = 0, \end{array}\right\}$$

woraus hervorgeht, dass eine Wurzel der Gleichung $\gamma'$) unendlich gross geworden ist. Der vorgelegten Differentialgleichung genügt daher particulär im Endlichen nur eine Gerade

$$x = \alpha y + \beta$$

wobei

$$\alpha = -\frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = -\frac{C_1 F_2 - C_2 F_1}{2(C_1 D_2 - C_2 D_1)},$$

und die Coefficienten der Gleichung sind jetzt nur an eine Bedingung

$$D_1 C_2^2 - (D_2 + E_1)\,C_2 C_1 + E_2 C_1^2 = 0$$

gebunden. Die hier auftretenden Ausnahmefälle haben keine Schwierigkeit.

Ist auch $D_1 = D_2 = E_1 = E_2 = 0$, also sind beide particuläre parallele Gerade in die Unendlichkeit gerückt, so lautet die Differentialgleichung

$$(2C_1 xy + F_1)\,dx + (2C_2 xy + F_2)\,dy = 0,$$

und diese kann bedingungslos mit Hilfe der Substitution

$$x = -\frac{C_2}{C_1} y + u$$

auf eine bereits integrirte Gleichung, nämlich

$$(C_1 F_2 - C_2 F_1)\frac{dy}{du} + C_1(F_1 + 2C_1 uy - 2C_2 y^2) = 0$$

gebracht werden. Ist etwa $F_1 = 0$, so lautet die letzte Gleichung

$$F_2 \frac{dy}{du} + 2C_1 uy - 2C_2 y^2 = 0,$$

und ihr genügt

$$const. = \frac{1}{y} e^{-\frac{C_1}{F_2}u^2} + 2\frac{C_2}{F_2}\int e^{-\frac{C_1}{F_2}u^2}\,du.$$

Mithin hat die Differentialgleichung

$$2C_1 xy\,dx + (2C_2 xy + F_2)\,dy = 0$$

folgendes Integral:

$$const. = \frac{1}{y} e^{-\frac{(C_1 x + C_2 y)^2}{C_1 F_2}} + 2 \frac{C_2}{\sqrt{C_1 F_2}} \int e^{-\omega^2} d\omega,$$

wenn

$$\omega = \frac{C_1 x + C_2 y}{\sqrt{C_1 F_2}}.$$

---

Führt man homogene Coordinaten ein, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

setzt, so geht die Differentialgleichung 1) über in

1a) $(a_{11} x_1^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{33} x_3^2)(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2) + A^2_x (x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3) = 0,$

wobei

$$A^2_x = A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 + 2 A_{12} x_1 x_2 + 2 A_{13} x_1 x_3 + 2 A_{23} x_2 x_3,$$

und diese Gleichung ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass sie drei sich in einem Punkte schneidende Gerade

$$x_3 = 0, \quad x_1 - r' x_3 = 0, \quad x_1 - r'' x_3 = 0$$

als particuläre Integrale besitzt, unter $r'$ und $r''$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a_{11} r^2 + 2 a_{13} r + a_{33} = 0$$

verstanden. Denkt man sich in die Differentialgleichung 1a) die linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \mu x_1 &= \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \alpha_{13} \xi_3 \equiv (\alpha_{1i} \xi_i) \\ \mu x_2 &= \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \alpha_{23} \xi_3 \equiv (\alpha_{2i} \xi_i) \\ \mu x_3 &= \alpha_{31} \xi_1 + \alpha_{32} \xi_2 + \alpha_{33} \xi_3 \equiv (\alpha_{3i} \xi_i) \end{aligned}\right\}$$

eingeführt, so wird offenbar eine Gleichung der Form

1b) $A^2_\xi (\xi_2\, d\xi_3 - \xi_3\, d\xi_2) + B^2_\xi (\xi_3\, d\xi_1 - \xi_1\, d\xi_3) + C^2_\xi (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) = 0$

entstehen, welche dem Connex erster Classe zweiter Ordnung entspricht und welche im Speciellen dadurch ausgezeichnet ist, dass ihr drei sich in einem Punkte schneidende Gerade

$$(\alpha_{3i} \xi_i) = 0, \quad (\alpha_{1i} \xi_i) - r'(\alpha_{3i} \xi_i) = 0, \quad (\alpha_{1i} \xi_i) - r''(\alpha_{3i} \xi_i) = 0$$

genügen. Hierdurch sieht man rückwärts Folgendes ein:

Besitzt die Gleichung 1b) drei sich in einem Punkte schneidende Gerade als particuläre Integrale, so lässt sie sich durch lineare Substitutionen, also durch eine Verlegung des Coordinatensystems in die Gleichung 1a) transformiren und ist als solche integrirbar.

---

Als eine weitere Frage drängt sich die auf, ob die Integration der Gleichung 1b) auch dann noch geleistet werden könne, wenn sich die drei particulären Geraden nicht in einem Punkte schneiden. Die erwähnte

Gleichung kann dann durch geeignete Wahl des Coordinatensystems immer auf die Form

$$(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3)x_1u_1 + (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3)x_2u_2 + (A_{31}x_1 + \dots)x_3u_3 = 0,$$

wobei

$$u_1 = \mu(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) \text{ etc.},$$

gebracht werden; geometrisch ist sie jetzt dadurch ausgezeichnet, dass ihr die drei Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

d. h. die Seiten des Coordinatendreiecks particulär genügen. Noch einfacher wird die Gleichung nach Subtraction der Identität

$$(A_{11}x_1 + A_{22}x_2 + A_{33}x_3)(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) = 0,$$

denn es entsteht

$$(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1u_1 + (a_{21}x_1 + a_{23}x_3)x_2u_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)x_3u_3 = 0$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten

$$\alpha) \qquad (a_1x + b_1y + c_1)x\,dy + (a_2x + b_2y + c_2)y\,dx = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung scheint im Allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten zu haben, denn bereits bei der Integration des nachfolgenden speciellen Falles ist man genöthigt, zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzusteigen. Es sei

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_2 &= a \\ b_1 = b_2 &= -b \end{aligned}\right\},$$

und man schreibe der Einfachheit halber für $ax$ und $by$ kurz $x$ und $y$, so dass die Differentialgleichung

$$\beta) \qquad (x - y + c_1)x\,dy + (x - y + c_2)y\,dx = 0$$

oder

$$(x - y)(x\,dy + y\,dx) + c_1x\,dy + c_2y\,dx = 0$$

vorliegt. Aus naheliegenden Gründen setze man

$$xy = z^2, \quad \frac{y}{x} = t^2, \text{ d. h. } y = tz, \quad x = \frac{z}{t},$$

dann entsteht

$$2z(1 - t^2)\,dz + c_1(t\,dz + z\,dt) + c_2(t\,dz - z\,dt) = 0$$

oder

$$(c_2 - c_1)z\frac{dt}{dz} + 2zt^2 - (c_1 + c_2)t - 2z = 0,$$

und für

$$z = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)u, \qquad c_2 - c_1 \gtrless 0$$

$$u\left(\frac{dt}{du} + t^2\right) - \frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}t - u = 0.$$

Schliesslich ergiebt die Substitution

$$t = \frac{\frac{dv}{du}}{v}$$

$$\gamma)\qquad u\frac{d^2 v}{du^2}-2n\frac{dv}{du}-uv=0,\quad 2n=\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}.$$

Lautet das Integral dieser Gleichung

$$v=k_1\,\varphi_1(u)+k_2\,\varphi_2(u),$$

so genügt der Gleichung

$$\beta)\qquad (x-y+c_1)\,x\,dy+(x-y+c_2)\,y\,dx=0,$$

weil

$$t=\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\frac{dv}{du}}{v}\quad\text{und}\quad u=\frac{2z}{c_2-c_1}=\frac{2\sqrt{xy}}{c_2-c_1},$$

folgender Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{k_1\,\varphi'_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{c_2-c_1}\right)+k_2\,\varphi'_2\left(\frac{2\sqrt{xy}}{c_2-c_1}\right)}{k_1\,\varphi_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{c_2-c_1}\right)+k_2\,\varphi_2\left(\frac{2\sqrt{xy}}{c_2-c_1}\right)},\qquad k_2:k_1=const.$$

Setzt man hierin noch beziehentlich $ax$ und $by$ für $x$ und $y$, so erhält man das Integral der Differentialgleichung

$$(ax-by+c_1)\,x\,dy+(ax-by+c_2)\,y\,dx=0.$$

Sollte eine der Zahlen $a$ oder $b$ ein anderes Vorzeichen besitzen, als angenommen wurde, so erübrigt noch, das Integral von seiner imaginären Gestalt zu befreien.

Die lineare Differentialgleichung $\gamma$) kann auf die Weiler'sche Normalform gebracht werden, sie ist indessen auch oft für sich behandelt worden. So giebt Dienger in seiner Integralrechnung § 119 folgendes Integral für diese Gleichung an:

$$v=k_1e^u\left\{u^n-\frac{n(n+1)}{1!}\frac{u^{n-1}}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!}\frac{u^{n-2}}{2^2}-\frac{(n-2)\dots(n+3)}{3!}\frac{u^{n-3}}{2^3}+\dots\right\}$$
$$+k_2e^{-u}\left\{u^n+\frac{n(n+1)}{1!}\frac{u^{n-1}}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!}\frac{u^{n-2}}{2^2}+\frac{(n-2)\dots(n+3)}{3!}\frac{u^{n-3}}{2^3}+\dots\right\},$$

welches richtig ist, wenn $n$ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Statuiren wir folgende einfache Fälle.

Es sei $n=0$, d. h. $\left.\begin{matrix}c_2=\;\;c\\ c_2=-c\end{matrix}\right\}$, unter $c$ eine gegebene Zahl verstanden. Das Integral von $\gamma$) lautet

$$v=k_1e^u+k_2e^{-u},$$

mithin ist

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{k_1e^u-k_2e^{-u}}{k_1e^u+k_2e^{-u}},\qquad u=\frac{\sqrt{xy}}{c}$$

oder

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,e^{\frac{2\sqrt{xy}}{c}}=const.$$

das Integral der Gleichung

$$(x-y-c)\,x\,dy+(x-y+c)\,y\,dx=0.$$

Es sei $n=1$, d. h. $\left.\begin{matrix} c_2=3c \\ c_1=c \end{matrix}\right\}$. Das Integral von $\gamma$ lautet

$$v=k_1 e^u(u-1)+k_2 e^{-u}(u+1),$$

mithin ist

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{(k_1 e^u-k_2 e^{-u})\,u}{k_1 e^u(u-1)+k_2 e^{-u}(u+1)},\quad u=\frac{\sqrt{xy}}{c}$$

oder

$$\frac{c+x-\sqrt{xy}}{c+x+\sqrt{xy}}\,e^{\frac{2\sqrt{xy}}{c}}=const.$$

das Integral der Gleichung

$$(x-y+c)\,x\,dy+(x-y+3c)\,y\,dx=0.$$

Es sei $n=-1$, d. h. $\left.\begin{matrix} c_2=c \\ c_1=3c \end{matrix}\right\}$. Die Gleichung $\beta$) lautet

$$(x-y+3c)\,x\,dy+(x-y+c)\,y\,dx=0,$$

sie geht aus der eben betrachteten hervor, wenn für $x$ und $y$ beziehentlich $-y$ und $-x$ geschrieben wird; mithin lautet ihr Integral

$$\frac{c-y+\sqrt{xy}}{c-y-\sqrt{xy}}\,e^{-\frac{2\sqrt{xy}}{c}}=const.$$

Ueberhaupt kann durch die erwähnte Vertauschung der Variabelen der Fall eines negativen $n$ auf den eines positiven $n$ zurückgeführt werden.

## 6. Behandlung einiger Fälle der Differentialgleichung $M\,dx+N\,dy=0$ mittelst quadratischer Substitution.

*A*. Integration von

a) $$p\frac{dp}{dy}+2\alpha py+\beta p+\gamma=0.$$

Die vorliegende Gleichung wird durch die quadratische Substitution

b) $$p=-(\alpha y^2+\beta y+\gamma x)$$

übergeführt in die Differentialgleichung

c) $$\frac{dy}{dx}+\alpha y^2+\beta y+\gamma x=0,$$

welche nach dem Früheren integrirt werden kann.

Die Richtigkeit der Behauptung wird erkannt, wenn man den Werth von $p$ aus b) in a) einführt und entsprechend ordnet. Bequemer ist es aber, die Betrachtung bei Gleichung c) anzuknüpfen. Setzt man nämlich

$$\frac{dy}{dx}=p$$

und differenzirt die Gleichung

c) $$p + \alpha y^2 + \beta y + \gamma x = 0$$

nach $x$, so entsteht, weil

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

a) $$p \frac{dp}{dy} + 2\alpha p y + \beta p + \gamma = 0.$$

Da der Kegelschnitt $(x, y)$ in Gleichung c) eine Parabel vorstellt, so hat man diese Gleichung auf dem in Abschnitt $\mathrm{III}_3$ *c)* angegebenen Wege zu integriren. Schreibt man dieselbe in der Form

$$\frac{dy}{dx} + \left(y\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \gamma x - \frac{\beta^2}{4\alpha} = 0$$

und setzt

$$y\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} = z, \quad \gamma x - \frac{\beta^2}{4\alpha} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} u,$$

so erhält man

$$\frac{dz}{du} + z^2 + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} u = 0.$$

Dieser Gleichung genügt, wie wir früher gezeigt haben,

$$\int_0^\infty \left\{ z F(u, t) - \frac{\partial F(u, t)}{\partial u} \right\} dt = 0,$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} F &= e^{-\frac{t^3}{3}} (C_1 \mu_1 e^{\mu_1 u t} + C_2 \mu_2 e^{\mu_2 u t} + C_3 \mu_3 e^{\mu_3 u t}) \\ C_1 &+ C_2 + C_3 = 0, \quad \mu^3 = -\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \right\}.$$

Substituirt man rückwärts

$$z = y\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad u = x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\gamma\sqrt{\alpha}}$$

oder wegen b)

$$u = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma}\left(p + \alpha y^2 + \beta y + \frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

so bekommt man das Integral der vorgelegten Differentialgleichung a).

*B.* Integration der Differentialgleichung

a) $$2ps\frac{dp}{ds} - p^2 + \alpha p s + 2\beta s - \gamma p = 0.$$

Aehnlich wie die vorige Gleichung kann auch diese, welche freilich den Mangel erleidet, dass der Coefficient von $p^2$ nicht allgemein ist, behandelt werden. Geht man von der integrablen Gleichung

b) $$\frac{dy}{dx} + \alpha y^2 + 2\beta x y + \gamma = 0$$

aus, setzt

$$\frac{dy}{dx} = p$$

und differenzirt nach $x$, so entsteht

c) $$p\frac{dp}{dy} + 2\alpha yp + 2\beta xp + 2\beta y = 0$$

oder, nach Elimination von $x$ aus b) und c),

$$py\frac{dp}{dy} - p^2 + \alpha py^2 + 2\beta y^2 - \gamma p = 0.$$

Hierin kann noch der dritte Grad beseitigt werden, denn für

$$y^2 = s$$

bekommt man

a) $$2ps\frac{dp}{ds} - p^2 + \alpha ps + 2\beta s - \gamma p = 0.$$

Diese Differentialgleichung wird sonach durch die quadratischen Substitutionen

$$p = -(\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma) \text{ und } s = y^2$$

übergeführt in

b) $$\frac{dy}{dx} + \alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma = 0,$$

und lautet das Integral dieser Gleichung

$$y = F(x),$$

so genügt der vorgelegten Differentialgleichung a)

$$\sqrt{s} = F\left(-\frac{p + \alpha s + \gamma}{2\beta\sqrt{s}}\right).$$

Ist beispielsweise $\alpha = 0$, liegt also vor

a′) $$2ps\frac{dp}{ds} - p^2 + 2\beta s - \gamma p = 0,$$

so lautet Gleichung b)

b′) $$\frac{dy}{dx} + 2\beta xy + \gamma = 0$$

und ihr Integral

$$const. = ye^{\beta x^2} + \gamma\int e^{\beta x^2}\, dx.$$

Da nun

$$y = \sqrt{s} \text{ und } x = -\frac{p+\gamma}{2\beta\sqrt{s}},$$

so ist das Integral von a′) in folgender Weise anzuschreiben:

$$const. = \left\{\sqrt{s}\, e^{\beta x^2} + \gamma\int e^{\beta x^2}\, dx\right\}_{x = -\frac{p+\gamma}{2\beta\sqrt{s}}}.$$

Ist in a) $\gamma = 0$, liegt also vor

a″) $$2ps\frac{dp}{ds} - p^2 + \alpha ps + 2\beta s = 0,$$

so lautet Gleichung b)

b'')
$$\frac{dy}{dx} + \alpha y^2 + 2\beta x y = 0$$
und ihr Integral
$$const. = \frac{1}{y} e^{-\beta x^2} - \alpha \int e^{-\beta x^2} dx.$$
Da nun
$$y = \sqrt{s} \text{ und } x = -\frac{p + \alpha s}{2\beta \sqrt{s}},$$
so genügt der Gleichung a'')
$$const. = \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\beta x^2} - \alpha \int e^{-\beta x^2} dx \right\}_{x = -\frac{p+\alpha s}{2\beta\sqrt{s}}}.$$

Da es uns darauf ankommt, nur Gleichungen ins Auge zu fassen, in denen die Variabelen den zweiten Grad nicht übersteigen, so ist die Anzahl der hier zu betrachtenden Fälle nicht gross. Als letzter und bemerkenswerthester Fall sei folgender mitgetheilt.

*C.* Integration der Differentialgleichung
$$(au + bv + c)\frac{dv}{du} + Au^2 + 2Cuv + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Wir gehen von der Gleichung

a)
$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \varphi(x)$$
aus, setzen wie vorhin
$$\frac{dy}{dx} = p,$$
differenziren nach $x$ und erhalten

b)
$$p\frac{dp}{dy} + 2yp = \varphi'(x).$$
Nehmen wir nun zwischen $\varphi'$ und $\varphi$ irgend eine Beziehung
$$\varphi' = F(\varphi)$$
an, so lautet a) wegen $dx = \frac{d\varphi}{F(\varphi)}$

a')
$$F(\varphi)\frac{dy}{d\varphi} + y^2 = \varphi,$$
während b) übergeht in
$$p\frac{dp}{dy} + 2yp = F(\varphi)$$
oder, weil wegen $\alpha$)
$$\varphi = p + y^2,$$

b')
$$p\frac{dp}{dy} + 2yp = F(p + y^2).$$
Diese Gleichung wird integrabel sein, sobald es a') ist. Denn genügt jener
$$y = f(\varphi),$$
so kommt der Gleichung b') das Integral
$$y = f(p + y^2)$$
zu.

Wenn wir im Speciellen verlangen, dass Gleichung b') die Variabelen nur im zweiten Grade besitzen soll, so müssen wir zwischen $\varphi'$ und $\varphi$ eine lineare Relation festsetzen. Wählen wir

$$F(\varphi) = m\varphi + n,$$

so erlangen die Gleichungen a') und b') die Gestalt

$$\text{a}'') \qquad (m\varphi + n)\frac{dy}{d\varphi} + y^2 = \varphi,$$

$$\text{b}'') \qquad p\frac{dp}{dy} + 2yp = m(p + y^2) + n.$$

Die erste lässt sich nach dem Früheren integriren; die zweite aber geht vermöge der Substitution

$$p = \varphi - y^2$$

in die erste über. Da der ersten Gleichung particulär eine Gerade

$$\varphi = -\frac{n}{m}$$

genügt, so kommt der zweiten eine Parabel

$$p = -\left(y^2 + \frac{n}{m}\right)$$

als particuläres Integral zu.

Die Gleichung b'') ist noch sehr erweiterungsfähig, denn benutzt man die linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} p &= au + bv + c \\ y &= gu + h \end{aligned}\right\},$$

so verwandelt sie sich in eine Differentialgleichung der Form

$$\beta) \qquad (au + bv + c)\frac{dv}{du} + Au^2 + 2Cuv + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Dieser Gleichung muss dann, da wir nur eine lineare Coordinatentransformation vorgenommen haben, ebenfalls eine Parabel

$$v = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$$

particulär genügen, d. h. aber, ihre Coefficienten müssen eine Bedingung erfüllen. Denn wird der Ausdruck für $v$ in $\beta$ eingeführt, so entsteht eine Gleichung von der Form

$$G_0 u^3 + G_1 u^2 + G_2 u + G_3 = 0,$$

welche identisch verschwinden soll; man hat daher

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = 0.$$

Aus dreien dieser Gleichungen berechnen sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma$; aus der vierten fliesst alsdann eine Bedingung, welcher die Coefficienten der Gleichung $\beta$) unterliegen. Weiterhin ist aber auch klar, dass, wenn diese Bedingung besteht, die Gleichung $\beta$) vermittelst der quadratischen Substitution

$$v = \alpha u^2 + \beta u + \varphi$$

in eine Gleichung übergeführt werden muss, welche von der Differentialgleichung a″) nicht wesentlich verschieden sein kann, d. h. welche durch lineare Transformation auf a″) zurückgebracht werden kann. In der That erhält man auf diesem Wege aus $\beta$) die Differentialgleichung

$$\alpha)\quad (c\beta+F+(b\beta+2E)\varphi)\frac{du}{d\varphi}+\alpha b u^2+b\varphi+(a+b\beta)u+c=0,$$

durch deren Integral

$$u=f(\varphi)$$

das Integral der vorgelegten Gleichung $\beta$) in der Form

$$u=f(v-\alpha u^2-\beta u)$$

gewonnen wird. Hierbei bestimmt sich

$$\alpha=-\frac{C}{b},\quad \beta=\frac{Ab-2(a+E)C}{bC}=\frac{A}{C}-2\frac{a+E}{b},$$

und die Bedingung lautet

$$b\beta^2+(a+2E)\beta+2(\alpha c+D)=0.$$

Dieselbe ist insbesondere erfüllt, wenn

$$a=c=0 \text{ und } A=D=0, \text{ d. h. } \beta=-\frac{2E}{b};$$

es liegt dann die auf S. 34 betrachtete Gleichung vor, welcher eine Parabel particulär genügt, deren Scheitel in der Richtung der $v$ ins Unendliche gerückt ist.

Sollte $b=0$ sein, so ist die vorige Betrachtung überflüssig; ist $C=0$, d. h. der Kegelschnitt $(u, v)$ in $\beta$ eine Parabel, so genügt dieser Differentialgleichung nie eine Parabel particulär, und das Integral kann auf diesem Wege nicht gefunden werden.

Wir brechen hiermit diese Untersuchungen ab, ohne damit sagen zu wollen, dass wir zu einem Abschlusse gekommen wären. Es ist höchst wahrscheinlich, dass noch weitere nicht erledigte Fälle der betreffenden Gleichung $M\,dx+N\,dy=0$ auf die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt werden können, und das wird immer ein Vortheil sein, da letztere Gleichungen im Allgemeinen leichter zu studiren sind. Um den natürlichen Entwickelungsgang zu wahren, haben wir die Untersuchungen des dritten Abschnittes von denen des ersten abhängig gemacht. Das ist indessen nicht nöthig, wenn man Folgendes beachtet.

Die lineare Differentialgleichung

$$\text{a)}\qquad f_0(x)\frac{d^2v}{dx^2}+f_1(x)\frac{dv}{dx}+f_2(x)v=0$$

wird durch die Substitution

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=y$$

übergeführt in die Differentialgleichung erster Ordnung

b) $$f_0(x).\left(\frac{dy}{dx}+y^2\right)+f_1(x)y+f_2(x)=0$$

und durch die reciproke negative Substitution

$$\frac{v}{\frac{dv}{dx}}=-z$$

übergeführt in

c) $$f_0(x).\left(\frac{dz}{dx}+1\right)-f_1(x)z+f_2(x)z^2=0.$$

Ist $f_0$ constant, $f_1$ linear, $f_2$ quadratisch, so stellt a) eine von Liouville integrirte Gleichung

$$a_2\frac{d^2v}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dv}{dx}+(a_0+b_0x+c_0x^2)v=0$$

dar, b) aber kommt überein mit der auf S. 22 behandelten Differentialgleichung

$$a\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0.$$

Ist $f_2$ constant, $f_1$ linear, $f_0$ quadratisch, so stellt a) die ebenfalls von Liouville behandelte Gleichung

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2v}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dv}{dx}+a_0v=0$$

dar, c) aber erlangt die Gestalt

$$(a_1+b_2x+c_2x^2)\left(\frac{dz}{dx}+1\right)-(a_1+b_1x)z+a_0z^2=0.$$

Diese Differentialgleichung ist noch im Vergleich mit

$$(a+2bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+\ldots+F=0$$

speciell, denn in derselben tritt $f_0$ zweimal auf. Allein jener Unterschied ist unwesentlich und durch lineare Coordinatentransformation hebbar (Abschnitt $III_2$). — Durch diese Bemerkungen wird der letzte Abschnitt (III) dieser Arbeit unabhängig von dem ersten Abschnitt (I).

II.

# Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe.

Von

J. Thomae,

Professor an der Universität Jena.

(Fortsetzung.)

---

## Art. IV. Zusammenhang der Lösungen.

Da zwischen je drei Lösungen einer dreigliedrigen Recursionsformel eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten statthaben muss, so bietet sich die Aufgabe dar, diese Coefficienten zu bestimmen. Die Lösung derselben ist aber auch noch nach anderer Richtung hin wichtig. Als Functionen von $n$ sind die Reihen, wenn sie überhaupt convergiren, überall convergent oder doch für gewisse specielle Werthe von $x$ in bestimmten Halbebenen. Als Functionen von $x$ definiren sie eine Function der complexen Veränderlichen $x$ unmittelbar nur in Gebieten, die entweder von einem Kreise oder von einer geraden Linie begrenzt sind. Eine der ersten und wichtigsten Fragen, die bei Untersuchung einer durch eine nicht überall convergente Reihe definirten Function nothwendig zu lösen ist, ist die: Wie setzt man die Function analytisch über das Convergenzgebiet hinaus (vergl. E. T. F. § 65) als Function einer complexen Veränderlichen fort? Diese Frage wird im vorliegenden Falle dadurch erledigt, dass der Zusammenhang zwischen den als Lösungen der Recursionsformel 18) aufgestellten, in verschiedenen Gebieten convergenten Reihen erstellt wird. Unmittelbar besteht freilich dieser Zusammenhang nur in Gebietstheilen gemeinsamer Convergenz, im Sinne der Functionentheorie besteht er aber dann allgemein.

Ehe wir zur Aufsuchung der analytischen Fortsetzung schreiten, geben wir der im Art. II unter 21) gefundenen Formel

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & \beta' & x\end{pmatrix} = F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \delta, & \delta' & x\end{pmatrix}(1-x)^{1-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'},$$
$$\delta = 1-\alpha-\alpha'-\beta, \quad \delta' = 1-\alpha-\alpha'-\beta'$$

dadurch eine etwas veränderte Gestalt, dass wir

$$x,\quad \alpha,\quad \alpha',\quad \beta,\quad \beta'$$
bez. durch $z,\quad a,\quad a',\quad b+c,\quad b'+c$

ersetzen, mit $(1-z)^c$ multipliciren und $c'$ durch die Gleichung
$$a+a'+b+b'+c+c'=1,\quad c'=1-a-a'-b-b'-c$$
bestimmen, wodurch wir die Formel gewinnen

$$31)\quad F_a\left(\begin{matrix}a, & a' \\ b+c, & b'+c\end{matrix}\; z\right)(1-z)^c = F_a\left(\begin{matrix}a, & a' \\ b+c', & b'+c'\end{matrix}\; z\right)(1-z)^{c'},$$

welche sich von der oben aufgestellten durch Symmetrie auszeichnet und uns gerade dadurch wichtige Dienste leisten wird. In Gauss' Bezeichnung nimmt sie die Form an

$$31\text{a})\qquad F(\lambda, \mu, \nu, z) = F(\nu-\lambda,\ \nu-\mu,\ \nu,\ z)(1-z)^{\nu-\lambda-\mu}.$$

Die andere in 21) enthaltene Relation
$$F_a\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\; x\right) = (-1)^a F_a\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \delta, & \beta'\end{matrix}\; \frac{x}{x-1}\right)(1-x)^{-\beta'}$$
liefert schon eine Fortsetzung, und wir schreiben dieselbe in der oben eingeführten Bezeichnung in drei Formen ebenfalls hierher, um sie zur Hand zu haben.

$$32)\quad (1-z)^c F_a\left(\begin{matrix}a, & a' \\ b+c, & b'+c\end{matrix}\; z\right) = (-1)^a (1-z)^{-b} F_a\left(\begin{matrix}a, & a' \\ b+c, & b+c'\end{matrix}\; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$32\text{a})\quad z^a F_c\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b'+a\end{matrix}\; 1-z\right) = (-1)^c z^{-b} F_c\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b+a'\end{matrix}\; 1-\frac{1}{z}\right),$$

$$32\text{b})\quad F_b\left(\begin{matrix}b, & b' \\ a, & a'\end{matrix}\; \frac{1}{z}\right) = (-1)^b \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-a} F_b\left(\begin{matrix}b, & b' \\ a, & 1-a'-b-b'\end{matrix}\; \frac{1}{1-z}\right).$$

Unter den dreigliedrigen Formeln, welche weiter den Zusammenhang vermitteln, sind diejenigen die wichtigsten und elegantesten, in denen zwei Reihen wenigstens dasselbe letzte Element besitzen. — Die übrigen würden aus diesen durch Elimination zu erlangen sein. — Diese Formeln sind aber im Grunde in einer einzigen enthalten oder lassen sich aus dieser einen durch blosse Buchstabenvertauschungen und durch die oben angesetzten Transformationen sofort ableiten. Diese Formel lautet

$$33)\qquad (1-z)^c F_a\left(\begin{matrix}a, & a' \\ b+c, & b'+c\end{matrix}\; z\right)$$
$$= a_c z^a F_c\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b'+a\end{matrix}\; 1-z\right) + a_{c'} z^a F_{c'}\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b'+a\end{matrix}\; 1-z\right),$$

$$a_c = \frac{fac(a-a')\, fac(c'-c-1)}{fac(-a'-b'-c)\, fac(-a'-b-c)},\quad a_{c'} = \frac{fac(a-a')\, fac(c-c'-1)}{fac(-a'-b'-c')\, fac(-a'-b-c')}.$$

Die rechte Seite ist in Bezug auf $c$, $c'$ symmetrisch, die linke wegen 31) auch. Vertauscht man $a$ mit $a'$, so gehen die Coefficienten $a_c$, $a_{c'}$ bez. in $a'_c$, $a'_{c'}$ über, und man erhält dieselben aus $a_c$ und $a_{c'}$ eben durch blosse Buchstabenvertauschung.

Die Reihen in 33) haben ein zweidimensionales endliches Stück Convergenzgebiet in Bezug auf das letzte Element mit einander gemein, das Kreiszweieck, in welchem $abs\, z$ und $abs(1-z)$ gleichzeitig kleiner als Eins ist; in dem nicht gemeinsamen Theile bildet daher die rechte Seite die analytische Fortsetzung der durch die linke Seite definirten Function. Es könnte scheinen, als ob hiervon wesentlich verschieden die Formel sei

$$34)\qquad (1-z)^c F_a\begin{pmatrix} a, & a' & \\ b+c, & b'+c & z\end{pmatrix}$$
$$= a_b(-1)^{a+b}\left(1-\frac{1}{z}\right)^c F_b\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{z} \\ a+c, & a'+c & \end{pmatrix}$$
$$+ a_{b'}(-1)^{a+b'}\left(1-\frac{1}{z}\right)^c F_{b'}\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{z} \\ a+c, & a'+c & \end{pmatrix},$$

$$a_b = \frac{fac(a-a')\, fac(b'-b-1)}{fac(-a'-b-c')\, fac(-a'-b-c)},\quad a_{b'} = \frac{fac(a-a')\, fac(b-b'-1)}{fac(-a'-b'-c')\, fac(-a'-b'-c)},$$

weil darin rechts und links Reihen auftreten, deren Convergenzgebiete sich ausschliessen, oder doch, in speciellen Fällen, nur längs einer Kreislinie zusammenfallen. Allein diese Formel, welche ja nur den Sinn haben kann, dass ihre rechte Seite die analytische Fortsetzung der linken in Bezug auf $z$ ist, steht doch zu der Formel 33) in naher Verwandtschaft, so dass sie mit Leichtigkeit aus ihr abgeleitet werden kann. Wendet man nämlich auf die linke Seite der Formel 33) die Transformation 32) an, auf die rechte Seite die Transformation 32a), so folgt

$$35)\qquad (-1)^a(1-z)^{-b} F_a\begin{pmatrix} a, & a' & \frac{z}{z-1} \\ b+c, & b+c' & \end{pmatrix}$$
$$= a_c(-1)^c z^{-b} F_c\begin{pmatrix} c, & c' & \frac{1-z}{z} \\ b+a, & b+a' & \end{pmatrix} + a_{c'}(-1)^{c'} z^{-b} F_{c'}\begin{pmatrix} c, & c' & \frac{1-z}{z} \\ b+a, & b+a' & \end{pmatrix},$$

und man braucht hier nur die Buchstaben $b$ mit $c$, $b'$ mit $c'$ zu vertauschen und $\frac{z}{z-1}$ durch $z$, also $z$ durch $1-\frac{1}{z}$, $1-z$ durch $1:(1-z)$ zu ersetzen, um zur Formel 34) zu gelangen, die für $c=0$ die Gestalt annimmt

$$35\text{a})\cdot F_a\begin{pmatrix} a, & a' & \\ b, & b' & z\end{pmatrix} = \frac{(-1)^{a+b}\, fac(a-a')\, fac(b-b'-1)}{fac(a+b'-1)\, fac(-a'-b)} F_b\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{z} \\ a, & a' & \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{(-1)^{a+b'}\, fac(a-a')\, fac(b-b'-1)}{fac(a+b-1)\, fac(-a'-b')} F_{b'}\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{z} \\ a, & a' & \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir in 34) für $F_b$, $F_{b'}$ bez.

$$F_b\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{1-z} \\ a+c, & a+c' & \end{pmatrix}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-a-c}(-1)^b,$$
$$F_{b'}\begin{pmatrix} b, & b' & \frac{1}{1-z} \\ a+c, & a+c' & \end{pmatrix}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-a-c}(-1)^{b'}$$

und ersetzen bez.

$$1-z,\quad a,\quad a',\quad b,\quad b',\quad c,\quad c'$$
durch $z,\quad c,\quad c',\quad b,\quad b',\quad a,\quad a',$

so fliesst daraus die Gleichung

36)
$$z^a F_c\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b+a'\end{matrix}, 1-z\right)$$
$$= c_b\,(-1)^c\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-c} F_b\left(\begin{matrix}b, & b' \\ c+a, & c+a'\end{matrix}\, \frac{1}{z}\right)$$
$$+ c_{b'}\,(-1)^c\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-c} F_{b'}\left(\begin{matrix}b, & b' \\ c+a, & c+a'\end{matrix}\, \frac{1}{z}\right),$$
$$c_b = \frac{fac(c-c')\,fac(b'-b-1)}{fac(-a'-b-c')\,fac(-a-b-c')},\quad c_{b'} = \frac{fac(c-c')\,fac(b-b'-1)}{fac(-a'-b'-c')\,fac(-a-b'-c')},$$

für deren linke Seite auch
$$(-1)^c z^{-b} F_c\left(\begin{matrix}c, & c' \\ b+a, & b+a'\end{matrix}, 1-\frac{1}{z}\right)$$
geschrieben werden kann.

Betrachtet man in der Formel 33) $a_c$ und $a_{c'}$ als Unbekannte, so ist eine dieser Grössen durch die andere bestimmt. Da nämlich die linke Seite ungeändert bleibt, wenn man $c$ mit $c'$ vertauscht, so muss auch die rechte ungeändert bleiben, was nur möglich ist, wenn $a_{c'}$ aus $a_c$ durch blosse Vertauschung der Buchstaben $c$ und $c'$ erhalten wird. Es wird demnach genügen, eine dieser Grössen, etwa $a_c$ aufzusuchen. Um sie zu bestimmen, suchen wir den Zusammenhang zwischen drei aus 25), 26) und 24) entnommenen Lösungen der Recursionsformel 18), die Gleichung ansetzend
$$\frac{(1-x)^{-n} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\beta)} F_{-b}\left(\begin{matrix}-\beta, & -n \\ 1-\alpha, & 1-\alpha'\end{matrix}\, \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{p(n)\,fac(n+\alpha'-1)\,x^{-n-\beta}}{fac(n-\delta)} F_{-\delta}\left(\begin{matrix}-\delta, & -n \\ 1-\alpha, & 1-\alpha'\end{matrix}, 1-\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{p'(n)\,fac(n-\delta-1)(1-x)^{-n}}{fac(n+\alpha-1)} F_\delta\left(\begin{matrix}\delta, & n \\ \alpha, & \alpha'\end{matrix}, 1-\frac{1}{x}\right),$$
worin $\delta = 1-\alpha-\alpha'-\beta$ ist, und $p(n)$, $p'(n)$ periodische Functionen sind, deren Werthe zunächst unbekannt sind. — Diese Gleichung multipliciren wir mit $(1-x)^n fac(n-\beta) : fac(n+\alpha'-1)$, schreiben $z$ für $1:x$ und ersetzen $n$ durch $n+w$, unter $w$ eine ganze positive Zahl verstehend, so dass $p(n+w) = p(n)$, $p'(n+w) = p'(n)$ ist. Hierdurch erhalten wir die Relation
$$F_{-\beta}\left(\begin{matrix}-\beta, & -n-w \\ 1-\alpha, & 1-\alpha'\end{matrix}\, z\right)$$
$$= \frac{p(n)\,fac(n-\beta+w)(z-1)^{n+w}}{fac(n-\delta+w)\,z^{n+w}} F_{-\delta}\left(\begin{matrix}-\delta, & -n-w \\ 1-\alpha, & 1-\alpha'\end{matrix}\, 1-z\right)$$
$$+ \frac{p'(n)\,fac(n-\beta+w)\,fac(n-\delta-1+w)}{fac(n+\alpha+w-1)\,fac(n+\alpha'+w-1)} F_\delta\left(\begin{matrix}\delta, & n+w \\ \alpha, & \alpha'\end{matrix}\, 1-z\right).$$

In dieser Gleichung kann man unter der Voraussetzung, dass gleichzeitig $abs\, z$, $abs(1-z)$ und $abs((z-1):z)$ kleiner als Eins ist, welche Bedingungen in einem endlichen zweidimensionalen, von einem Kreisbogen und einer Geraden begrenzten Gebiete erfüllt sind, die ganze positive Zahl $w$ über alle Grenzen wachsen lassen, wodurch die linke Seite in $z^{-\beta}$ übergeht. Der mit $p(n)$ multiplicirte Ausdruck geht nach 3) bei diesem Grenzübergange in Null über, selbst dann, wenn $fac(n-\beta+w):fac(n-\delta+w)$ unendlich werden sollte, weil dies in der Ordnung $w^{\delta-\beta}$ geschieht, während $(z-1)^w:z^w$ viel rascher unendlich klein wird; der mit $p'(n)$ multiplicirte Ausdruck geht in $(1-z)^\delta$ über, so dass sich ergiebt

$$p'(n) = z^{-\beta}(1-z)^{1-\alpha-\alpha'-\beta}.$$

Nun werde $a$ für $-\beta$, $a'$ für $-n$, $b+c$ für $1-\alpha$, $b'+c$ für $1-\alpha'$, $c'-c$ für $\beta+n+\alpha+\alpha'-1$, 0 für $w$, $Xz^{a'}:(1-z)^{a'}$ für $p(n)\,fac(n-\beta):fac(n-\delta)(z-1)^n$ gesetzt, wodurch

$$\delta = 1-\alpha-\alpha'-\beta \text{ in } b+b'+2c+a-1 = c-a'-c',$$

$$z^{-n} F_{-\delta}\begin{pmatrix} -\delta, & -n \\ 1-\alpha, & 1-\alpha' \end{pmatrix} 1-z$$

in

$$z^{a'} F_{c'+a'-c}\begin{pmatrix} c'+a'-c, & a \\ b+c, & b'+c \end{pmatrix} 1-z = (1-z)^{a'-c} z^{a'} F_{c'}\begin{pmatrix} c', & c \\ b+a', & b'+a' \end{pmatrix} 1-z$$

$$= (1-z)^{a'-c} z^{a} F_{c'}\begin{pmatrix} c, & c' \\ b+a, & b'+a \end{pmatrix} 1-z,$$

$$p'(n) F_\delta\begin{pmatrix} \delta, & n \\ \alpha, & \alpha' \end{pmatrix} 1-z \text{ in } z^a(1-z)^{-c} F_c\begin{pmatrix} c, & c' \\ b+a, & b'+a \end{pmatrix} 1-z$$

und

$$\frac{fac(n-\beta)\,fac(n-\delta-1)}{fac(n+\alpha-1)\,fac(n+\alpha'-1)} \text{ in } a_c = \frac{fac(a-a')\,fac(c'-c-1)}{fac(-a'-b-c)\,fac(-a'-b'-c)}$$

übergeht.

Endlich werde noch mit $(1-z)^c$ multiplicirt, so gelangt man zu der Gleichung

$$\text{33)} \quad (1-z)^c F_a\begin{pmatrix} a, & a' \\ b+c, & b'+c \end{pmatrix} z$$

$$= a_c z^a F_c\begin{pmatrix} c, & c' \\ b+a, & b'+a \end{pmatrix} 1-z + X z^a F_{c'}\begin{pmatrix} c, & c' \\ b+a, & b'+a \end{pmatrix} 1-z,$$

aus welcher sich nun von selbst ergiebt, dass $X = a_{c'}$ ist. — Die so erwiesene Gleichung unterliegt zunächst der beschränkenden Voraussetzung, dass zugleich $abs\, z$, $abs(1-z)$ und $abs(1-z):z$ kleiner als Eins sein soll. Diese Voraussetzung kann jedoch fallen gelassen werden, weil eine analytische Function einer complexen Veränderlichen nur auf eine Weise als solche stetig fortgesetzt werden kann.

Aus den aufgestellten Formeln ergiebt sich nun der Zusammenhang zwischen drei Lösungen der Recursionsformel 18) durch blosse Buchstabenvertauschungen und durch Anwendung von 30). Ersetzt man z. B.

$$\begin{matrix} z, & a, & a', & b, & b', & c, & c' \end{matrix}$$

bez. durch $x$, $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $n$, $o$, $\delta-n$, $\delta=1-\alpha-\alpha'-\beta$, so hat man aus 33)

$$37)\qquad F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & n & x\end{pmatrix}$$

$$=\frac{x^\alpha(1-x)^{-n}fac(\alpha-\alpha')\,fac(\delta-n-1)}{fac(-\alpha'-n)\,fac(-\alpha'-\beta)}F_n\begin{pmatrix}n, & \delta & \\ \alpha+\beta-n, & \alpha & 1-x\end{pmatrix}$$
$$+\frac{x^\alpha(1-x)^{-n}fac(\alpha-\alpha')\,fac(n-\delta-1)}{fac(\alpha+\beta)\,fac(\alpha+n-1)}F_\delta\begin{pmatrix}n, & \delta & \\ \alpha+\beta-n, & \alpha & 1-x\end{pmatrix},$$

wodurch die Lösungen 21), 26) und 24) mit einander verbunden sind. Vertauscht man hierin $\alpha$ mit $\alpha'$ und multiplicirt nachher mit $fac(n+\alpha'-1):fac(n+\alpha-1)$, so wird 22) mit 26) und 24) verbunden. Ersetzt man in 34) die $z$, $a$, $a'$, ... durch dieselben Buchstaben wie oben, so erhält man die Gleichung

$$38)\quad F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & n & x\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{\alpha+\beta}fac(\alpha-\alpha')\,fac(n-\beta-1)}{fac(-\alpha'-\beta)\,fac(\alpha+n-1)}F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix}$$
$$+\frac{(-1)^{\alpha+n}fac(\alpha-\alpha')\,fac(\beta-n-1)}{fac(-\alpha'-n)\,fac(\alpha+\beta-1)}F_n\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix},$$

wodurch die Lösungen 21), 23) und 25) mit einander verbunden sind. Vertauscht man darin $\alpha$ mit $\alpha'$ und multiplicirt mit $fac(n+\alpha'-1)$: $fac(n+\alpha-1)$, so erhält man die Gleichung, welche 22) mit 24) und 25) verbindet. Nimmt man endlich dieselbe Buchstabenvertauschung mit der Gleichung 36) vor, so erhält man die Beziehung

$$39)\quad x_\alpha F_0\begin{pmatrix}0, & \delta-n & \\ \beta+\alpha, & n+\alpha & 1-x\end{pmatrix}=x^\alpha(1-x)^{-n}F_n\begin{pmatrix}n, & \delta & \\ \alpha+\beta-n, & \alpha & 1-x\end{pmatrix}$$
$$=\frac{fac(n-\delta)\,fac(n-\beta-1)}{fac(n+\alpha-1)\,fac(n+\alpha'-1)}F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix}$$
$$+\frac{fac(n-\delta)\,fac(\beta-n-1)}{fac(\alpha+\beta-1)\,fac(\alpha'+\beta-1)}F_n\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix}.$$

Nach Multiplication mit $fac(n+\alpha'-1):fac(n-\delta)$ bildet diese Gleichung die Verbindung zwischen den Lösungen 26), 23) und 25).

Durch ähnliche Manipulationen erhält man sämmtliche den Zusammenhang zwischen drei Lösungen vermittelnde Formeln, die also in der That alle aus der einen Formel 33) gefolgert werden können.

Wir bedienen uns dieser Formeln, um einen Grenzwerth zu ermitteln, der direct nicht leicht gefunden werden kann. Wir fragen nämlich, welcher Grenze sich der Ausdruck nähert

$$F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix},$$

wenn die ganze Zahl $w$ positiv oder negativ über alle Grenzen wächst. Ist zugleich $abs\,z<1$ und $abs(1-z)<1$ und ist $c'=1-a-a'-b-b'$, so hat man

$$F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{z^a\, fac(a-a')\, fac(c'-w-1)}{fac(-a'-b)\, fac(-a'-b'-w)} F_0\begin{pmatrix}0, & c'-w & \\ a+b, & a+b'+w & 1-z\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{z^a (1-z)^{c'-w} fac(a-a')\, fac(w-c'-1)}{fac(a+b-1)\, fac(a+b'+w-1)} F_0\begin{pmatrix}0, & c'+w-1 & \\ 1-a'-b, & 1-a'-b'-w & 1-z\end{pmatrix}.$$

Die Reihen der rechten Seite nähern sich, gleichviel ob $w$ positiv oder negativ über alle Grenzen wächst, bestimmten Grenzwerthen, nur darf $c'$ nicht eine ganze positive oder negative Zahl sein, und muss auch noch $abs(z:(z-1)) < 1$ sein. Und zwar sind diese Grenzwerthe

$$\lim F_0\begin{pmatrix}0, & c'-w & \\ a+b, & a+b'+w & 1-z\end{pmatrix} = z^{-a-b},$$

$$\lim F_0\begin{pmatrix}0, & c'+w-1 & \\ 1-a'-b, & 1-a'-b'-w & 1-z\end{pmatrix} = z^{a'+b-1}.$$

Wird nun $w$ negativ unendlich gross, so wird auf der rechten Seite das Glied, welches den Factor $(1-z)^{-w}$ enthält, Null, auch wenn der reelle Theil von $c'-a-b<0$ sein sollte, in welchem Falle der Facultätenfactor wie eine Potenz von $w$ unendlich gross wird. Somit erhält man den Grenzwerth

$$\text{40)}\qquad \lim_{w=-\infty} (-w)^{a+b} F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix} = \frac{z^{-b} fac(a-a')}{fac(-a'-b)}.$$

Wächst $w$ positiv über alle Grenzen, so findet man den Grenzwerth

$$\text{40a)}\quad \lim_{w=+\infty} w^{1-a'-b}(1-z)^w F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix} = \frac{(1-z)^{c'} fac(a-a')}{fac(a+b-1)\, z^{1-a-a'-b}}.$$

Aus der Formel

$$\text{41)}\qquad F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b' & z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{z^a (1-z)^{-a-b} fac(a-a')\, fac(b'-b-1)}{fac(-a'-b)\, fac(a+b'-1)} F_0\begin{pmatrix}0, & b'-b & \frac{1}{1-z} \\ a+b, & 1-a'-b' & \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{z^a (1-z)^{-a-b'} fac(a-a')\, fac(b-b'-1)}{fac(a+b-1)\, fac(-a'-b')} F_0\begin{pmatrix}0, & b-b' & \frac{1}{1-z} \\ 1-a'-b, & a+b' & \end{pmatrix}$$

erkennt man in ähnlicher Weise, dass, wenn $abs\, z < 1$, $abs\, 1-z > 1$ ist, sich die Verhältnisse umkehren, dass

$$\text{40b)}\quad \lim_{w=-\infty} (1-z)^w (-w)^{1-a'-b} F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix} = \frac{(1-z)^{c} fac(a-a')}{z^{1-a-a'-b} fac(a+b-1)},$$

$$\text{40c)}\qquad \lim_{w=+\infty} w^{a+b} F_a\begin{pmatrix}a, & a' & \\ b, & b'+w & z\end{pmatrix} = \frac{z^{-b'} fac(a-a')}{fac(-a'-b)}$$

ist.

### Art. V. Die hypergeometrische Reihe als Function ihres letzten Elements.

Wir sind zu einer Anzahl hypergeometrischer Reihen gelangt und zu Relationen zwischen je dreien, indem wir von einer Recursionsformel

ausgingen, welcher jene Reihen genügen. Als Lösungen jener Formel sind sie als Facultätenreihen anzusehen, und wenn man in $F(\lambda, \mu, \nu, x)$ oder in $F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right)$ $x$ als letztes Element bezeichnet, so tritt dies bei unseren bisherigen Untersuchungen als Parameter auf, während die Veränderliche ($n$) in die früheren Elemente $\lambda$, $\mu$, $\nu$ eingeht. Die bisher erlangten Eigenschaften werden jedoch hinreichen, die hypergeometrische Reihe als Function ihres letzten Elements vollständig zu definiren und ihren Verlauf zu charakterisiren. Um dies zu thun, verstehen wir unter

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right)$$

den zwei willkürliche Constanten enthaltenden Ausdruck

$$A F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right) + A' F_{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right)$$

und die gesammte analytische Fortsetzung derselben.

Hieraus fliessen sofort mit Rücksicht auf die im vorigen Artikel in Bezug auf Fortsetzung erzielten Sätze zwölf Transformationen. Es ist nämlich

$$42)\quad F\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right) = (1-x)^{\gamma'} F\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & 1-\alpha-\alpha'-\beta'\end{matrix}\ x\right)$$

$$= (1-x)^{-\beta'} F\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & \beta'\end{matrix}\ \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-\beta} F\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & 1-\alpha-\alpha'-\beta'\end{matrix}\ \frac{x}{1-x}\right)$$

$$= F\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ \alpha, & \alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{x}\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma'} F\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ 1-\beta-\beta'-\alpha, & 1-\beta-\beta'-\alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha'} F\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ 1-\beta-\beta'-\alpha, & \alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{1-x}\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} F\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ \alpha, & 1-\beta-\beta'-\alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\alpha} F\left(\begin{matrix}0, & \gamma' \\ \alpha+\beta, & \alpha+\beta'\end{matrix}\ 1-x\right) = x^{\alpha'} F\left(\begin{matrix}0, & \gamma' \\ \alpha'+\beta, & \alpha'+\beta'\end{matrix}\ 1-x\right)$$

$$= x^{-\beta} F\left(\begin{matrix}0, & \gamma' \\ \beta+\alpha, & \beta+\alpha'\end{matrix}\ 1-\frac{1}{x}\right) = x^{-\beta'} F\left(\begin{matrix}0, & \gamma' \\ \beta'+\alpha, & \beta'+\alpha'\end{matrix}\ 1-\frac{1}{x}\right),$$

$$\gamma' = 1-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'.$$

Bei Gebrauch dieser Gleichungen ist zu beachten, dass in jedem ihrer Glieder willkürliche Constanten enthalten sind und dass, wenn diese in irgend einem Gliede gegeben sind, dieselben durch die Gleichungen 42) in allen Gliedern derselben bestimmt sind. D. h., soll die Gleichheit bestehen, so muss über die Constanten passend verfügt werden. Setzt man z. B.

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta'\end{matrix}\ x\right) = A F_\alpha\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right) + A' F_{\alpha'}\left(\begin{matrix}\alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta'\end{matrix}\ x\right)$$

$$= B F_\beta\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ \alpha, & \alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{x}\right) + B' F_{\beta'}\left(\begin{matrix}\beta, & \beta' \\ \alpha, & \alpha'\end{matrix}\ \frac{1}{x}\right),$$

so ist

$$B = A\alpha_\beta + A'\alpha'_\beta, \quad B' = A\alpha_{\beta'} + A'\alpha'_{\beta'}$$

zu setzen, wo $\alpha_\beta$, $\alpha'_\beta$, $\alpha_{\beta'}$, $\alpha'_{\beta'}$ aus den unter 34) stehenden Grössen $a_b$, $a'_b$, $a_{b'}$, $a'_{b'}$ dadurch zu erhalten sind, dass dort $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$ bez. durch $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, 0, $\gamma'$ ersetzt werden.

In den Gleichungen, in denen hypergeometrische Reihen mit gleichem letztem Elemente stehen, sind die Constanten dieselben, und geht $x$ in $\frac{x}{x-1}$ oder $\frac{1}{x}$ in $\frac{1}{1-x}$ oder $1-x$ in $1-\frac{1}{x}$ über, so unterscheiden sich die Constanten nur durch Einheitswurzeln.

Da die Reihen theilweise unbrauchbar werden, wenn eine oder mehrere der Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ ganze positive oder negative Zahlen sind, so wollen wir diesen Fall hier ausschliessen, er würde als Grenzfall zu behandeln sein.

Eine andere Transformation der hypergeometrischen Reihe fliesst aus der Gleichung 30), nämlich die:

$$F\begin{pmatrix}\alpha+\mu, & \alpha'+\mu & \\ \beta-\mu, & \beta'-\mu & x\end{pmatrix} = x^\mu F\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & \beta' & x\end{pmatrix}.$$

An singulären Stellen besitzt die hypergeometrische Function drei, nämlich die Stellen

$$x = 0, \quad x = \infty, \quad x = 1,$$

sonst hat sie überall den Charakter einer ganzen Function.

Wir erweisen diesen Satz folgendermassen. Von den gefundenen zwölf Darstellungen der hypergeometrischen Function durch hypergeometrische Reihen giebt es für jeden Werth $x_0$ von $x$ immer mindestens eine, welche absolut convergent ist und sich demnach nach ganzen Potenzen von $x-x_0$ entwickeln lässt, mit Ausnahme von fünf Werthen oder fünf Stellen.

An der singulären Stelle $x=0$ lässt sich die Function auf die Form bringen oder ist von vornherein in der Form gegeben

$$AF_\alpha + A'F_{\alpha'},$$

worin $x^{-\alpha}F_\alpha$, $x^{-\alpha'}F_{\alpha'}$ in der Umgebung des Punktes Null den Charakter ganzer Functionen haben und für $x=0$ nicht verschwinden.

An der singulären Stelle $x=\infty$ wird der Charakter der Function dadurch bestimmt, dass sie in der Form darstellbar ist

$$BF_\beta + B'F_{\beta'},$$

worin $x^\beta F_\beta$, $x^{\beta'}F_{\beta'}$ Functionen sind, die in der Umgebung des Punktes $\infty$ den Charakter ganzer Functionen haben, das will sagen, die nach ganzen absteigenden Potenzen von $x-x_0$ ($x_0$ beliebig) entwickelt werden können. Sie haben ausserdem die Eigenschaft, für $x=\infty$ nicht zu verschwinden.

An der singulären Stelle $x=1$ lässt sich die hypergeometrische Function auf die Form bringen

$$C F_\gamma + C' F_{\gamma'},$$

worin $(1-x)^{-\gamma} F_\gamma$, $(1-x)^{-\gamma'} F_{\gamma'}$ für $x=1$ den Charakter ganzer Functionen haben und von Null verschieden sind. Dabei ist der Buchstabe $\gamma$ gleich Null, so dass ein Theil der Darstellung schon an sich den Charakter einer ganzen Function besitzt, ohne dass er erst mit einer Potenz von $(1-x)$ multiplicirt zu werden brauchte. Die Bezeichnung dieses Theiles durch $F_\gamma$ mag aber, immer unter der Voraussetzung $\gamma=0$, auch weiter angewandt werden, weil dadurch an Symmetrie gewonnen wird.

Zwischen den Exponenten $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ besteht die Beziehung

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

Der vierte und fünfte Punkt, welcher noch betrachtet werden muss, sind die Punkte

$$x=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\tfrac{1}{3}\pi+i\sin\tfrac{1}{3}\pi, \quad x=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

welche auf der Begrenzung, aber nicht im Innern der Convergenzgebiete sämmtlicher die Function darstellenden hypergeometrischen Reihen liegen, weil für diese Werthe

$$\begin{aligned} abs\, x = abs(1:x) = abs(1-x) &= abs\left(1-\frac{1}{x}\right) \\ &= abs(x:(x-1)) \\ &= abs(1:(1-x)) \end{aligned}$$

ist. Diese Punkte bilden jedoch keine singulären Stellen, sondern es lässt sich die hypergeometrische Function in ihnen in eine Potenzreihe entwickeln, wie man hier am kürzesten aus der im Art. III zur Erlangung des Grenzwerthes 28) aufgestellten Reihe erkennt, welche nach Potenzen von $(1-\sqrt{1-x}):(1+\sqrt{1-x})$ fortschreitet und an jener Stelle absolut convergirt (vergl. E. T. F. § 68).

Unter einem Zweige der hypergeometrischen Function versteht man eine eindeutige Function, welche dadurch erhalten wird, dass man die Function in einem Punkte $x_0$ nach Potenzen von $x-x_0$ entwickelt, und für die willkürlichen Constanten bestimmte Werthe eingesetzt denkt, und dass man diese Reihe analytisch durch die $x$-Ebene fortsetzt, ohne eine die Punkte $0$, $1$, $\infty$ verbindende gerade Linie $l$ zu überschreiten. Zu neuen Zweigen gelangt man dadurch, dass man die Function stetig über einen Theil der Linie $l$, zwischen $0$ und $1$ oder zwischen $1$ und $\infty$, vom positiven zum negativen Ufer oder umgekehrt fortsetzt, und zwar gelangt man dabei im Allgemeinen auch dann noch zu unendlich vielen verschiedenen Zweigen, wenn man den willkürlichen Constanten feste Werthe zuertheilt hat. In welcher Beziehung diese Zweige zu einander stehen, wird im nächsten Artikel näher untersucht werden. Als positives Ufer der Linie $l$ bezeichnen wir dasjenige, welches für die Richtung $0 \dots 1 \dots \infty$ zur Linken liegt.

In welchem Punkte $x_0$ ein Zweig auch gegeben sein mag, er lässt sich allemal, entweder direct oder durch Fortsetzung, auf die Form

$$A F_\alpha + A' F_{\alpha'}$$

bringen, weshalb wir annehmen wollen, dass er in dieser Form gegeben sei und dass $A$, $A'$ bestimmte Zahlen seien. Letztere Werthe reichen jedoch zur vollen Bestimmung des Zweiges nicht aus, weil $F_\alpha$, $F_{\alpha'}$ für sich in der Umgebung des Punktes 0 im Allgemeinen unendlich-vieldeutig sind. — Es müssen noch, da $F_\alpha = x^\alpha G(x)$, $F_{\alpha'} = x^{\alpha'} G'(x)$ ist, wo $G$, $G'$ den Charakter ganzer Functionen für $x=0$ haben, die Zweigwerthe von $x^\alpha$, $x^{\alpha'}$ bestimmt werden.

Wir nehmen an, dass auf dem positiven Ufer der Linie $l$

$$x^\alpha = e^{\alpha\, lg\, x}, \quad x^{\alpha'} = e^{\alpha' lg\, x}$$

und $lg\, x$ reell sei. Dann ist $F_\alpha$, $F_{\alpha'}$ auf dem negativen Ufer von $l$ bez. $e^{2\alpha i\pi}$-, $e^{2\alpha' i\pi}$-mal so gross, als auf dem positiven. Ferner wollen wir annehmen, dass der Factor $(1-x)^{\gamma'}$ in $F_{\gamma'}$ auf dem obern Ufer von $l$ zwischen 0 und 1 gleich $e^{\gamma' lg(1-x)}$ und $lg(1-x)$ reell sei. Endlich sollen auf dem positiven Ufer von $l$ die Factoren $x^{-\beta}$, $x^{-\beta'}$ in $F_\beta$, $F_{\beta'}$ bez. die Werthe

$$e^{-\beta\, lg\, x}, \quad e^{-\beta' lg\, x}$$

haben und $lg\, x$ soll dort reell sein. Für negativ reelle $x$ haben dann diese Factoren, die Logarithmen reell genommen, bez. die Werthe

$$e^{-\beta i\pi - \beta\, lg(-x)}, \quad e^{-\beta' i\pi - \beta' lg(-x)}.$$

Alle Relationen, welche hier aufgestellt werden, sollen zur Voraussetzung haben, dass auf dem obern Ufer von $l$ die Potenzen $x^\alpha$, $x^{\alpha'}$, $x^{-\beta}$, $x^{-\beta'}$, $(1-x)^{\gamma'}$ die eben bestimmten Werthe haben.

Nach diesen Festlegungen sind wir im Stande, die Bedeutung der früher in etwas unbestimmter Form gelassenen Factoren $(-1)^{\alpha+\beta}$ etc. in $\alpha_\beta$, $\alpha_{\beta'}$ etc. genauer zu prüfen.

Nehmen wir die Exponenten $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, also auch $\gamma'$ einen Moment als reell und ausserdem $\gamma'$ als positiv an, so ist

$$F_\alpha = \alpha_\gamma x^\alpha F_0\begin{pmatrix}0, & \gamma' & \\ \alpha+\beta, & \alpha+\beta' & 1-x\end{pmatrix} + \alpha_{\gamma'} x^\alpha F_{\gamma'}\begin{pmatrix}0, & \gamma' & \\ \alpha+\beta, & \alpha+\beta' & 1-x\end{pmatrix},$$

und für $x=1$, weil $e^{\alpha\, lg\, x}$ auf dem obern Ufer von $l$ dort gleich Eins ist, nach 10)

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & \beta' & 1\end{pmatrix} = \alpha_\gamma = \frac{fac(\alpha-\alpha')\, fac(\gamma'-1)}{fac(-\alpha'-\beta)\, fac(-\alpha'-\beta')}.$$

Es ist also dem früher [33)] für $\alpha_\gamma$ gefundenen Werthe nichts hinzuzufügen. Ebenso ist $\alpha_{\gamma'}$ richtig bestimmt, weil in der Gleichung

$$F_\alpha = \alpha_\gamma x^\alpha F_\gamma + \alpha_{\gamma'} x^\alpha F_{\gamma'}$$

für Werthe von $x$ zwischen 0 und 1 die linke Seite, so wie das erste Glied der rechten und der Factor $x^\alpha F_{\gamma'}$ reell sind. Es muss demnach auch $\alpha_{\gamma'}$ reell sein, wie es der gefundene Werth wirklich ist.

Der Factor, der noch etwa hätte hinzutreten können, würde aus der Vieldeutigkeit von $x^\alpha$ und $(1-x)^{\gamma'}$ entspringen und daher von der Form

$$e^{2(m\alpha+n\gamma')i\pi}$$

sein, wo $m$ und $n$ beliebige ganze Zahlen sind. Dieser Factor ist im Allgemeinen nur reell, wenn $m=0$, $n=0$ ist.

Die Grössen $\alpha'_\gamma$, $\alpha'_{\gamma'}$ werden durch blosse Buchstabenvertauschung gefunden und bedürfen daher keiner neuen Untersuchung.

Um die Coefficienten $\alpha_\beta$, $\alpha_{\beta'}$, $\alpha'_\beta$, $\alpha'_{\beta'}$ zu prüfen, die aus den Grössen $a_b$, $a_{b'}$, $a'_b$, $a'_{b'}$ dadurch hervorgehen, dass

$$\begin{array}{llllll} \text{bez.} & a, & a', & b, & b', & c, & c' \\ \text{durch} & \alpha, & \alpha', & \beta, & \beta', & 0, & \gamma' \end{array}$$

ersetzt werden, schreiben wir

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x\\ \beta, & \beta' & \end{pmatrix} = (-1)^\alpha (1-x)^{-\beta} F_\alpha \begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ \beta, & \beta+\gamma' & \end{pmatrix}$$
$$= \alpha_\beta (-1)^{\alpha+\beta} F_\beta + \alpha_{\beta'} (-1)^{\alpha+\beta'} F_{\beta'}.$$

Hier wird zunächst der zuerst auftretende Factor $(-1)^\alpha$ zu untersuchen sein. Es werde für negativ reelle $x$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^\alpha = e^{\alpha\, lg(-x) - \alpha\, lg(1-x)}$$

gesetzt und die Logarithmen werden reell genommen, so dass dieser Ausdruck für reelle $\alpha$ reell ist. Dann hat für positive $x$ kleiner als Eins $x^\alpha:(x-1)^\alpha$ den Factor $e^{-\alpha i\pi}$ auf dem positiven Ufer von $l$, weil man dorthin durch eine halbe negative Umdrehung um den Verzweigungspunkt Null gelangt. Also ist $(-1)^\alpha$ durch $e^{\alpha i\pi}$ zu ersetzen. Für absolut genommen grosse, negative $x$ hat demnach die Fortsetzung von $F_\alpha$ Werthe, die aus einem reellen Factor und dem Factor $e^{\alpha i\pi}$ bestehen, und es muss auch

$$e^{-\alpha i\pi}(\alpha_\beta(-1)^{\alpha+\beta} F_\beta + \alpha_{\beta'}(-1)^{\alpha+\beta'} F_{\beta'})$$

für grosse negative $x$ reell sein. Da aber $\alpha_\beta$, $\alpha_{\beta'}$ reell sind und $F_\beta . e^{\beta i\pi}$, $F_{\beta'} . e^{\beta' i\pi}$ für negative $x$ reelle Grössen sind, so wird die Forderung der Realität erfüllt sein, wenn

$$(-1)^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)i\pi}, \quad (-1)^{\alpha+\beta'} = e^{(\alpha+\beta')i\pi}$$

gesetzt wird.*

Diese Formeln müssen der analytischen Fortsetzbarkeit als Functionen von $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ halber auch für complexe Werthe dieser Parameter richtig sein.

Sind an der Stelle $x_0$ drei verschiedene Zweige gegeben, etwa $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, so lassen sich diese (durch Fortsetzung) auf die Form bringen

$$F^{(1)} = A^{(1)} F_\alpha + A'^{(1)} F_{\alpha'},$$
$$F^{(2)} = A^{(2)} F_\alpha + A'^{(2)} F_{\alpha'},$$
$$F^{(3)} = A^{(3)} F_\alpha + A'^{(3)} F_{\alpha'},$$

und es lassen sich daher drei Factoren $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ stets so bestimmen, dass

* Hiernach sind in den von mir in dieser Zeitschrift XIV, S. 60 gegebenen Formeln die Exponentialfactoren zu corrigiren.

$$F^{(1)}\lambda^{(1)} + F^{(2)}\lambda^{(2)} + F^{(3)}\lambda^{(3)} = 0$$

ist, und man gelangt zu dem Satze:

Zwischen je drei Zweigen einer hypergeometrischen Function besteht stets eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten.

### Art. VI. Periodicität.

Zur bequemeren Bezeichnung stellen wir die aus $t$ und $u$ mittels des Coefficientensystems

43) $$(S) = \begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix}$$

gebildeten linearen Ausdrücke

$$pt + qu, \quad rt + su$$

symbolisch in der Form dar $(S)(t, u)$,

und verstehen unter dem symbolischen Product $(S)$ $(S')$ das zusammengesetzte System

$$\begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p', & q' \\ r', & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pp' + qq', & pr' + qs' \\ rp' + sq', & rr' + ss' \end{pmatrix}.$$

Es seien im Punkte $x$ zwei Zweige der hypergeometrischen Function gegeben, und zwar der Einfachheit halber die Zweige $F_\alpha$, $F_{\alpha'}$, so sind die Werthe festzustellen, welche diese beiden Zweige für dasselbe $x$ annehmen können, wenn man diese über $l$ hinweg oder, wie man sich auch ausdrücken kann, um 0, 1, $\infty$ herum analytisch fortsetzt.

Setzen wir die Function stetig längs einer Schlinge fort, welche den Punkt Null einmal positiv umkreist, so geht $F_\alpha$ in $e^{2\alpha i\pi}.F_\alpha$, $F_\alpha'$ in $e^{2\alpha' i\pi}.F_{\alpha'}$ und das System $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in $(A)(F_\alpha, F_{\alpha'})$ über,

44) $$(A) = \begin{pmatrix} e^{2\alpha i\pi}, & 0 \\ 0, & e^{2\alpha' i\pi} \end{pmatrix};$$

wenn die Schlinge den Punkt $m$-mal umkreist, wo $m$ positiv oder negativ sein kann, so geht $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in $(A)^m(F_\alpha, F_{\alpha'})$,

45) $$(A)^m = \begin{pmatrix} e^{2m\alpha i\pi}, & 0 \\ 0, & e^{2m\alpha' i\pi} \end{pmatrix}$$

über. Geht die Schlinge um den Punkt $\infty$ $m$-mal herum, so mag $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in $(B)^m(F_\alpha, F_{\alpha'})$ übergehen, und geht sie um den Punkt 1 $m$-mal herum, so mag $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in $(C)^m(F_\alpha, F_{\alpha'})$ übergehen, worin $m$ positiv ist, wenn die Fortsetzung so geschieht, dass die betreffenden Verzweigungspunkte positiv umkreist werden, negativ im andern Falle. — So wird man nun alle Werthe des Systems $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in einem Punkte $x$ in der Form erhalten

46) $$(S)(F_\alpha, F_{\alpha'}), \quad (S) = (A)^{m_1}(B)^{n_1}(C)^{r_1}(A)^{m_2}(B)^{n_2}(C)^{r_2}(A)^{m_3}\ldots,$$

worin $m_1, m_2, m_3, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots, r_1, r_2, r_3, \ldots$ alle möglichen ganzen positiven und negativen Zahlen sind, Null eingeschlossen. Offenbar wird es im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Werthe des Systems $(F_\alpha, F_{\alpha'})$ in einem Punkte $x$ geben.

Sind die beiden Zweigwerthe oder ist das System

$$(MF_\alpha + M'F_{\alpha'},\ NF_\alpha + N'F_{\alpha'}) = (M)(F_\alpha, F_{\alpha'}),\quad (M) = \begin{pmatrix} M, & M' \\ N, & N' \end{pmatrix}$$

fortzusetzen, so erhält man sämmtliche Werthe dieses Systems, unter dieselbe Substitutionsfolge wie vorhin verstanden, in der Form

47) $$((M)(S))(F_\alpha, F_{\alpha'}).$$

Die Form dieser Werthe lässt sich jedoch noch erheblich reduciren. Eine Schlinge nämlich, die der Punkt Eins im Innern enthält, begrenzt auf ihrer äussern Seite ein Gebiet, welches die Punkte 0 und $\infty$ im Innern enthält, und ein positiver Umlauf um den Punkt Eins kann demnach ersetzt werden durch einen negativen Umlauf um die Punkte 0 und $\infty$ und zwar in der Reihenfolge, dass zuerst 0 (negativ), sodann ($\infty$) negativ umkreist wird. Es wird demnach

48) $(C)$ durch $(A)^{-1}(B)^{-1}$, $(C)^m$ durch $((A)^{-1}(B)^{-1})^m$

ersetzt werden können, und man erhält alle möglichen Coefficientensysteme $(S)$ schon in der Form

49) $$(S) = (A)^{m_1}(B)^{n_1}(A)^{m_2}(B)^{n_2}(A)^{m_3}(B)^{n_3}\ldots,$$

wenn $m_1, m_2, m_3, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots$ beliebige ganze positive und negative Zahlen Null einschliesslich sind.

Um einfachere Substitutionscoefficienten zu erhalten, setzen wir einen Augenblick

50) $$G_\alpha = g_\alpha F_\alpha,\quad G_{\alpha'} = g_{\alpha'} F_{\alpha'},$$
$$G_\beta = g_\beta F_\beta,\quad G_{\beta'} = g_{\beta'} F_{\beta'},$$

51) $$g_\alpha = \frac{fac(\alpha+\beta-1)\, fac(\alpha+\beta'-1)}{e^{\alpha i\pi} fac(\alpha-\alpha')},\quad g_{\alpha'} = \frac{fac(\alpha'+\beta-1)\, fac(\alpha'+\beta'-1)}{e^{\alpha' i\pi} fac(\alpha'-\alpha)}$$
$$g_\beta = \frac{fac(\beta+\alpha-1)\, fac(\beta+\alpha'-1)}{e^{-\beta i\pi} fac(\beta-\beta')},\quad g_{\beta'} = \frac{fac(\beta'+\alpha-1)\, fac(\beta'+\alpha'-1)}{e^{-\beta' i\pi} fac(\beta'-\beta)}$$

so ergeben sich aus 34) sofort die Gleichungen

52) $$G_\alpha = \frac{\sin(\alpha'+\beta)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} G_\beta + \frac{\sin(\alpha'+\beta)\pi}{\sin(\beta-\beta')\pi} G_{\beta'},$$
$$G_{\alpha'} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin(\beta'-\beta)\pi} G_\alpha + \frac{\sin(\alpha+\beta')\pi}{\sin(\beta-\beta')\pi} G_{\beta'},$$

und die umgekehrten

53) $$G_\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta')\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi} G_\alpha + \frac{\sin(\alpha'+\beta')\pi}{\sin(\alpha-\alpha')\pi} G_{\alpha'},$$
$$G_{\beta'} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi} G_\alpha + \frac{\sin(\alpha'+\beta')\pi}{\sin(\alpha-\alpha')\pi} G_{\alpha'}.$$

Gehen wir nun zuerst $m$-mal um den Punkt 0 herum, sodann $n$-mal um den Punkt $\infty$, so geht $G_\alpha$ zuerst in $G_\alpha e^{2m\alpha i\pi}$ über. Um die Wirkung der Umgänge um den Punkt $\infty$ zu erhalten, schreiben wir

$$G_\beta \frac{\sin(\alpha'+\beta)\pi\, e^{2m\alpha i\pi}}{\sin(\beta'-\beta)\pi} + G_{\beta'} \frac{\sin(\alpha'+\beta')\pi\, e^{2m\alpha\pi i}}{\sin(\beta-\beta')\pi} \quad \text{für } e^{2m\alpha i\pi} G_\alpha,$$

dann verwandeln sich durch die $n$ Umläufe bez.

$$G_\beta,\ G_{\beta'} \text{ in } G_\beta e^{2n\beta i\pi},\ G_{\beta'} e^{2n\beta' i\pi};$$

drückt man darauf $G_\beta$, $G_{\beta'}$ wieder durch $G_\alpha$, $G_{\alpha'}$ aus, so ist dadurch $G_\alpha$ übergegangen in

54) $$G_\alpha p_{m,n} + G_{\alpha'} q_{m,n}$$

$$= G_\alpha e^{2m\alpha i\pi} \frac{\sin(\alpha'+\beta)\pi \sin(\alpha+\beta')\pi\, e^{2n\beta i\pi} - \sin(\alpha'+\beta')\pi \sin(\alpha+\beta)\pi\, e^{2n\beta' i\pi}}{\sin(\beta'-\beta)\pi \sin(\alpha'-\alpha)\pi}$$

$$+ G_{\alpha'} e^{2m\alpha i\pi} \frac{\sin(\alpha'+\beta)\pi \sin(\alpha'+\beta')\pi\, (e^{2n\beta i\pi} - e^{2n\beta' i\pi})}{\sin(\beta'-\beta)\pi \sin(\alpha-\alpha')\pi}.$$

Durch dieselbe Art der Fortsetzung geht $G_{\alpha'}$ über in

55) $$G_\alpha r_{m,n} + G_{\alpha'} s_{m,n}$$

$$= G_\alpha\, e^{2m\alpha' i\pi} \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi \sin(\alpha+\beta')\pi\, (e^{2n\beta i\pi} - e^{2n\beta' i\pi})}{\sin(\beta'-\beta)\pi \sin(\alpha'-\alpha)\pi}$$

$$+ G_{\alpha'} e^{2m\alpha' i\pi} \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi \sin(\alpha'+\beta')\pi\, e^{2n\beta i\pi} - \sin(\alpha+\beta')\pi \sin(\alpha'+\beta)\pi\, e^{2n\beta' i\pi}}{\sin(\beta'-\beta)\pi \sin(\alpha-\alpha')\pi}.$$

Schreiben wir $(S^m_n)$ für das Coefficientensystem

$$\begin{pmatrix} p_{m,n}, & q_{m,n} \\ r_{m,n}, & s_{m,n} \end{pmatrix},$$

so geht demnach das Zweigwerthsystem $(G_\alpha, G_{\alpha'})$ durch $m$-malige Fortsetzung um 0 und $n$-malige um $\infty$ über in

56) $$(S^m_n)(G_\alpha, G_{\alpha'}).$$

Endlich sei

$$\begin{pmatrix} M \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M}{g_\alpha}, & \frac{M'}{g_{\alpha'}} \\ \frac{N}{g_\alpha}, & \frac{N'}{g_{\alpha'}} \end{pmatrix},$$

also

$$(MF_\alpha + M'F_{\alpha'},\ NF_\alpha + N'F_{\alpha'}) = (M)(F_\alpha, F_{\alpha'}) = \begin{pmatrix} M \\ g \end{pmatrix}(G_\alpha, G_{\alpha'}).$$

Dann sind alle Werthe von $(MF_\alpha + M'F_{\alpha'},\ NF_\alpha + N'F_{\alpha'})$ in der Form enthalten

$$(S)(G_\alpha, G_{\alpha'}) = (S)(g_\alpha F_\alpha, g_{\alpha'} F_{\alpha'}), \quad (S) = \begin{pmatrix} M \\ g \end{pmatrix}(S^{m_1}_{n_1})(S^{m_2}_{n_2})(S^{m_3}_{n_3})\ldots,$$

wenn $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$, ... alle möglichen ganzen positiven und negativen Zahlen, Null eingeschlossen, bedeuten. Durch Vertauschung zweier Factoren des Symbols wird im Allgemeinen der Werth desselben geändert.

So einfach, wie die Zweigwerthe der Umkehrung einer einfach- oder doppelt-periodischen Function, sind die der hypergeometrischen Reihe freilich nicht mit einander verknüpft. Es dürfte z. B. nicht leicht sein, aus der Form $(S)$ die Bedingungen herzuleiten, welche nothwendig erfüllt sein müssen, damit $(S)(F_\alpha, F_{\alpha'})$ nur eine endliche Anzahl von Werthen annimmt oder, was dasselbe ist, die Fälle zu finden, in denen die hypergeometrische Function algebraisch ist, was, unter Heranziehung höherer Hilfsmittel, bereits mehrfach gelungen ist.

Wir wenden uns nun zu den contiguen Functionen.

---

# Kleinere Mittheilungen.

## I. Zur Geometrie des Tetraeders.

Bekanntlich ist der Ort der Punkte, deren Projectionen auf die Ebenen eines Tetraeders Punkte derselben Ebene sind, eine Fläche dritter Ordnung $F^3$, welche die Ecken des Tetraeders zu Doppelpunkten hat. Während man die für allgemeine Flächen dritter Ordnung bekannten Eigenschaften in diesem speciellen Falle mehrfach abgeleitet hat,* habe ich die im Folgenden angegebenen, mit dem Problem zusammenhängenden einfachen Beziehungen, die zum grossen Theil durch rein elementare Betrachtungen zugänglich sind und zum Theil die Analoga zu bekannten Eigenschaften der elementaren Planimetrie bilden, nicht erwähnt gefunden.

I. Man weiss seit Beltrami, dass die Mitten der 28 Centralen der 8 Berührungskugeln des Tetraeders Punkte der genannten $F^3$ sind. Der einfache elementare Beweis für diese Thatsache ist folgender: Das Loth von der Mitte der Centrale zweier Kugeln auf eine gemeinsame Tangentialebene halbirt die gemeinsame Tangente, welche die Berührungspunkte verbindet, und hat infolge dessen seinen Fusspunkt in der Potenzebene. Also:

Die Lothe, welche man auf die Ebenen eines Tetraeders von der Mitte der Centrale zweier Berührungskugeln fällen kann, haben ihre Fusspunkte in einer Ebene, der Potenzebene der beiden Kugeln.

II. Errichtet man auf drei Ebenen $A$, $B$, $C$, auf jeder längs der Geraden, in welcher sie von einer vierten Ebene $X$ geschnitten wird, die senkrechten Ebenen, so schneiden sich diese in einem Punkte $x$, dessen Projectionen in $X$ liegen. Verschiebt man $X$ sich selbst parallel, so beschreibt der Durchschnitt der drei senkrechten Ebenen die gerade Verbindungslinie des ersten Punktes $x$ mit dem Schnittpunkte von $A$, $B$, $C$. Schneidet man die vier Ebenen eines Tetraeders $A$, $B$, $C$, $D$ durch eine Ebene $X$, sucht dann für zwei der von ihnen gebildeten Ecken, z. B. für $A$, $B$, $C$ und $A$, $B$, $D$, die Schnittpunkte der Tripel senkrechter

---

* Geiser, Crelle Bd. 39 S. 197; O. Hankel, Inauguraldissertation, Breslau 1877 u. A.

Ebenen und die beiden Verbindungslinien eines jeden dieser Schnittpunkte mit dem Scheitel der zugehörigen Ecke, so treffen sich die letzteren in einem Punkte; denn sie treffen beide den Schnitt der Ebenen, welche resp. auf $A$ und $B$ senkrecht errichtet sind, und jener Schnitt trifft selbst die gemeinsame Kante der beiden Ecken in dem Schnittpunkte mit $X$. Die Projectionen des Schnittpunktes der Verbindungslinien auf $A$, $B$, $C$, $D$ liegen ersichtlich in einer Ebene, die zu $X$ parallel ist. Also:

Errichtet man auf den Ebenen eines Tetraeders längs ihrer Schnitte mit einer fünften Ebene senkrechte Ebenen und verbindet dann jede Tetraederecke mit dem Schnittpunkte der drei auf den Ebenen der Ecke senkrechten Ebenen durch eine gerade Linie, so schneiden sich diese vier Verbindungslinien in einem Punkte, dessen Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders die Ecken eines ebenen Vierecks sind.

III. Giebt es Punkte im Raume, deren Projectionen nach den Ebenen eines Tetraeders die Ecken eines Trapezes sind? Giebt es Punkte, deren Projectionen die Ecken eines Parallelogramms sind?

Sind zwei Ebenen $A$ und $B$ und durch ihre Schnittlinie $(A, B)$ eine beliebige Ebene $X$ gegeben, so hat die Verbindungslinie der Fusspunkte $x_a$ und $x_b$ der von einem Punkte $x$ in $X$ gefällten Lothe stets dieselbe Richtung, wo auch $x$ in $X$ liege; sie steht senkrecht auf der Ebene $Y$ durch $(A, B)$, welche mit $B$ resp. $A$ dieselben Winkel bildet, wie $X$ mit $A$ resp. $B$; es halbiren also die Halbirungsebenen der Winkel zwischen $A$ und $B$ auch die Winkel zwischen $X$ und $Y$. Jetzt seien $A$, $B$, $C$, $D$ die Ebenen unseres Tetraeders und $x$ ein Punkt der Eigenschaft, dass seine Projectionen $x_a$, $x_b$, $x_c$, $x_d$ in einer Ebene liegen. Sucht man nun zu jeder Ebene $X$, welche $x$ mit einer Tetraederkante verbindet, für das zugehörige Paar von Winkelhalbirungsebenen die symmetrisch gelegene Ebene $Y$, so erhält man sechs Ebenen, welche resp. auf den sechs Seiten des ebenen Vierecks $x_a x_b x_c x_d$ senkrecht stehen, sich also in parallelen Linien durchschneiden. Der in der Richtung der Schnittlinien in der unendlich fernen Ebene $E_\infty$ gelegene, so zu $x$ gehörige Punkt möge gelegentlich $x_\infty$ genannt werden. Die angegebene Eigenschaft der Ebenen $Y$ und die Umkehrung liefern eine zweite elementare Construction von Punkten der verlangten Eigenschaft; sie liefern auch ein bequemes Mittel zur Untersuchung der von den Projectionen gebildeten Vierecke.

Die Winkel, welche irgend zwei Seiten des Vierecks, z. B. $\overline{x_a x_b}$ und $\overline{x_c x_d}$ bilden, sind den Winkeln gleich, welche die zu ihnen senkrechten Ebenen bilden, hier die Ebenen, welche $x_\infty$ mit den Kanten $(A, B)$ und $(C, D)$ verbinden. Sollen also $\overline{x_a x_b}$ und $\overline{x_c x_d}$ parallel sein, so ist dies

auch mit den genannten Ebenen durch $(A, B)$ und $(C, D)$ der Fall. Durch diese Kanten giebt es ein Paar paralleler Ebenen, durch jede Kante die Ebene, welche der andern parallel ist. Die Ebenen umgekehrt, welche zu diesen parallelen Ebenen für die zugehörigen Winkelhalbirungsebenen symmetrisch liegen, schneiden sich in einer Geraden, deren Punkte die verlangte Eigenschaft besitzen; d. h. die Projectionen eines Punktes des Schnittes sind die Ecken eines Trapezes. Jedes der beiden anderen Paare von Gegenkanten des Tetraeders liefert ebenfalls eine Gerade mit Punkten von der verlangten Beschaffenheit. Also:

Es giebt drei gerade Linien im Raume der Eigenschaft, dass die Projectionen eines ihrer Punkte auf die Ebenen eines Tetraeders die Ecken eines Trapezes sind.

Bekanntlich sind diese drei Geraden die einzigen Geraden, welche $F^3$ ausser den Tetraederkanten enthält.

Aus dem Umstande, dass die Winkelhalbirungsebenen derselben Kante und zwei symmetrisch zu ihnen gelegene Ebenen vier harmonische Ebenen sind, und daraus, dass auf einer Geraden, welche einer von vier harmonischen Ebenen parallel ist, von den übrigen zwei gleiche Strecken ausgeschnitten werden, folgt noch, dass diese Geraden durch die Mitten der Strecken gehen, welche auf den Kanten durch die Paare der Winkelhalbirungsebenen der Gegenkanten begrenzt werden.

Irgend zwei dieser drei ausgezeichneten Geraden müssen einen Punkt gemeinsam haben; denn zwei Paare der parallelen Ebenen, die zu zwei Paaren von Gegenkanten gehören, bilden ein System von Ebenen, deren Schnittlinien parallel sind; ihre symmetrischen Ebenen schneiden sich folglich in einem Punkte $x$ von $F^3$, der in diesem Falle auf den beiden ausgezeichneten Geraden liegt. In dem Viereck, welches die Projectionen von $x$ bilden, sind in diesem Falle zwei Paar Gegenseiten parallel, es ist ein Parallelogramm. Da je zwei der drei Geraden sich schneiden, so gilt der Satz:

Es giebt drei Punkte im Raume, für welche die Projectionen auf die Ebenen eines Tetraeders die Ecken eines Parallelogramms sind.

Diese drei ausgezeichneten Punkte sind die Diagonalpunkte des Vierseits, in welchem das Tetraeder von der Ebene der ausgezeichneten Geraden geschnitten wird.

IV. Eine weitere Gattung specieller Vierecke ist diejenige, bei der je zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, bei der also jede Ecke der Höhenschnittpunkt des von den drei anderen Ecken gebildeten Dreiecks ist. Giebt es Punkte $x$, deren Projectionen auf $A$, $B$, $C$, $D$ die Ecken eines solchen speciellen Vierecks sind? Die zugehörigen nach $x$ gehenden, auf den Seiten des Vierecks senkrechten Ebenen bilden in

diesem Falle ein vierkantiges Prisma der Eigenschaft, dass je zwei Gegenebenen auf einander senkrecht stehen. Giebt es solche Prismen? Construirt man die Gesammtheit der Paare rechtwinkliger Ebenen, welche durch zwei Gegenkanten des Tetraeders gelegt werden können, so erhält man zwei projectivische Ebenenbüschel; das Erzeugniss derselben ist ein orthogonales Hyperboloid.* Zieht man zwei Paar Gegenkanten und die beiden zugehörigen orthogonalen Hyperboloide in Betracht, so erhält man als Schnitt eine Raumcurve vierter Ordnung. Jeder der vier Schnittpunkte dieser Curve mit $E_\infty$, die sich durch Betrachtungen in $E_\infty$ auch leicht als Schnitt zweier Kegelschnitte aufweisen lassen, liefert mit den Ecken des Tetraeders verbunden ein Prisma der verlangten Art; denn wenn in einem prismatischen Vierkant zwei Paar Gegenebenen auf einander senkrecht stehen, so ist dies auch mit dem dritten der Fall. Also:

Es giebt vier Punkte im Raume, für welche die Projectionen auf die Ebene eines Tetraeders die Ecken eines Vierecks mit drei Paar senkrechten Gegenseiten sind.

V. Die orthogonalen Hyperboloide bieten noch ein weiteres Interesse dar. Die drei zu den drei Paar Gegenkanten eines Tetraeders gehörigen orthogonalen Hyperboloide gehen durch dieselbe Raumcurve vierter Ordnung. Ist nämlich $y$ ein Punkt des Raumes, welcher mit zwei Paar Gegenkanten Paare orthogonaler Verbindungsebenen liefert, so bilden die Verbindungslinien von $y$ mit den Tetraederecken ein Vierkant, in welchem zwei Paar Gegenebenen und infolge dessen alle drei Paar aus je zwei senkrechten Ebenen bestehen. Diese Eigenschaft ist Nichts, als die Umkehrung des Satzes, dass die drei Höhenebenen einer dreiseitigen Ecke sich in einer Geraden, dem Höhenstrahl, schneiden.

Von dem Schnitte der orthogonalen Hyperboloide lassen sich leicht acht zur Bestimmung ausreichende Punkte angeben. Jedes orthogonale Hyperboloid enthält zwei Gegenkanten, also die vier Ecken des Tetraeders; ferner sind ersichtlich die Fusspunkte der vier Tetraederhöhen, Punkte, deren Verbindungsebenen mit den sechs Kanten paarweise auf einander senkrecht stehen, mithin Punkte der drei Hyperboloide. Diese acht Punkte sind nicht associirte Punkte; denn sonst müssten, da ein Höhenfusspunkt mit drei Ecken in einer Ebene liegt, die drei übrigen Fusspunkte mit der vierten Ecke in einer Ebene liegen, was nicht der Fall ist. Durch diese ausgezeichneten acht Punkte geht aber noch eine weitere wichtige Fläche, das gleichseitige Hyperboloid, welches die Höhen des Tetraeders enthält.** Also gilt der Satz:

---

* Schroeter, Crelle Bd. 85 S. 26.

** H. Vogt, Crelle Bd. 86 S. 297.

Die drei zu den Gegenkantenpaaren eines Tetraeders gehörigen orthogonalen Hyperboloide schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche auf dem Höhenhyperboloid liegt.

Der eben abgeleitete Satz findet sein planimetrisches Analogon nicht beim Dreieck, sondern beim Vierseit in dem bekannten elementaren Satze: Die drei Kreise, welche die Diagonalen eines Vierseits zu Durchmessern haben, schneiden sich in denselben zwei Punkten, welche auf der Geraden der vier Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke des Vierseits liegen.

Für den Schnitt der vier Hyperboloide des Tetraeders folgt noch leicht eine weitere Eigenschaft. Eine Höhenebene einer der vier dreiseitigen Ecken des Tetraeders berührt im Scheitel der Ecke dasjenige orthogonale Hyperboloid, welches mit ihr die Kante gemeinsam hat; es ergiebt sich dies unmittelbar aus der Definition. Betrachten wir dies für die drei Höhenebenen der Ecke und ihren Schnitt, den Höhenstrahl, so haben wir den Satz:

Die vier Höhenstrahlen der vier dreiseitigen Ecken des Tetraeders berühren in den Ecken die Schnittlinie der vier Hyperboloide des Tetraeders.

VI. In mehreren speciellen Fällen zerfällt der Schnitt der Hyperboloide. Besitzt das Tetraeder zu einander senkrechte Ebenen, so gehört ihr Schnitt der Curve an. Besteht das Tetraeder also aus zwei Paar senkrechten Ebenen, so ist der Schnitt der vier Hyperboloide ein windschiefes Vierseit.

Sind im Tetraeder zwei Gegenkanten zu einander senkrecht, so zerfällt ihr orthogonales Hyperboloid in die zwei Ebenen, welche durch je eine dieser Kanten gehen und zur andern senkrecht sind. Der Schnitt der vier Hyperboloide besteht aus zwei Kegelschnitten, welche die Linie der kürzesten Entfernung der beiden Kanten in demselben Punktepaare treffen. Ein solcher Kegelschnitt geht durch die Ecken einer der senkrechten Kanten, die Fusspunkte der von ihnen ausgehenden Höhen, und berührt in den Ecken die Höhenstrahlen derselben.

Für den Fall des Tetraeders mit Höhenschnittpunkt zerfallen die Hyperboloide in Ebenenpaare und ihr Schnitt in die vier Tetraederhöhen. Da die unendlich fernen Punkte dieses Schnittes die in IV gesuchten Punkte liefern, so erhält man noch unter Berücksichtigung der im Eingange von III entwickelten Eigenschaften folgenden Satz:

Errichtet man auf drei Flächen eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt längs ihrer Schnitte mit der vierten Fläche senkrechte Ebenen, so bilden die Projectionen des Schnittpunktes derselben auf die vier Tetraederebenen ein

Viereck, in welchem jede Ecke Höhenpunkt des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks ist.

VII. Aendert man das zu Grunde gelegte Tetraeder in der Weise ab, dass man jede seiner Ebenen parallel mit sich selbst verschiebt, so bleibt das Vierseit der Geraden, in welchem das Tetraeder von $E_\infty$ geschnitten wird, unverändert, folglich auch die Schnitte der orthogonalen Hyperboloide mit $E_\infty$, nämlich die Punkte, welche, mit einem Paar Gegenecken dieses Vierseits verbunden, Strahlen liefern, die für den unendlich fernen imaginären Kreis conjugirt sind. Das Gleiche gilt von den Schnittpunkten von $E_\infty$ mit den Höhen des Tetraeders, den Höhenstrahlen seiner vier dreiseitigen Ecken, also auch vom Schnitt des gleichseitigen Hyperboloids mit $E_\infty$. Dies ist auch noch der Fall, wenn die vier Ebenen $A$, $B$, $C$, $D$ durch denselben Punkt gehen, d. h. für das Vierflach. Dabei werden allerdings aus den orthogonalen und gleichseitigen Hyperboloiden eben solche Kegel. Beachten wir dies, so erhalten wir noch folgende Sätze:

1. Die vier Höhenstrahlen der vier dreiseitigen Ecken eines Vierflachs (vierseitigen Ecke) liegen mit den vier Geraden, welche im Scheitel zu den Ebenen desselben senkrecht stehen, auf einem gleichseitigen Kegel.

2. Die drei durch die drei Gegenkantenpaare eines Vierflachs bestimmten orthogonalen Kegel gehören demselben Büschel an. Ihre vier Schnittlinien, die vier Höhenstrahlen und die vier Lothe der Ebenen des Vierflachs im Scheitel liegen auf demselben gleichseitigen Kegel.

Striegau, im Januar 1881. H. Thieme.

## II. Geometrischer Satz.

Wenn man von vier in der Ebene willkürlich gegebenen Punkten einen als Mittelpunkt eines (reellen oder imaginären) Kegelschnitts, die drei übrigen als die Ecken eines Polardreiecks in Bezug auf denselben annimmt, so ist der Kegelschnitt dadurch vollständig und eindeutig bestimmt und man erhält durch Vertauschung der vier gegebenen Punkte vier solcher Kegelschnitte. Diese sind entweder vier reelle Hyperbeln, sobald die vier gegebenen Punkte so liegen, dass jeder derselben ausserhalb des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sich befindet, oder sie sind drei reelle Ellipsen und eine imaginäre Ellipse, sobald die vier gegebenen Punkte so liegen, dass einer derselben innerhalb des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sich befindet. Im ersten Falle sind die Asymptoten jeder der vier Hyperbeln gleich geneigt zu einander, im zweiten Falle sind die drei reellen Ellipsen ähnlich (aber nicht ähnlich liegend) und ihr Axenverhältniss hat zum Quadrat das Verhältniss der

Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen der imaginären Ellipse. In beiden Fällen gilt, wenn man durch $P_a$ und $P_b$ die Potenzen der Punktinvolutionen auf den Hauptaxen eines der vier Kegelschnitte bezeichnet, die Beziehung:

$$\sum^{(4)}\left(\frac{1}{P_a}+\frac{1}{P_b}\right)=0.$$

Liegen insbesondere die vier gegebenen Punkte so, dass jeder derselben der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks ist, dann werden von den vier Kegelschnitten drei reelle Kreise und einer ein imaginärer Kreis. Liegen andererseits die vier gegebenen Punkte auf einem Kreise, so sind die vier Kegelschnitte vier gleichseitige Hyperbeln. Im vorigen Falle gilt daher, wenn $A$, $B$, $C$ die Ecken, $H$ der Höhenpunkt und $a$, $b$, $c$ die Fusspunkte der Höhen sind, die elementare Beziehung:

$$\frac{1}{AH.Aa}+\frac{1}{BH.Bb}+\frac{1}{CH.Cc}=\frac{1}{HA.Ha}=\frac{1}{HB.Hb}=\frac{1}{HC.Hc}.$$

Breslau, den 3. Juli 1881. Prof. Dr. H. Schroeter.

---

### III. Notiz über gewisse elliptische Integrale.

Wenn die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ folgende Eigenschaften besitzen

$$1)\quad F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=Const. \quad \text{und} \quad 2)\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x),$$

so kann man das Integral

$$\int_0^\infty F(x)\,f(x)\,\frac{dx}{x}$$

dadurch reduciren, dass man es nach dem Schema

$$\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$$

zerlegt und im letzten Integrale $\frac{1}{x}$ an die Stelle von $x$ treten lässt; man erhält so

$$3)\quad \int_0^\infty F(x)\,f(x)\,\frac{dx}{x}=Const.\int_0^1 f(x)\,\frac{dx}{x}.$$

Zufolge des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Art kommt der Function

$$F(x)=F\left(\varkappa,\,arctan\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right)$$

die in Nr. 1) vorausgesetzte Eigenschaft zu, und zwar ist dabei $Const. = F(\varkappa,\frac{1}{2}\pi)=F^{I}(\varkappa)$; demnach ergiebt sich aus Nr. 3)

$$\int_0^\infty F\left(\varkappa,\, arctan\,\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right) f(x)\,\frac{dx}{x} = F^{\mathrm{I}}(\varkappa)\int_0^1 f(x)\,\frac{dx}{x}$$

oder, wenn linker Hand $x=\sqrt{\varkappa'}.\,tan\,\varphi$ substituirt wird,

$$4)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(\varkappa,\varphi)\,f(\sqrt{\varkappa'}.\,tan\,\varphi)}{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}\,d\varphi = F^{\mathrm{I}}(\varkappa)\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Beispielsweise ist hiernach für $f(x)=x:(1+x^2)$

$$5)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{1-(1-\varkappa')\,sin^2\varphi}=\frac{\pi F^{\mathrm{I}}(\varkappa)}{4\sqrt{\varkappa'}}.$$

Mehr Interesse gewährt der Fall

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{(1+\lambda x^2)(\lambda+x^2)}},$$

für welchen nach bekannten Transformationen

$$\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1+\lambda x^2)(\lambda+x^2)}}=\tfrac{1}{2}F^{\mathrm{I}}(\sqrt{1-\lambda^2})$$

ist; benutzt man noch die Abkürzungen

$$\alpha=1-\varkappa'\lambda,\quad \beta=1-\frac{\varkappa'}{\lambda},$$

so erhält man aus Nr. 3)

$$6)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha\,sin^2\varphi)(1-\beta\,sin^2\varphi)}}=\frac{F^{\mathrm{I}}(\varkappa)\,F^{\mathrm{I}}(\sqrt{1-\lambda^2})}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa'}}.$$

Die Specialisirung $\lambda=(1-\varkappa):\varkappa'$ giebt noch

$$7)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\,sin^4\varphi}}=\frac{F^{\mathrm{I}}(\varkappa)\,F^{\mathrm{I}}\left(\sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}}\right)}{2\sqrt{1+\varkappa}}.$$

Aus dem Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Art geht hervor, dass die Function

$$F(x)=E\left(\varkappa,\,arctan\,\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right)-\tfrac{1}{2}.\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}$$

der Bedingung 1) genügt und dass hierbei $Const.=E(\varkappa,\tfrac{1}{2}\pi)=E^{\mathrm{I}}(\varkappa)$ ist; demnach gilt die Reductionsformel

$$\int_0^\infty\left\{E\left(\varkappa,\,arctan\,\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right)-\tfrac{1}{2}.\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}\right\}\frac{f(x)}{x}\,dx=E^{\mathrm{I}}(\varkappa)\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Substituirt man im ersten Integral $x = \sqrt{\varkappa'}.\tan\varphi$ und beachtet die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}} = \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}},$$

so erhält man

$$8)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(\varkappa,\varphi)\,f(\sqrt{\varkappa'}.\tan\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^1 \left\{E^{\mathrm{I}}(\varkappa) + \frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}\right\}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Beispielsweise sei wie vorhin

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+\lambda x^2)(\lambda+x^2)}},\qquad \alpha = 1-\varkappa'\lambda,\quad \beta = 1-\frac{\varkappa'}{\lambda};$$

es wird dann zunächst

$$\sqrt{\frac{\varkappa'}{\lambda}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\varphi)(1-\beta\sin^2\varphi)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}E^{\mathrm{I}}(\varkappa)\,F^{\mathrm{I}}(\sqrt{1-\lambda^2}) + \varkappa^2\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)(1+\lambda x^2)(\lambda+x^2)}};$$

das letzte Integral geht für

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}},\quad \mu = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'},\quad \nu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

über in

$$\frac{1}{(1+\varkappa')(1+\lambda)}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-\mu^2y^2)(1-\nu^2y^2)}},$$

mithin ist zusammen

$$9)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\varphi)(1-\beta\sin^2\varphi)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa'}}\left\{\frac{E^{\mathrm{I}}(\varkappa)\,F^{\mathrm{I}}(\sqrt{1-\lambda^2})}{2} + \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa')(1+\lambda)}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-\mu^2y^2)(1-\nu^2y^2)}}\right\}.$$

Im speciellen Falle $\lambda = (1-\varkappa):\varkappa'$ wird $\mu = \nu^2$ und durch Substitution von $y = \frac{1}{\nu}\sin\varphi$

$$10)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(\varkappa,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^4\varphi}} = \frac{E^{\mathrm{I}}(\varkappa)\,F^{\mathrm{I}}\left(\sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}}\right)}{2\sqrt{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa\,F(\nu,\arcsin\nu)}{\sqrt{1+\varkappa}+\sqrt{1-\varkappa}},\quad \nu = \sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}}.$$

Ohne Zweifel gestatten die Formeln 4) und 8) noch weitere Anwendungen, deren Aufsuchung dem Leser überlassen bleiben möge.

Schlömilch.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Versuch neuer Tafeln der hyperbolischen Functionen.

Von

Prof. ANGELO FORTI,

Ehrenmitglied der Gesellschaft der Wissenschaften in Bordeaux.

Pisa 1881.

---

Die Tafeln der hyperbolischen Functionen, mit deren Zusammenstellung ich mich seit langer Zeit beschäftige und von denen ich hier eine Probe vorlege, sind vollständig verschieden von denjenigen, welche ich in den Jahren 1863 und 1870 veröffentlicht habe. Als die ersten erschienen, fehlten der Wissenschaft noch die hyperbolischen Tafeln, ausgenommen diejenigen von Gudermann, welche, weil sie nicht gleichmässig sind, und aus Gründen, die ich später angeben werde, für die Praxis sich nicht gut eignen. Während ich nun damals glaubte, der Erste zu sein, der diese Lücke ausfüllte, bemerkte ich, dass dasselbe Heft des Archivs[1]), welches die meinigen ankündigte, auch ein ähnliches Werk von Prof. Gronau in Danzig[2]) anzeigte. Die Einrichtung jedoch war verschieden[3]), weil er nach Labmert den sogenannten transcendenten Winkel $\tau$ eingeführt hatte, während das von mir angenommene Argument der gewöhnliche, mit $\varphi$ bezeichnete Winkel ist. Die Tafeln Gronau's gingen direct von $\tau = 0^0$ bis $\tau = 90^0$, die meinigen dagegen waren doppelte. Die erste ging von $\varphi = 0^0$ bis $\varphi \doteq 45^0$, jede Seite links enthielt die gewöhnlichen Logarithmen des Sinus, der Tangente, Cotangente und des Cosinus, als Kreisfunctionen betrachtet, und rechts die entsprechenden Werthe von $\tau$ und die gewöhnlichen Logarithmen des Sinus, Cosinus und des doppelten hyperbolischen Sectors, da die hyperbolische Tangente dieselbe ist, als die Tangente des correspondirenden Winkels $\varphi$. Die zweite Tafel hatte als Argument $\frac{1}{2}\tau$, ging ebenfalls von $0^0$ bis $45^0$ und gab die doppelten hyperbolischen Sectoren und die Logarithmen der Tangenten der entsprechenden Winkel $\varphi$.

Wie es oft bei der ersten Ausgabe eines neuen Werkes zu gehen pflegt, habe ich mich bald überzeugt, dass diese Doppelseitigkeit meine Tafeln in vielen Fällen unbequem machte und dass ich sie deshalb ein-

facher einrichten müsste. Darin bestärkte mich noch die Polemik, welche zwischen den Professoren Hoüel, Gronau, Bellavitis und mir entstand. Die gelehrte Kritik Hoüel's befindet sich im Septemberheft 1864 des Journals von Terquem. Der erste Theil der Ausgabe meiner Tafeln von 1870 enthält ausser der Geschichte der hyperbolischen Functionen eine grosse Anzahl ihrer Anwendungen auf die Algebra, die Astronomie, die Physik, die elliptischen Functionen und die Loxodrome[4]. Die hyperbolischen Functionen spielen auch eine wesentliche Rolle in der Nicht-Euklidischen oder, wie sie von Anderen genannt wird, idealen Geometrie, wie ich in zweien meiner Abhandlungen über die Arbeiten von Lobatcheffsky und der beiden Bolyai gezeigt habe. Die erste dieser Abhandlungen befindet sich im Septemberheft 1866 der Rivista Bolognese und die zweite im Bulletin der Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften des Fürsten Boncompagni, veröffentlicht in demselben Jahre. Ausserdem geht dieses auch aus einer klassischen Abhandlung des Prof. Battaglini über dieselbe Geometrie[5] hervor.

Vor dem Jahre 1870 drang Prof. Hoüel, jener competente Richter, in mich, den Winkel $\varphi$ aufzugeben und dafür als Argument den doppelten hyperbolischen Sector zu nehmen. Die Einwürfe Bellavitis' kamen zum grossen Theil mit denjenigen Hoüel's überein, nur dass er sich nicht sehr günstig über das System Gronau's aussprach. Ich antwortete Beiden, und Bellavitis erwies mir die Ehre, meine ganze Antwort in die Annalen des Istituto veneto, Heft für Juli und August 1864, einzurücken. Der Inhalt meiner Erwiderung war folgender: Ich stimmte vollständig damit überein, dass der doppelte hyperbolische Sector das natürlichste Argument für ausschliesslich hyperbolische Tafeln sei; der gewöhnliche Winkel $\varphi$ dagegen, wenn, wie es meine damalige Absicht war, es sich darum handelt, die hyperbolischen Functionen vom elementaren Standpunkte aus zu betrachten und an die Stelle der bekannten Tafeln von Lalande ein mit diesen Functionen bereichertes Buch zu setzen, welches man den Eleven der Lyceen, wo die Kegelschnitte gelehrt werden, in die Hand geben könnte und wodurch sie in den Stand gesetzt wären, die Kreis- und die hyperbolischen Coordinaten unter einander zu vergleichen und z. B. die Fläche des doppelten Sectors $\omega$ der gleichseitigen Hyperbel aus dem gegebenen entsprechenden Winkel $\varphi$ zu berechnen, und nicht aus $\tau$, welches in Bezug auf die Figur etwas Erkünsteltes hat. In Wirklichkeit habe ich dadurch, dass meine Tafeln vom Jahre 1870 die dritte Ausgabe erlebten, geschlossen, dass diese meine Erwartung mich nicht betrog.

---

Da ich nun jene Idee durchgeführt habe, so schien es mir geeignet, hyperbolische Tafeln für den ausschliesslichen Gebrauch der Mathematiker

zu berechnen, deren theoretischer Theil sich auf die analytischen Principien dieser Functionen gründet. Mit der Ausführung dieses Unternehmens bin ich gegenwärtig beschäftigt. Das Argument musste der doppelte hyperbolische Sector $\omega$ sein, welcher von Null an in kleinen Intervallen wachsen musste. Ich lege am Ende dieser Abhandlung eine Probe dieser Tafeln vor. Weil ich mich nun dadurch denjenigen Gudermann's und noch mehr denjenigen Hoüel's nähere, so muss ich vorerst diese beschreiben, um den Unterschied derselben mit den meinigen zu zeigen. Nach dem Jahre 1830 veröffentlichte Gudermann in den Bänden VI, VII, VIII und IX des Crelle'schen Journals eine Reihe von hyperbolischen Tafeln. Diese waren eingeleitet durch eine gelehrte und ausführliche Abhandlung, betitelt: Theorie der Potentialfunctionen, in welchen durch dieselbe Analysis die Functionen der beiden Curvenarten so behandelt werden, als ob sie aus gleichem Ursprung hervorgegangen wären. Die Theorie wird vervollständigt mit der Auseinandersetzung der Principien, welche zur Aufstellung der Tafeln gedient haben, und das Werk ist dem berühmten Gründer jener Zeitschrift gewidmet. Seine Tafeln sind doppelter Art: die ersten geben den transcendenten Winkel $\tau$, von ihm Longitudinalzahl genannt, wenn der doppelte hyperbolische Sector, von ihm Längenzahl genannt, gegeben ist, und umgekehrt; die zweiten geben die Logarithmen von *sinh*, *cosh* und *tagh*, wenn der doppelte Sector gegeben ist; nur dass diese zweiten Tafeln nicht mit dem doppelten Sector 0 anfangen, sondern mit jenem $= 2$ bis 12, weil, wie er selbst sagt, die ersteren sich nicht gut für den Gebrauch eignen, wenn der doppelte Sector grösser als 4 ist. Daher kommt es, dass der Gebrauch der Gudermann'schen Tafeln nicht gleichmässig ist. Wenn der gegebene doppelte Sector grösser als 2 ist, geben seine zweiten Tafeln direct die Logarithmen der entsprechenden hyperbolischen Functionen; wenn dagegen derselbe kleiner als 2 ist, muss man auf die ersten Tafeln zurückgehen, welche den ihm entsprechenden transcendenten Winkel geben; alsdann muss man, um die gesuchten Logarithmen der hyperbolischen Functionen zu erhalten, zu den gewöhnlichen Logarithmentafeln greifen und alsdann von den gewöhnlichen Logarithmen zu den natürlichen Werthen. Dieses genügt, uns zu überzeugen, dass die Gudermann'schen Tafeln sehr unbequem sind, weil, wenn wir uns auch der zweiten bedienen können, wir dennoch gezwungen sind, nicht nur, wie ich soeben bemerkt habe, von den Logarithmen zu den Zahlen mit Hilfe anderer Tafeln überzugehen, sondern auch die Proportionaltheile mittelst der Logarithmen der gesuchten Functionen zu berechnen, während, wenn wir genau verfahren wollen, wir diese Proportionaltheile mittelst der numerischen Werthe der Functionen selbst nehmen müssen. Deshalb habe ich in dem historischen Theile meiner Tafeln von 1870 gesagt, dass ich leider die Ansicht des Herrn Stader[6]) nicht theilen

kann, und dass das wirkliche Verdienst, welches er in dieser Arbeit seines Lehrers erblickt, in den verschiedenen darin enthaltenen neuen Anwendungen besteht.

Während der zwischen der Veröffentlichung der Gudermann'schen und meiner Tafeln verflossenen Zeit veröffentlichte Hoüel ein interessantes Werk unter dem Titel: Recueil de formules et de tables numériques[7]. Die Tafel XIV dieses Werkes hat viele Analogie mit den meinigen. Er legt in der Einleitung zu seinem Werke die Einrichtung seiner Tafeln kurz dar. Auf Doppelseiten enthält diese Tafel neben einander die natürlichen Werthe und die Logarithmen der Kreisfunctionen von $\tau = 0^q$ bis $\tau = 0^q.500$, die Werthe der entsprechenden doppelten hyperbolischen Sectoren, welche er mit $u$ bezeichnet, jene von $Mu$ (wo $M$ der Modul der gewöhnlichen Logarithmen ist), und endlich aller hyperbolischen Functionen und deren Logarithmen mittelst der Relationen

$$sin\,\tau = tagh\,u,\quad cosec\,\tau = \frac{1}{tagh\,u},\quad tag\,\tau = sinh\,u,\quad cotg\,\tau = \frac{1}{sinh\,u},$$
$$sec\,\tau = cosh\,u,\quad cos\,\tau = \frac{1}{cosh\,u}.$$

Der Autor bemerkt dann nebenbei, dass man mit seinen Tafeln die numerischen Werthe von $e^u = cosh\,u + sinh\,u$ und $e^{-u} = cos\,h\,u - sinh\,u$ leicht bestimmen könne. Sein Argument schreitet nach Hunderteln des Quadranten weiter, und obgleich dieses öfters weniger bequem, als die Sexagesimaltheilung ist, so bietet es doch bei vielen Anwendungen bemerkenswerthe Vortheile. Im Ganzen bieten die Tafeln Hoüel's einen Fortschritt vor denjenigen Gronau's.

---

Nun spreche ich von denjenigen, welche ich gegenwärtig berechne. Da Hoüel die Güte hatte, mir die grossen astronomischen und hydrographischen Tafeln des Prof. Bagay[8]) zu schenken, welche in den Werthen des gewöhnlichen Winkels $\varphi$ von Sexagesimalsecunde zu Sexagesimalsecunde weiter schreiten, so kann ich mittelst derselben die meinigen mit einem grossen Grad von Genauigkeit entwerfen. Trotzdem hätte ich für sehr kleine doppelte hyperbolische Sectoren $\omega$ bei $cosh$ die von mir erstrebte Genauigkeit nicht erreichen können, wenn ich nicht von der bekannten Formel $cosh\,\omega = sec\,\tau = \sqrt{1 + tag^2\tau}$ Gebrauch gemacht hätte. Das Argument $\omega$ fängt von 0 an und schreitet beständig um $\frac{1}{10000}$ weiter; die lineare Einheit ist die reelle Halbaxe; es sind die entsprechenden Werthe von $\tau$ berechnet und den Logarithmen der hyperbolischen Functionen stehen ihre natürlichen Werthe gegenüber. Zu dieser Einrichtung bewogen mich die Anforderungen der Praxis und die verschiedenen Formen, welche sich für die logarithmische Berechnung eignen oder nicht eignen. Die Einrichtung ist folgende. Auf der linken Seite befinden

sich: $\omega$, $log\,\omega$, $log\,sinh\,\omega$, $log\,cosh\,\omega$, $log\,tagh\,\omega$; auf der rechten: $\omega$, $sinh\,\omega$, $cosh\,\omega$, $tagh\,\omega$, $Amp\,\tau$. Die Tafeln geben auch auf der linken Seite für das etwaige Bedürfniss die Logarithmen der natürlichen Zahlen.

Die von mir zur Bestimmung der Werthe von $\tau$ unter anderen entsprechenden Functionen benützte Formel war folgende:

$$\omega = \frac{log\,tag\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}{log\,e}.$$

Diese Formel giebt $\tau$, und wenn dieses bekannt ist, haben wir die Relationen

$$sinh\,\omega = tag\,\tau, \quad cosh\,\omega = \frac{1}{cos\,\tau} = sec\,\tau, \quad tagh\,\omega = sin\,\tau;$$

in den Fällen, wo $\omega$ klein ist, benützte ich zur Probe die bekannten Formeln

$$cosh\,\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad sin\,h\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2},$$

wo $e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1.2} + \ldots$, $e^{-\omega} = 1 - \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1.2} - \ldots$ ist.

Um eine Idee meines bei der Einrichtung dieser Tafeln befolgten Verfahrens zu geben, setze ich einen Theil derselben hier bei.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\omega$ . . . . . . . . . . . | 0,0270 | 0,0271 | 0,0272 | 0,0273 |
| $log\,\omega$ . . . . . . . . . . | $\bar{2}$,4313638 | $\bar{2}$,4329693 | $\bar{2}$,2345689 | $\bar{2}$,4361626 |
| $log\,log\,e$ . . . . . . . . | $\bar{1}$,6377843 | $\bar{1}$,6377843 | $\bar{1}$,6377843 | $\bar{1}$,6377843 |
| $log\,log\,Tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\tau}{2}\right)$ | $\bar{2}$,0691481 | $\bar{2}$,0707536 | $\bar{2}$,0723532 | $\bar{2}$,0739469 |
| $log\,Tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$ . . . | 0,0117260 | 0,0117694 | 0,0188128 | 0,0118562 |
| $\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}$ . . . . . . . . | 45°46′24″,238 | 45°46′36″,548 | 45°46′44″,857 | 45°46′55″,163 |
| $\tau$ . . . . . . . . . . . . . | 1°32′48″,476 | 1°33′09″,096 | 1°33′29″,714 | 1°33′50″,326 |
| $log\,Senh\,\omega = log\,Tan\,\tau$ | $\bar{2}$,4314167 | $\bar{2}$,4330228 | $\bar{2}$,4346227 | $\bar{2}$,4362163 |
| $Sinh\,\omega$ . . . . . . . . . | 0,0270033 | 0,0271033 | 0,0272034 | 0,0273334 |
| $log\,Cosh\,\omega = log\,Sec\,\tau$ | 0,0001583 | 0,0001595 | 0,0001607 | 0,0001618 |
| $Cosh\,\omega$ . . . . . . . . | 1,0003643 | 1,0003670 | 1,0003697 | 1,0003724 |
| $log\,Tanh\,\omega$ . . . . . . | $\bar{2}$,4312584 | $\bar{2}$,4328633 | $\bar{2}$,4344620 | $\bar{2}$,4360545 |
| $Tanh\,\omega$ . . . . . . . . | 0,0269934 | 0,0270934 | 0,0271933 | 0,0272932 |

Diese Methode kann die siebente Decimale um eine halbe Einheit zu gross oder zu klein ergeben; die sechste Decimale jedoch hat sich bei verschiedenen Anwendungen, welche ich in meinem Werke anführen werde und die ich mit Fleiss sowohl mit, als ohne hyperbolische Func-

tionen durchgeführt habe, als genau gezeigt. Ueberall habe ich die beiden letzten Ziffern rechts in jeder Colonne hinausgerückt, weil in der Regel fünf Decimalen mehr als hinreichend sind. Ebenso habe ich es in den Colonnen der Differenzen *D* gemacht, und bei den Werthen von $\tau$ habe ich zwei Decimalen angeschrieben, weil ich bemerkt habe, dass selbst in der Astronomie eine einzige genügt.

---

Schliesslich muss ich noch über den historischen Theil meines Werkes sprechen. Dieser muss eine grössere Ausdehnung, als derjenige in meinen Tafeln vom Jahre 1870 haben, weil in der Folge zwei interessante Werke über die hyperbolischen Functionen erschienen sind; das eine ist von Capitän Laisant[9]) und das andere von Dr. S. Günther[10]). Ich bin sicher, dass es dem Leser angenehm sein wird, wenn ich eine Andeutung über diese beiden Werke gebe.

Das Werk des Herrn Laisant besteht aus drei Theilen; der erste enthält die Trigonometrie der gleichseitigen Hyperbel. Er fängt damit an, die geometrischen Grössen der hyperbolischen Functionen mittelst geeigneter Figuren zu erklären und ihre gegenseitigen Beziehungen bei ein und demselben doppelten Sector $\omega$ aufzustellen, wobei, wie gewöhnlich, die reelle Halbaxe als Einheit angenommen ist. Indem er alsdann naturgemäss ihren analytischen Ursprung nimmt, bestimmt er alle trigonometrischen Relationen, Differentiale und Integrale der Functionen von $\omega$ und ihre Periodicität. Hier macht er mit Nutzen von der conjugirten Hyperbel Gebrauch, welche gewissermassen den Umfang der Curve um ihr Centrum ergänzt; dadurch, dass er $\frac{\pi}{2}i$ zu $\omega$ hinzufügt, geht er von einem Punkte $M$ der gegebenen gleichseitigen Hyperbel zum Punkt $M'''$ ihrer conjugirten über, und es sind die Functionen des letzteren in Bezug auf die Axe $YY$ geometrisch dieselben, als diejenigen des Punktes $M$ in Bezug auf die Axe $XX$.

Im zweiten Theile verfährt der Autor ebenso bezüglich einer beliebigen Hyperbel, und dieses veranlasst ihn, in analoger Weise die Ellipse zu behandeln. Der dritte Theil endlich enthält eine Reihe von interessanten Anwendungen in meisterhafter Behandlungsweise, welche zu ihrer numerischen Berechnung hyperbolische Tafeln nothwendig machen, die in sehr kleinen und gleichförmigen Intervallen des doppelten Sectors $\omega$ aufsteigen.

---

Herr Dr. S. Günther, Professor am Gymnasium zu Ansbach, fängt seine oben citirte Schrift mit einer historisch-bibliographischen Einleitung an und erweist mir die Ehre, diese fast gänzlich auf den historischen Theil meiner Tafeln von 1870 zu gründen, nur dass er die Fähigkeit

besitzt, denselben durch die umfangreiche Kenntniss, welche ihm (wie er selbst sagt) das genaue Studium aller Autoren dieser Doctrin, hauptsächlich Mayer's und Riccati's gebracht hat, zu erweitern. Dem Letzteren legt er das Verdienst der Gründung der hyperbolischen Trigonometrie bei, während nach meiner Auseinandersetzung dieses auch Mayer zugehört. Er erwähnt auch des Ferroni in ehrenhafter Weise und sagt (S. 19), „dass Barsotti und Forti dem meisterhaften Werk des berühmten Florentiners[11]) das verdiente Lob zu Theil werden liessen, welcher von den Geschichtsschreibern (und, wie ich beifüge, auch von den mir bekannten grossen biographischen Wörterbüchern) vergessen wurde".

In Bezug auf das Verdienst Newton's um diese Theorie sagte ich, dass Newton, obgleich er keine Ahnung von der heutigen Theorie der hyperbolischen Functionen hatte, dennoch den Keim dazu legte, und auf dieser Thatsache bin ich bestanden, weil meines Wissens kein Schriftsteller sein Augenmerk darauf gerichtet hatte. Dass dieses mein Urtheil nicht irrig war, bestätigt mir Dr. Günther im § 3 seines Werkes, wo er sich so ausdrückt: „Dem Forti gebührt das Verdienst, die unbewusste Ahnung, welche Newton von den hyperbolischen Functionen hatte, als der Erste hervorgehoben zu haben."

In der That finden wir in dem unsterblichen Werke: Philosophiae naturalis principia mathematica lib. II prop. VIII, dass Newton nach seinem Lemma, in welchem er die Fundamente der Differentialrechnung, von ihm Fluxionsrechnung genannt, darlegt, von dem Auf- und Absteigen der Körper in Mitteln, welche proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit Widerstand leisten, spricht, und dass er die Geschwindigkeit eines aufsteigenden Körpers durch die Tangente eines Kreissectors darstellt, die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers dagegen durch die Tangente eines hyperbolischen Sectors. In Prop. IX beweist er, dass von diesen Sectoren der erste proportional ist: der von dem Augenblick seines vertikalen Aufsteigens bis zu dem Augenblick, wo er zu steigen aufhört, verflossenen Zeit; der zweite dagegen proportional der Zeit, welche zwischen dem Augenblick seines Fallens und seiner Zurückkunft zu dem Punkte, von dem er aufwärts geworfen wurde, verflossen ist. Nun bemerke man, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit, nach der angenommenen Hypothese, giebt, bekanntlich ist

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g'.\left(1 \pm \frac{v^2}{k^2}\right).$$

In dieser Gleichung sind die vertikalen Ordinaten von oben nach unten gezählt; $v$ bezeichnet die der Zeit $t$ entsprechende Geschwindigkeit des Körpers, $g'$ die dem widerstehenden Mittel entsprechende Beschleunigung und $k$ die Geschwindigkeit, welche Huyghens Endgeschwindigkeit

nennt. Man sieht bald, dass Newton, nach dem Gebrauche jener Zeit, in welcher die Infinitesimalrechnung in einem Werke von solcher Wichtigkeit, wie die Principien, noch nicht als Beweismittel zugelassen wurde, das Integral obiger Gleichung in eine geometrische Construction übersetzt hat, welches, wenn man die Zeit von dem Moment an zählt, in welchem die Geschwindigkeit Null ist, durch eine der beiden Formeln $v = k.\log \frac{g'}{k} t$, $v = k.\operatorname{tagh} \frac{g'}{k} t$ gegeben ist, je nachdem man von den positiven oder negativen Zeichen Gebrauch macht.

Nun schliesst Dr. Günther dasselbe, indem er zeigt, dass die Werthe der von Newton bei der Auflösung dieses Problems angewandten Coordinaten $x$ und $y$ die Relation $x^2 - y^2 = \cos^2 h - \sin^2 h = 1$ liefern, welches die Fundamentalgleichung der hyperbolischen Functionen ist. Alle theoretischen Theile von Wichtigkeit, welche in den Memoiren der älteren und neueren Schriftsteller über die hyperbolischen und elliptischen Functionen enthalten sind, hauptsächlich in denjenigen von Jacobi, Gauss, Mossotti, in dem Werke Laisant's und in dem meinigen, sind von Dr. Günther ausführlich dargelegt, einige in kritischer Behandlungsweise, andere mit numerischen Anwendungen, und immer mit einer an Skrupulosität grenzenden Genauigkeit.

Bezüglich der Brauchbarkeit des Arguments $\varphi$, worauf sich meine Tafeln von 1870 gründen, spricht er sich günstig für meine Gründe aus, denn indem er auf die Einwürfe des Bellavitis anspielt, drückt er sich so aus: „Forti giebt die von seinem Gegner vorgebrachten Vorwürfe an und zugleich legt er seine Replik dar, welche uns sehr überzeugend scheint." Er bereichert auch im letzten Theile sein Werk mit Anwendungen auf die Hyperbel, die Ellipse und die Cykloide, und behandelt die von Anderen gemachten Anwendungen mit unparteiischer Kritik. So kommt er z. B., bei der Besprechung meiner Anwendungen, auf die loxodromische Linie und schreibt: „Der erste Mathematiker, welcher die Verwendbarkeit der Hyperbelfunctionen für die numerische Behandlung dieser Formeln erkannte, war Forti. Derselbe schliesst seine Betrachtungen jedoch unmittelbar an die Mercator'sche Abbildung des bezüglichen loxodromischen Dreiecks an, was an sich keineswegs nothwendig ist." Aber auch ich habe dieses bemerkt, wie man aus der Methode schliessen kann, die ich im ersten Theile des ersten Problems auf S. 129 eingeschlagen habe und die ich offenbar bis zu Ende hätte weiterführen können. Aus der Loxodromie, der nach zwei Methoden durchgeführten Auflösung der sphärischen Dreiecke (S. 112) und aus der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades geht klar hervor, dass ich immer von den hyperbolischen Functionen Gebrauch zu machen suchte und dass ich stets bestrebt war, die Brauchbarkeit meiner nach $\varphi$ geordneten Tafeln nachzuweisen.

Ich schliesse nun mit der Bemerkung, dass, wenn meine neuen Tafeln, von denen ich hier eine Probe vorlege, allen Anforderungen der Mathematiker genügen, mir der Gedanke an die Mühe, welche ich bisher hatte und welche ich bis zur Vollendung noch haben werde, angenehm sein wird; und weil die Liebe zur Wissenschaft jede günstige Voreingenommenheit für die eigenen Ideen zum Schweigen bringen muss, so erkläre ich mich bereit, aus den Kritiken, welche nach Vorlegung dieses Entwurfs mir zu Gesicht kommen sollten, Nutzen ziehen zu wollen.

---

1) Archiv der Mathematik und Physik, herausgeg. v. Joh. Aug. Grunert, Professor zu Greifswald. 1864, Theil XLI.

2) Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sectoren.

3) Prof. Gronau und ich überschickten uns gegenseitig unsere Werke, und dieser schrieb mir, dass sich unsere Tafeln weder gegenseitig überflüssig machen, noch widersprechen.

4) Tavole dei logaritmi dei numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche, precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente. Torino, G. B. Paravia e C. 1870.

5) Rendiconto della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Giugno 1867.

6) Annali delle scienze matematiche e fisiche del Prof. Tortolini. Tomo II.

7) Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 1866.

8) Paris, Firmin Didot père et fils, 1829. Édition stéréotype.

9) Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome X, 1875.

10) Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen, theilweise auf Grund freier Bearbeitung von Laisant's „Essai sur les fonctions hyperboliques“ und Forti's „Tavole logaritmiche“ dargestellt von Dr. S. Günther. Halle a. S., 1881.

11) Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis teoria, nova metodo pertractata, auctore Petro Ferronio.

| ω. | log ω. | D. | log Senh ω. | D. | log Cosh ω. | D. | log Tanh ω. | D. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0270 | $\bar{2}$,43136 38 | | $\bar{2}$,43141 67 | | 0,00015 83 | 12 | $\bar{2}$,43125 84 | |
| 0,0271 | $\bar{2}$,43296 95 | | $\bar{2}$,43302 28 | | 0,00015 95 | 12 | $\bar{2}$,43286 33 | |
| 0,0272 | $\bar{2}$,43456 89 | | $\bar{2}$,43462 27 | | 0,00016 07 | 11 | $\bar{2}$,43446 20 | |
| 0,0273 | $\bar{2}$,43616 26 | | $\bar{2}$,43621 63 | | 0,00016 18 | 12 | $\bar{2}$,43605 45 | |
| 0,0274 | $\bar{2}$,43775 06 | | $\bar{2}$,43780 52 | | 0,00016 30 | 12 | $\bar{2}$,43764 22 | |
| 0,0275 | $\bar{2}$,43933 27 | | $\bar{2}$,43938 78 | | 0,00016 42 | 12 | $\bar{2}$,43922 36 | |
| 0,0276 | $\bar{2}$,44090 91 | | $\bar{2}$,44096 45 | | 0,00016 54 | 12 | $\bar{2}$,44079 91 | |
| 0,0277 | $\bar{2}$,44247 98 | | $\bar{2}$,44253 57 | | 0,00016 66 | 12 | $\bar{2}$,44236 91 | |
| 0,0278 | $\bar{2}$,44404 48 | | $\bar{2}$,44410 11 | | 0,00016 78 | 12 | $\bar{2}$,44393 33 | |
| 0,0279 | $\bar{2}$,44560 42 | | $\bar{2}$,44566 10 | | 0,00016 90 | 12 | $\bar{2}$,44549 20 | |
| 0,0280 | $\bar{2}$,44715 80 | | $\bar{2}$,44721 16 | | 0,00017 02 | 12 | $\bar{2}$,44704 14 | |
| 0,0281 | $\bar{2}$,44870 63 | | $\bar{2}$,44876 40 | | 0,00017 14 | 13 | $\bar{2}$,44859 26 | |
| 0,0282 | $\bar{2}$,45024 91 | | $\bar{2}$,45030 72 | | 0,00017 27 | 12 | $\bar{2}$,45013 45 | |
| 0,0283 | $\bar{2}$,45178 64 | | $\bar{2}$,45184 42 | | 0,00017 39 | 12 | $\bar{2}$,45167 03 | |
| 0,0284 | $\bar{2}$,45331 83 | | $\bar{2}$,45337 73 | | 0,00017 51 | 13 | $\bar{2}$,45320 22 | |
| 0,0285 | $\bar{2}$,45484 49 | | $\bar{2}$,45690 44 | | 0,00017 64 | 12 | $\bar{2}$,45472 80 | |
| 0,0286 | $\bar{2}$,45636 60 | | $\bar{2}$,45642 54 | | 0,00017 76 | 12 | $\bar{2}$,45624 78 | |
| 0,0287 | $\bar{2}$,45788 19 | | $\bar{2}$,45793 89 | | 0,00017 88 | 12 | $\bar{2}$,45776 01 | |
| 0,0288 | $\bar{2}$,45939 25 | | $\bar{2}$,45945 34 | | 0,00018 00 | 13 | $\bar{2}$,45927 34 | |
| 0,0289 | $\bar{2}$,46089 78 | | $\bar{2}$,46095 89 | | 0,00018 13 | 13 | $\bar{2}$,46080 76 | |
| 0,0290 | $\bar{2}$,46239 80 | | $\bar{2}$,46245 66 | | 0,00018 26 | 12 | $\bar{2}$,46227 40 | |
| 0,0291 | $\bar{2}$,46389 30 | | $\bar{2}$,46395 56 | | 0,00018 38 | 13 | $\bar{2}$,46377 18 | |
| 0,0292 | $\bar{2}$,46538 29 | | 2,46544 56 | | 0,00018 51 | 13 | $\bar{2}$,46526 05 | |
| 0,0293 | $\bar{2}$,46686 76 | | 2,46692 77 | | 0,00018 64 | 12 | $\bar{2}$,46674 13 | |
| 0,0294 | $\bar{2}$,46834 73 | | $\bar{2}$,46841 13 | | 0,00018 76 | 13 | $\bar{2}$,46822 37 | |
| 0,0295 | $\bar{2}$,46982 20 | | 2,46988 66 | | 0,00018 89 | 14 | $\bar{2}$,46969 77 | |
| 0,0296 | 2,47129 17 | | $\bar{2}$,47135 35 | | 0,00019 03 | 12 | $\bar{2}$,47116 32 | |
| 0,0297 | 2,47275 64 | | $\bar{2}$,47281 81 | | 0,00019 15 | 13 | $\bar{2}$,47262 72 | |
| 0,0298 | $\bar{2}$,47421 63 | | $\bar{2}$,47428 26 | | 0,00019 28 | 13 | $\bar{2}$,47408 98 | |
| 0,0299 | $\bar{2}$,47567 12 | | $\bar{2}$,47573 46 | | 0,00019 41 | 13 | 2,47574 05 | |
| 0,0300 | $\bar{2}$,47712 13 | | $\bar{2}$,47718 53 | | 0,00019 54 | | $\bar{2}$,47698 99 | |
| ω. | Tanh = Tan φ. | D. | Sin τ = Tanh φ. | D. | Tan τ = Sinh. | D. | Sec τ = Cosh. | D. |

| ω. | *Sinh* ω. | *D.* | *Cosh* ω. | *D.* | *Tanh* ω. | *D.* | *Amp* τ. | *D.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0270 | 0,02700 33 | 10 00 | 1,00036 43 | 27 | 0,02699 34 | 10 00 | 1°32′48″,48 | 20″,62 |
| 0,0271 | 0,02710 33 | 10 01 | 1,00036 70 | 27 | 0,02709 34 | 9 99 | 1.33 09 ,10 | 20 ,61 |
| 0,0272 | 0,02720 34 | 10 00 | 1,00036 97 | 27 | 0,02719 33 | 9 99 | 1.33.29 ,71 | 20 ,62 |
| 0,0273 | 0,02730 34 | 10 00 | 1,00037 24 | 27 | 0,02729 33 | 10 00 | 1.33.50 ,33 | 20 ,62 |
| 0,0274 | 0,02740 34 | 10 01 | 1,00037 51 | 28 | 0,02739 32 | 9 99 | 1.34.10 ,95 | 20 ,62 |
| 0,0275 | 0,02750 35 | 10 00 | 1,00037 79 | 27 | 0,02749 31 | 9 99 | 1.34.31 ,57 | 20 ,62 |
| 0,0276 | 0,02760 35 | 10 01 | 1,00038 06 | 28 | 0,02759 30 | 9 99 | 1.34.52 ,19 | 20 ,62 |
| 0,0277 | 0,02770 36 | 10 00 | 1,00038 34 | 27 | 0,02769 29 | 10 00 | 1.35.12 ,81 | 20 ,62 |
| 0,0278 | 0,02780 36 | 10 01 | 1,00038 61 | 28 | 0,02779 29 | 9 99 | 1.35.33 ,43 | 20 ,62 |
| 0,0279 | 0,02790 37 | 9 98 | 1,00038 89 | 28 | 0,02789 28 | 9 97 | 1.35 54 ,05 | 20 ,57 |
| 0,0280 | 0,02800 35 | 10 02 | 1,00039 17 | 28 | 0,02799 25 | 10 01 | 1.36.14 ,62 | 20 ,67 |
| 0,0281 | 0,02810 37 | 10 01 | 1,00039 45 | 28 | 0,02809 26 | 10 00 | 1.36.35 ,29 | 20 ,61 |
| 0,0282 | 0,02820 38 | 10 00 | 1,00039 73 | 28 | 0,02819 26 | 9 98 | 1.36.55 ,90 | 20 ,61 |
| 0,0283 | 0,02830 38 | 10 01 | 1,00040 01 | 29 | 0,02829 24 | 10 00 | 1.37.16 ,51 | 20 ,60 |
| 0,0284 | 0,02840 39 | 10 00 | 1,00040 30 | 28 | 0,02839 24 | 9 99 | 1.37.37 ,11 | 20 ,65 |
| 0,0285 | 0,02850 39 | 10 00 | 1,00040 58 | 29 | 0,02849 23 | 9 99 | 1.37.57 ,76 | 20 ,61 |
| 0,0286 | 0,02860 39 | 9 99 | 1,00040 87 | 28 | 0,02859 22 | 9 98 | 1.38.18 ,37 | 20 ,68 |
| 0,0287 | 0,02870 38 | 10 02 | 1,00041 15 | 29 | 0,02869 20 | 10 01 | 1.38.38 ,95 | 20 ,67 |
| 0,0288 | 0,02880 40 | 10 01 | 1,00041 44 | 29 | 0,02879 21 | 9 99 | 1.38.59 ,62 | 20 ,61 |
| 0,0289 | 0,02890 41 | 9 98 | 1,00041 73 | 29 | 0,02889 20 | 9 99 | 1.39.20 ,23 | 20 ,58 |
| 0,0290 | 0,02900 39 | 10 03 | 1,00042 02 | 29 | 0,02899 17 | 10 02 | 1.39.40 ,81 | 20 ,67 |
| 0,0291 | 0,02910 42 | 10 00 | 1,00042 31 | 29 | 0,02909 19 | 9 99 | 1.40.01 ,48 | 20 ,61 |
| 0,0292 | 0,02920 42 | 9 99 | 1,00042 60 | 29 | 0,02919 18 | 9 99 | 1.40.22 ,09 | 20 ,58 |
| 0,0293 | 0,02930 41 | 10 02 | 1,00042 89 | 29 | 0,02929 17 | 9 99 | 1.40.42 ,67 | 20 ,66 |
| 0,0294 | 0,02940 43 | 10 01 | 1,00043 18 | 30 | 0,02939 16 | 10 00 | 1.41.03 ,33 | 20 ,62 |
| 0,0295 | 0,02950 44 | 9 98 | 1,00043 48 | 29 | 0,02949 16 | 9 96 | 1.41.23 ,95 | 20 ,57 |
| 0,0296 | 0,02960 42 | 10 01 | 1,00043 77 | 30 | 0,02959 12 | 10 00 | 1.41 44 ,52 | 20 ,62 |
| 0,0297 | 0,02970 43 | 10 03 | 1,00044 07 | 30 | 0,02969 13 | 10 01 | 1.42.05 ,14 | 20 ,67 |
| 0,0298 | 0,02980 46 | 9 98 | 1,00044 37 | 29 | 0,02979 13 | 9 97 | 1.42.25 ,81 | 20 ,57 |
| 0,0299 | 0,02990 44 | 10 00 | 1,00044 66 | 30 | 0,02989 10 | 9 99 | 1.42.46 ,38 | 20″,62 |
| 0,0300 | 0,03000 44 | | 1,00044 96 | | 0,02999 09 | | 1°43′07″,00 | |
| ω. | *cos* τ = *sech.* | *D.* | *cosec* τ = *coth.* | *D.* | *cot* τ = *cosech.* | *D.* | *sin* τ = *tanh.* | *D.* |

# Recensionen.

---

**Theorie der Bewegung und der Kräfte.** Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, bearbeitet von Dr. W. Schell, Professor am Polytechnikum Carlsruhe. II. Aufl., 1878.

Dieses rühmlichst bekannte Werk hat in zweiter Auflage manche Verbesserung und bedeutende Erweiterungen erfahren, die es in noch höherem Grade geeignet machen, durch seine umfassenden Gesichtspunkte, durch möglichste Allgemeinheit seiner Theorien für Technik und Wissenschaft völlig Erschöpfendes zu bieten. Von grossem Werthe in dieser neuen Auflage ist die sorgfältige Angabe der Literatur; nicht minder hervorzuheben ist die Vermehrung und Verbesserung der Figuren und des Inhaltsverzeichnisses. Die Anordnung des Ganzen hat einige Aenderung erfahren. Im ersten Theil wird als Grundlage eines grossen Theils der Mechanik die Geometrie der Strecken- und Werthpunktsysteme im Zusammenhang gegeben; der zweite Theil umfasst die früher den ersten Theil bildende Geometrie der Bewegung und die Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). Wir glauben dieser geänderten Eintheilung des Stoffes Beifall zollen zu dürfen. Umgearbeitet wurde die Lehre von der Beschleunigung im unveränderlichen System; neu ist in Theil 2 die Lehre von den Bewegungszuständen einiger veränderlichen Systeme. Auch in Theil 3 (Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz) und in Theil 4 (Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung) begegnen wir zahlreichen theilweisen Neubearbeitungen und mehreren ganz neuen Capiteln. So sind z. B. in Theil 3 Cap. 10 und in Theil 4 Cap. 8 die neueren Arbeiten von Robert Stawell Ball berücksichtigt (virtueller Coefficient, Cylindroid, reciprocale Axensysteme, Kinetik der Dynamen am unveränderlichen System); Theil 3 Cap. 11 (astatisches Gleichgewicht und astatische Aequivalenz) enthält die interessanten Forschungen von Darboux über das astatische Centralellipsoid. — An allen einzelnen Theilen des Werkes bemerkt man, wie eingehend der Verfsser sich der zweiten Auflage gewidmet hat; auch wo keine eigentliche Neubearbeitung stattfand, war er bemüht, da und dort durch präciseren Ausdruck, durch Beifügung weiterer Aufgaben sein Ziel in möglichster Vollendung zu erreichen.

Dietrich.

---

Maximilian Drossbach, **Kraft und Bewegung.** Halle, Pfeffer. 1879.

Der Verfasser geht davon aus, dass wir nicht materielle Dinge wahrnehmen, sondern die immateriellen Kräfte; die bewegenden Kräfte seien nichts Unsinnliches, nichts Metaphysisches — die Körper nichts Sinnliches, nichts Physikalisches. Nur ein kleiner Theil des Schriftchens beschäftigt sich mit Physikalischem, insbesondere mit der Lichtwellenlehre, die ganz verworfen wird. Die letzten Abschnitte behandeln die Probleme der Erkenntniss und der Freiheit. Die Hauptsache fällt also ausserhalb Mathematik und Physik.

P. Zech.

---

Weinberg, **Messung der Wellenlängen des Lichts.** Inaugural-Dissertation. Wien, Hölder. 1879.

Der Verfasser giebt eine Darstellung der Methoden, die Wellenlänge der Lichtarten vermittelst Interferenzstreifen zu messen. Nach einer Uebersicht über das von Fresnel, Wrede, Fizeau, Foucault, Esselbach und Stefan in dieser Hinsicht Geleistete wird die Methode Stefan's näher auseinandergesetzt. Der wesentliche Unterschied der vom Verfasser angewandten Methode von der Stefan's besteht in der Anwendung von Kalkspath statt Quarz. Es wird das von feinen Interferenzstreifen durchzogene Spectrum von Licht, das durch eine zur Axe senkrecht geschliffene Kalkspathplatte bei beliebigem, aber für alle Strahlen gleichem Einfallswinkel durchgeht, bei polarisirtem Lichte beobachtet und aus der Distanz der Streifen auf die Wellenlänge geschlossen. Die erhaltenen Werthe stimmen bis auf die Milliontel Millimeter mit den Resultaten von Angström.

P. Zech.

---

Glaser, **Beitrag zur Potentialtheorie.** Inaugural-Dissertation. Bonn, Georgi. 1880.

Es wird die Aufgabe behandelt, das Potential einer Vollkugel zu finden, deren Dichtigkeit eine ganze rationale Function der rechtwinkligen Coordinaten ist, und die Flächendichtigkeit einer concentrischen Kugeloberfläche zu bestimmen, welche auf Punkte ausserhalb gleiche Wirkung üben soll, wie die Vollkugel.

P. Zech.

---

Fleeming Jenkin, **Elektricität und Magnetismus.** Deutsch von Exner. Braunschweig, Vieweg. 1880.

Unter die „Text-books of science", die in England gegenwärtig erscheinen, gehört die 1878 in vierter Auflage erschienene Schrift von Fleeming Jenkin über „Elektricity and Magnetism". Jenkin ist

einer der hervorragendsten Kenner und Begründer der elektrischen wissenschaftlichen Technik, er macht in diesem Buche den Versuch einer populären Darstellung der Potentialtheorie, ohne jeden Aufwand von Rechnung, blos von der Definition des Potentials als Arbeitsgrösse ausgehend. Dem Uebersetzer gebührt das Verdienst, der originellen englischen Behandlung der Elektricitätslehre, die in Deutschland wenig bekannt ist, durch seine Uebersetzung weitere Verbreitung verschafft zu haben. Druck und Ausstattung lassen, wie wir das bei Vieweg gewöhnt sind, Nichts zu wünschen übrig.

P. Zech.

---

Rayleigh, **Theorie des Schalls.** Deutsch von Neesen. I. Band. Braunschweig, Vieweg. 1879.

Der Verfasser will in vorliegendem Werke eine zusammenhängende Theorie des Schalls geben, welche die wichtigsten Fortschritte enthält, die in neuerer Zeit von Mathematikern und Physikern in dieser Disciplin gemacht sind. Der vorliegende erste Band beschäftigt sich in einer Einleitung mit der Definition von Schall, Ton und Klang, geht dann zu den harmonischen Schwingungen über (Schwingungen, die durch eine Kreisfunction der Zeit bezeichnet sind), und behandelt ihre Zusammensetzung und Zerlegung. Es werden hierauf Schwingungen mit einem Grade von Freiheit betrachtet, d. h. solche, die nur nach einer bestimmten Richtung vor sich gehen, Stimmgabeln, belastete Saiten oder Federn; nachher schwingende Systeme im Allgemeinen, das Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen und die erzwungenen Schwingungen. Alsdann werden die Transversalschwingungen der Saiten ausführlich behandelt, ferner die Longitudinal- und Torsionsschwingungen der Stäbe und deren Transversalschwingungen. Die Schwingungen von Membranen und Platten schliessen den ersten Band. Das Werk nimmt vielfach Bezug auf die theoretische Physik von Thomson und Tait, es werden häufig nöthige Formeln nicht abgeleitet, sondern einfach dort entlehnt, so dass ein vorhergehendes Studium der einschlagenden Theile jener Schrift zu empfehlen ist. Die Uebersetzung ist gelungen, die Ausstattung sehr schön.

P. Zech.

---

Kohlrausch, **Praktische Physik.** 4. Aufl. Leipzig. 1880.

Das verdienstliche Werk des Verfassers ist in den physikalischen Laboratorien wohl bekannt. Die vierte Auflage bezeugt, dass es mehr und mehr sich dort einbürgert. Neu ist die Bestimmung der Brechungsverhältnisse des Lichts, der optischen Axen eines Krystalls, Widerstandsbestimmung eines zersetzbaren Leiters und elektrostatische Messungen. Auch die Tabellen sind beträchtlich erweitert.

P. Zech.

---

SALCHER, **Elemente der theoretischen Mechanik.** Wien, Gerold. 1881.

Ein Lehrbuch für die Zöglinge der österreichischen Marineakademie Fiume, welche mit den Elementen der Differential- und Integralrechnung vertraut sind. Es ist eine kurze, wesentlich analytische Darstellung der Dynamik, Kinematik (auf wenigen Seiten) und Statik. Auch die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen wird behandelt und in einem Anhang die Bewegungswiderstände und die Elasticität. Die Präcision des Ausdrucks lässt Manches zu wünschen übrig: z. B. §§ 39, 46, 47 (man nennt die Rotation eines Punktes auch Schraubenbewegung), die Definition von Dichte in § 89 u. s. w.

P. ZECH.

---

FRITSCH, **Stoss zweier Massen unter Voraussetzung ihrer Undurchdringlichkeit behandelt.** Programm der Realschule Königsberg. 1876.

Wenn zwei beliebige Massen mit beliebigen Geschwindigkeiten und Richtungen gegen einander stossen, welche Geschwindigkeit werden sie nach dem Stosse haben, wenn von beiden Massen nur angenommen wird, dass sie undurchdringlich und ausgedehnt sind? Das ist die Frage, die der Verfasser sich vorlegt. Er kommt zu dem Satze, dass die relativen Geschwindigkeiten beider Massen vor und nach dem Stosse in bestimmtem Verhältnisse stehen müssen, und durch Anwendung dieses Satzes zu der Folgerung, dass die Atome nur praktisch, aber nicht theoretisch von unveränderlicher Gestalt sind; sie erleiden Formänderungen, aber nur unendlich kleine. Weitere Folgerungen und Vergleiche giebt der Verfasser leider nicht. Er zeigt nur noch, dass seine Gleichungen unmittelbar für alle Stösse die Erhaltung der lebendigen Kraft verlangen. Wie sich das mit der sonstigen Stosstheorie verträgt, oder warum diese falsch oder unvollständig ist, konnten wir nicht finden.

P. ZECH.

---

**Die Tachymetrie,** mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichý und Starke. Für Terrain- und Trace-Studien bearbeitet von ANTON SCHELL, k. k. Professor. Mit 2 Tafeln und 27 Figuren. 8⁰. IV, 93 S. Wien, L. W. Seidel & Sohn. 1880.

In der Einleitung werden zunächst die Formeln entwickelt, welche die Entfernung und die relative Höhe eines Punktes berechnen lassen aus dem Winkel, unter dem ein der Länge nach gekannter Abschnitt einer dort senkrecht aufgestellten Latte erscheint, und aus der Neigung des Zielstrahls nach dem Anfangspunkte dieses Lattenabschnitts gegen die Horizontale. Dann wird die Theorie des anallatischen Fernrohrs entwickelt in engem Anschluss an ältere Darstellungen. Anschaulicher und zugleich kürzer liesse sich darthun, dass jede centrirte Linsenzusammen-

stellung, so gut wie eine einfache Linse, einen anallatischen Punkt besitzt, d. h. dass die Bildgrösse aller von diesem Punkte aus unter gleichem Winkel erscheinender Gegenstände die gleiche ist. Wie bei einfacher Linse der vordere Brennpunkt der anallatische Punkt ist, so ist dieses bei einer Linsenzusammenstellung der vordere Brennpunkt der äquivalenten Linse, wobei diese an ihren wahren Ort, nämlich so gestellt gedacht wird, dass die mit ihr erhaltenen Bilder nach Grösse und Lage übereinstimmen mit jenen, welche mit der Linsenzusammenstellung selbst erhalten werden. Brennweite und Ort der äquivalenten Linse sind aber nach bekannten Regeln leicht aus den Brennweiten und Abständen der in der Zusammenstellung vorkommenden Linsen anzugeben. Bei den etwas umständlicheren Entwickelungen des Verfassers wird — ebenso wie an verschiedenen anderen Stellen seines Buches — vermisst die Angabe, dass genaue Ausdrücke durch Annäherungen ersetzt werden, und der Nachweis der Berechtigung dazu. So sind auf S. 11 die Formeln 9 und 10 ungenau, die damit eng zusammenhängenden 11 und 12 wieder genau.

Recht schätzenswerth sind die in der Einleitung enthaltenen ziemlich vollständigen Maassangaben hinsichtlich der Fernrohre, welche an den zwei Arten von Tachymetern, die in der Werkstätte der Herren Starke und Kammerer gefertigt werden, vorkommen.

Der zweite Theil der Schrift bringt in ganz zweckmässiger Auswahl und Ausdehnung das, was hinsichtlich der tachymetrischen Aufnahmen zu wissen nöthig ist. Der erste Theil aber beschreibt ein bestimmtes Tachymeter, das von Tichý und Starke, erklärt dessen Gebrauch, lehrt seine Prüfung und Berichtigung und erörtert schliesslich die Genauigkeitsgrenze der damit ausgeführten Messungen.

Das entfernungsmessende Fernrohr ist ein anallatisches nach Porro, welches anzuwenden eine nicht empfehlenswerthe Mode geworden ist. Bekanntlich wird durch Einführung einer Linse der anallatische Punkt in die Drehaxe des Fernrohrs verlegt. Durch die Einsatzlinse wird aber die Leistung des Fernrohrs hinsichtlich Helligkeit, Gesichtsfeldgrösse, Vergrösserung und Schärfe vermindert und grösstmögliche optische Leistungsfähigkeit ist doch eben Haupterforderniss des Fernrohrs. Worin besteht aber der ganze Vortheil? Darin, dass die Entfernungen sofort von der Instrumentenmitte an zählen, während bei gewöhnlichem Fernrohr (ohne Einsatz der sogenannten anallatischen Linse) die Zufügung einer leicht ermittelbaren Constanten, des Abstands der Instrumentenmitte vom vordern Brennpunkte des Objectivs, erforderlich ist. Benutzt man, was jedenfalls zweckmässig ist, für die Entfernungsberechnung Tabellen, so kann die Constante sofort eingerechnet sein, also jede Unbequemlichkeit vermieden werden und doch dem Fernrohre die möglichste Vollkommenheit gewahrt bleiben. Allerdings muss nicht unerlässlich das Fernrohr durch die anallatische Linse in all' den angegebenen

Beziehungen verschlechtert werden. Man könnte diese und die vorderste Linse des Fernrohrs so berechnen, dass ihre Zusammenstellung ein aplanatisch-achromatisches Objectiv bildete, und so wenigstens die Bildschärfe retten. Das ist aber leichter gesagt, als gethan, und meines Wissens nie geschehen. Das Collectivglas (bei Huyghens'schem, wie bei Ramsden'schem Ocular) ist als anallatische Linse deshalb nicht zu gebrauchen, weil seine Stellung je nach der Entfernung des angezielten Gegenstandes zu wechseln hat.

Bei dem Entfernungsmessen durch ein Fernrohr kann man die Bildgrösse stets dieselbe lassen (unveränderlicher Fadenabstand) und aus der veränderlichen Gegenstandsgrösse die Entfernung beurtheilen, oder man kann die Gegenstandsgrösse unverändert lassen und aus der veränderlichen Bildgrösse auf die Entfernung schliessen. Die Bildgrösse wird entweder an einer Mikrometertheilung, die an Stelle des Fadenkreuzes liegt, geschätzt (was im Allgemeinen nicht genügend genau ist), oder durch messende Aenderung des Fadenabstands mit Hilfe einer Mikrometerschraube (oder ähnlich) ermittelt. Gegen dieses Verfahren lässt sich grundsätzlich einwenden, dass es richtiger ist, nur mit dem Auge zu beobachten, als auch noch mit der Hand, wenn dies auch durch die besten Hilfsmittel unterstützt wird, die Fäden zu verschieben, so dass sie einen bestimmten Lattenabschnitt zwischen sich fassen. Denn abgesehen von der erheblichen Unbequemlichkeit, welche das Schwanken der Latte und die Verstellung der Libellen durch das Angreifen des Fernrohrs bedingen, wird nebst genauer Beobachtung mit dem Auge auch noch Geschicklichkeit und Sicherheit der Hand, Ruhe und Geduld, die bei lästiger Witterung im Freien manchmal mangeln, verlangt. Bei dem Tachymeter von Tichý und Starke ist weder der Abstand der Fäden vom Fernrohr constant, noch die Gegenstandsgrösse (der Lattenabschnitt), sondern beide sind veränderlich, ja für die Ermittelung der Entfernung und für jene der relativen Höhe desselben Punktes werden zwei verschiedene Fadenabstände und zwei verschiedene Lattenabschnitte verwendet. Ausser dem allgemeinen, grundsätzlichen Einwande gegen die Fadenverstellung kommt die recht umständliche Handhabung in Betracht.

Der Verticalkreis des Tichý-Starke'schen Tachymeters hat drei verschiedene Theilungen. Die eigentliche Winkeltheilung wird regelmässig gar nicht gebraucht, sondern nur die zwei anderen Theilungen, welche Werthe von Functionen des Höhenwinkels und des diastometrischen Winkels oder der Umdrehungszahl und Ganghöhe der den Faden verschiebenden Mikrometerschraube sind; diese Werthe sind durch näherungsweises Auflösen transcendenter Gleichungen zu gewinnen und dann nach den Abmessungen des Kreises in Bogenlängen umzurechnen und aufzutragen.

Der Gebrauch des in Rede stehenden Tachymeters (abgesehen von der Bestimmung des Horizontalwinkels, die nichts Besonderes bietet) ist

folgender. Der eine (unbewegliche) Faden wird auf einen bestimmten, den Nullpunkt der Latte gerichtet, dann, nachdem die Libelle scharf zum Einspielen gebracht ist, an den zwei genannten Theilungen des Verticalkreises abgelesen, welches die zwei successive der Mikrometerschraube zu gebenden Einstellungen sind. Man bewirkt nun die eine, richtet bei spielender Libelle den fixen Faden auf den Nullpunkt der Distanzplatte und liest ab, wo der eingestellte zweite Faden auftrifft. Nach hergestelltem zweiten der vorhin abgelesenen Mikrometerschraubenstände wird zur Ermittelung des zweiten Elements, abermals mit spielender Libelle, der Nullpunkt der Latte angezielt und der entsprechende Lattenabschnitt abgelesen. Jetzt bedarf es nur mehr der Multiplication der abgelesenen Lattenabschnitte mit einfacher Zahl (100 oder Bruchtheile von 100), um die Entfernung, sogleich auf den Horizont bezogen, und die relative Höhe zu finden. Wie man sieht, wird ziemlich viel Zeit, Geduld und Geschicklichkeit aufgewendet, um mittels Operationen am Instrumente, auf dem Felde selbst, die für die räumliche Bestimmung des Punktes erforderlichen Zahlenwerthe zu gewinnen. Aehnliches, nämlich Verarbeitung der Messungselemente zu den in Frage stehenden Ergebnissen, leisten auch das Tachymeter von F. Kreuter, das Tachygraphometer von C. Wagner u. a. Es ist aber wohl allgemein anerkannt, dass es nicht empfehlenswerth ist, die allerdings lästige Hausarbeit (der Berechnung u. s. w.) bedeutend zu verkürzen dadurch, dass man die kostbare Arbeitszeit auf dem Felde verlängert. Da sich auch Herr Schell in diesem Sinne auf S. 8 der Schrift äussert, sollte er folgerichtig die Einrichtung des Tichý-Starke'schen Tachymeters nicht befürworten.

Benutzt man ein einfaches Fernrohr mit constanter Bildgrösse (statt der immerhin einiger Veränderung unterworfenen Fäden dient besser ein dünnes parallelebenes Glasplättchen, auf welchem zwei feine Parallellinien aufgetragen sind; ein dritter, mittlerer Strich ist sehr angenehm, wenn auch nicht durchaus erforderlich), so hat man dasselbe nur auf die senkrecht gehaltene Latte in beliebiger Höhe derselben zu richten, die zwei durch die Fäden getroffenen Theilstriche an der Latte und dann die Höhenwinkel am genügend fein getheilten Verticalkreise abzulesen, und besitzt sofort die Elemente zur Berechnung der Entfernung und der relativen Höhe. Da dieses Geschäft so schnell erledigt ist, wird man es wiederholen (etwa mit etwas anderer Neigung des Fernrohrs), um werthvolle Bestätigungen zu gewinnen. Die Berechnung macht man zu Hause, wobei man zweckmässig den Rechenschieber verwendet, noch besser Tabellen benutzt, oder, wenn man Liebhaberei dafür hat, sich auch eines geeigneten Diagramms bedient. Sei noch erwähnt, dass bei diesem Verfahren die unvermeidliche Schwankung der Latte weniger, als bei irgend anderer Anordnung stört; die beiden Enden des Lattenabschnitts sind gleichzeitig sichtbar und man erlangt bald die Geschicklichkeit, ähnlich

wie der Schütze ein bewegtes Ziel zu treffen vermag, den Augenblick zu erhaschen, in welchem der eine Faden genau auf einem Hauptstriche der Theilung steht, und die Stellung des andern dabei sicher abzulesen.

Der Verfasser versäumt nicht, hervorzuheben, dass bei dem Gebrauche des von ihm beschriebenen Tachymeters (wie bei allem Nivelliren und Höhenmessen) ein scharfes Einstellen des Oculars auf die richtige Entfernung vom Objectiv erforderlich ist, erörtert aber nicht die Frage, ob das bei dem in Rede stehenden Fernrohre auch möglich ist. Es liegen aber die beiden Fäden nicht in derselben zur geometrischen Axe des Fernrohrs rechtwinkligen Ebene, sie können also nicht gleichzeitig scharf mit dem reellen Bilde der Latte zusammenfallen, auch nicht gleichzeitig in der zur schärfsten Wahrnehmung erforderlichen Entfernung von der Ocularlupe stehen. Hieraus entspringt eine Unsicherheit und Ungenauigkeit der Messung, welche zahlengemäss zu bestimmen nicht wohl möglich ist, weil das Auge der einzelnen Beobachter eine verschiedene Anpassungsfähigkeit (durch Uebung und Schulung veränderlich) besitzt, hauptsächlich aber der geschickte und vorsichtige Beobachter dadurch sehr viel bessere Ergebnisse erlangt, dass er sein Auge auf die geometrische Axe des Fernrohrs zu bringen versteht, nicht seitlich davon, wie der minder gewandte Beobachter thut. Immerhin mag die Angabe einiger Zahlen nicht ganz ohne Werth sein. Die Brennweite des Oculars wird zu 8,77 mm angegeben; für einen Beobachter von der deutlichsten Sehweite von 250 mm muss der Faden also 8,473 mm vor dem Ocular stehen. Steht der eine Faden richtig, so ist der andere zu nahe oder zu entfernt, und weniger als 0,2 mm wird das nicht sein, da die eine Fadenplatte vor dem andern Faden, ohne diesen zu berühren, verschoben werden muss. Das virtuelle Bild dieses zweiten Fadens entsteht dann in 146,0 oder 784,2 mm Entfernung, also um 104 oder 534 mm von dem Orte des virtuellen Bildes des ersten Fadens entfernt, je nachdem der zweite dem Ocular um die 0,2 mm zu nahe oder zu entfernt steht. Bringt man keinen der Fäden in die genau richtige Entfernung vom Ocular, sondern den einen um 0,1 mm zu nahe, den andern um ebensoviel zu entfernt, so sind die Bildörter 185 und 381 mm vor dem Ocular, also 196 mm von einander entfernt. Der geringste Abstand der Bildörter ist 104 mm. Ein scharfes Sehen der Fäden wird hierdurch erschwert, wichtiger aber ist die Gefahr einer Parallaxe, da nie beide Fäden zugleich mit dem reellen Bilde der Distanzlatte zusammenfallen können.

Dass das Tachymeter in den Einzelheiten seines Baues vieles Zweckmässige und Gute enthält, ist bei dem wohlbegründeten Rufe der Werkstätte, aus der es hervorging, nicht anders zu erwarten gewesen. Nur ist mit unklar geblieben, wie die Nonien eingerichtet sein können, die nach der Beschreibung $0{,}01^0$ (Sexagesimaltheilung) angeben sollen, wäh-

rend die Haupttheilung auf 10 Minuten (Sechstelgrade) geht. Auffallend ist die Weglassung einer Bussole, welche bei tachymetrischen Arbeiten sehr grosse Bequemlichkeit und Vortheile bietet. Der für die Weglassung angegebene Grund ist nicht einleuchtend, denn einmal kann man das Eisen bei einem solchen Instrumente recht wohl entbehren, wie viele Feldmessgeräthe darthun; dann aber auch kann man ganz unbedenklich central gelegene Theile (wie die Befestigungsstange) aus Eisen oder Stahl machen, weil dadurch ebenso wenig eine Ablenkung der Magnetnadel aus dem Meridian verursacht wird, wie durch die stählerne Spitze, auf welcher sie gewöhnlich schwebt. — Die Ausstattung des Tachymeters Tichý-Starke ist ohne Sparsamkeit gemacht, es kommen z. B. vier Libellen, wovon eine eine Reversionslibelle ist, vor, der Preis kann demgemäss kein geringer sein.

Das Tachymeter Tichý-Starke trägt nicht in sich die Möglichkeit einer scharfen Prüfung und Berechtigung, sondern es sind Hilfsgeräthe — Verfasser empfiehlt ein Stampfer'sches Nivellirinstrument mit Messschraube dazu — erforderlich. Die wichtigste Prüfung scheint die der Richtigkeit der zwei empirischen Theilungen am Verticalkreise für die erforderlichen Schraubenstellungen zur Entfernungs- und zur Höhenmessung. Diese durchzuprüfen, scheint kein anderes Mittel vorhanden zu sein, als im Felde sehr zahlreiche Messungen an Punkten auszuführen, deren Entfernung und relative Höhe bereits anderweitig genau gekannt sind.

Auf die Auswerthung der Genauigkeitsgrenzen ist im Schriftchen verhältnissmässig viel Raum verwendet. Der Berichterstatter kann sich aber nicht ganz einverstanden erklären mit der Art, wie die Untersuchung geführt wird. Da unerwähnt bleibt, wo und wann ein Annäherungswerth an Stelle der genauen Formel gesetzt wird, so lässt sich nicht entscheiden, ob ein Irrthum bei dem Differentiiren vorgefallen ist oder ungerechtfertigte Vernachlässigung von Gliedern stattgefunden hat. Das Letztere ist wahrscheinlich. Beweis dafür: S. 43 ist gesagt, für $h = 30^0$ (und $\gamma = 1:500$) berechne sich

$$S_0 = \frac{Cos^2 h}{100\gamma}\left(1 - \frac{Sin h . Cos h}{100}\right) \text{ zu } 3{,}750$$

und

$$s_0 = \frac{Sin h . Cos h}{100\gamma}\left(1 - \frac{k\, Sin^2 h}{100}\right) \text{ zu } 2{,}165.$$

Das trifft aber nur zu, wenn man die negativen Glieder in der Klammer weglässt; diese beibehaltend, findet man $S_0 = 3{,}734$ und $s_0 = 2{,}165\left(1 - \frac{k}{400}\right)$. Es ist aber $k$ eine ganze Zahl, der grösstmögliche Werth von $s_0$ also nach genauer Rechnung 2,1596.

Aus $D = \left(\frac{Cos^2 h}{100 \gamma S_0} - \frac{Sin\, h\, Cos\, h}{100}\right) 100\, L_0$ (S. 42) folgert Verfasser

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{\Delta S_0}{S_0},$$

während man bei richtiger Ableitung erhält

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{\Delta S_0}{S_0} \cdot \frac{1}{1 - \gamma S_0\, tg\, h}.$$

Aehnlich ungenau ist $\frac{\Delta H}{D}$ vom Verfasser angegeben. Die Anwendungen dieser Formeln leiden also an derselben Ungenauigkeit. Während auf S. 43 für $\Delta S_0 = \Delta s_0 = 0{,}001$, bei $h = 30^0$ angegeben wird, es sei $\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta H}{D} = -\frac{1}{3750}$, berechnen sich diese Grössen nicht gleich, sondern zu $-\frac{1}{3717{,}6}$ und $-\frac{1}{3730{,}3}$.

Ganz anders, als in dem Schriftchen angegeben ist, gestaltet sich mit den genauen Formeln der Einfluss der Ungenauigkeit im Höhenwinkel auf Entfernung und relative Höhe.

Man kann dem Schriftchen den Vorwurf nicht ersparen, stellenweise die für Darstellungen aus exacter Wissenschaft geforderte Sorgfalt vermissen zu lassen. Selbst die Zahlenrechnung ist nachlässig, z. B. S. 46 wird $\frac{1}{1155}$ angegeben statt $\frac{1}{1191}$ oder, wenn man statt des abgekürzten Werthes des Verfassers für $\sqrt{3}$ einen genaueren wählt, $\frac{1}{1190{,}87}$. Es ist Mangel an genauer Durchsicht, wenn die unrichtige Formel 5 auf S. 5, nämlich

$$\alpha'' = 206265 \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) \varphi$$

stehen geblieben ist; der Factor 206265 muss fort, denn $\alpha$ und $\varphi$ sind in demselben Maasse ausgedrückt; unmittelbar vorher sind die Tangenten dieser Winkel angegeben, wobei auch wieder nicht überflüssig gewesen wäre, zu bemerken, dass die Hälfte der angegebenen Brüche genau die Tangenten der halben Winkel ausdrücken.

Bohn.

---

Dr. Hermann Schapira, **Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihren Anwendungen.** Erster Theil, lineare homogene Cofunctionen; erste Abtheilung, Functionen einer Variabeln. (Russisch.) Odessa, bei Ulrich. 1881.

Indem der Verfasser von der Darstellung einer endlichen, eindeutigen und stetigen Function $f(z)$ in Gestalt einer Reihe

$$1)\qquad f(z)=\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty} a_\varepsilon z^\varepsilon$$

ausgeht, betrachtet er zwei Gruppen von Functionen (von ihm „Cofunctionen" genannt), die einerseits von der gegebenen Function $f(z)$ und andererseits von einer ganzen Zahl $n$ in folgender Weise abhängig sind.

Jede Cofunction der ersten Gruppe entsteht als Summe aller derjenigen, und nur derjenigen Glieder der Reihe 1), deren Exponenten der Congruenz

$$2)\qquad \varepsilon \equiv i \pmod n$$

genügen. Offenbar erhält man so $n$ verschiedene, den Werthen $i=0$, $1, \ldots (n-1)$ entsprechende Functionen, und der Verfasser nennt diejenige, welche einem gegebenen Werthe von $i$ entspricht, „die $i^{\text{te}}$ Partialfunction $n^{\text{ter}}$ Classe aus der Hauptfunction $f(z)$" und bezeichnet dieselbe mit $f_{n,i}(z)$, so dass

$$3)\qquad f_{n,i}(z)=\sum_{q=0}^{q=\infty} a_{qn+i}\, z^{qn+i},$$

wobei er $n$ den Classenindex und $i$ den Anfangsindex oder Ordinalindex nennt.

Nimmt man $e^z$ als Hauptfunction, so sind die $n$ Partialfunctionen nichts Anderes, als $n$ einfache Integrale $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ der Differentialgleichung $\frac{d^n y}{dz^n}=y$, die durch die Bedingung bestimmt sind, dass in dem allgemeinen Integral

$$y=\sum_{l=0}^{l=n-1} A_l y_l$$

die willkürliche Constante $A_l$ die Gleichung

$$A_l=\frac{d^l y}{dz^l}\quad (z=0)$$

befriedige. Partialfunctionen zweiter Classe werden dann sein

$$f_{2,0}(z)=\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{z^{2q}}{(2q)!}=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad f_{2,1}(z)=\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{z^{2q+1}}{(2q+1)!}=\frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

die Functionen *sin* und *cos* stellen sich als lineare Combinationen von Partialfunctionen vierter Classe: $\cos z=f_{4,0}(z)-f_{4,2}(z)$, $\sin z=f_{4,1}(z)-f_{4,3}(z)$ heraus.

Jede der Cofunctionen der zweiten Gruppe entsteht aus $f(z)$ durch die Substitution $r_n^h z$ anstatt $z$, wobei $r_n$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n=1$ bedeutet. Man erhält so $n$ verschiedene, den Werthen $h=0$, $1, \ldots, (n-1)$ entsprechende Functionen, und der Verfasser nennt diejenige, welche einem gegebenen Werthe von $h$ entspricht, „die $h^{\text{te}}$ circumplexe Function $n^{\text{ter}}$ Classe aus der Hauptfunction $f(z)$" und bezeichnet dieselbe mit $f(r_n^h z)$, so dass

4) $$f(r_n^h z) = \sum_{\iota=0}^{\iota=\infty} a_\iota r_n^{h\iota} z^\iota,$$

wobei wiederum $n$ Classenindex und $h$ Ordinalindex genannt wird.

Nimmt man $f(z) = e^z$, so werden die zwei circumplexen Functionen zweiter Classe $e^z$ und $e^{-z}$, während *cos* und *sin* als gewisse Combinationen circumplexer Functionen vierter Classe erscheinen.

Im Zusammenhang mit den zwei Arten von Cofunctionen führt der Verfasser zwei neue Operationen ein: das Partialisiren und das Complectiren (anstatt Circumplectiren).

Beide Gruppen von Functionen nennt der Verfasser „gegenseitig-coordinirte" auf Grund der zwischen ihnen stattfindenden Abhängigkeit, welche es erlaubt, die Einen durch die Anderen in Gestalt folgender Gleichungen auszudrücken:

5) $$f(r_n^h z) = \sum_{i=0}^{i=n-1} r_n^{hi} f_{n,i}(z),$$

6) $$n f_{n,i}(z) = \sum_{h=0}^{h=n-1} r_n^{-hi} f(r_n^h z).$$

Der Verfasser giebt ferner zweierlei Ausdrücke für die symmetrischen Combinationen der Cofunctionen einer Gruppe durch die coordinirten Cofunctionen, 1. in Determinantenform und 2. in Form successiver Ableitungen. Die Summe der Producte zu je $(n-k)$ aus sämmtlichen $n$ Cofunctionen ist nämlich, bis auf einen constanten Factor, identisch mit der Summe von allen möglichen Determinanten, welche man erhält, nachdem in der sogenannten cyklosymmetrischen Determinante aus den coordinirten Cofunctionen $k$ Zeilen und $k$ Colonnen, die sich in der Hauptdiagonale schneiden, gestrichen worden sind; also

7) $$n^{n-k} \underset{n}{\overset{p}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \sum D^{(\bar{k})}(c),$$

8) $$\underset{n}{\overset{c}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \sum D^{(\bar{k})}(p),$$

oder auch

7') $$n^{n-k} \underset{n}{\overset{p}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \frac{\partial^k \underset{n}{\overset{p}{\mathfrak{S}}}{}_n}{\partial c_0^k} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{\partial^k}{\partial c_0^k}\left(\frac{D(c)}{n^n}\right) \cdot \frac{1}{k!},$$

8') $$\underset{n}{\overset{c}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \frac{\partial^k \underset{n}{\overset{c}{\mathfrak{S}}}{}_n}{\partial p_0^k} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{\partial^k}{\partial p_0^k}(D(p)) \cdot \frac{1}{k!}.$$

Dabei sind die Partialfunctionen Kürze halber mit $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ und entsprechend die circumplexen mit $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ bezeichnet;

das Symbol $\overset{a}{\underset{n}{S}}{}^{k}$ bedeutet die Summe der Producte zu je $k$ aus den $n$ Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; ferner bedeutet

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

und endlich $D^{(\bar{k})}(\alpha)$, dass in $D(\alpha)$ $k$ Zeilen und $k$ Colonnen, die sich in der Diagonale schneiden, gestrichen sind.

Diese Relationen sind ihrer Allgemeinheit, Einfachheit und Gegenseitigkeit wegen schon an und für sich von hohem Interesse; aber dieses Interesse wächst noch mit den Anwendungen, die auf den verschiedenen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik ermöglicht werden. Von diesen Anwendungen zeigt der Verfasser vorläufig eine einheitliche Lösung algebraischer Gleichungen. Selbstverständlich giebt derselbe keine Lösung der allgemeinen Gleichung in endlicher Gestalt; vielmehr beschränkt sich der Verfasser in dieser Beziehung auf specielle Fälle, wie z. B. 1. der allgemeinen Gleichungen der ersten vier Grade (wobei die Lösung sich für alle vier Grade durch vollkommene Einförmigkeit und Natürlichkeit auszeichnet; 2. der binomischen Gleichungen und 3. der Gleichungen mit gleichen Wurzeln; und führt endlich noch ein System von Gleichungen ein, die er cyklische nennt.

Die Grundidee dieser Lösung ist folgende: Für eine gegebene Gleichung sucht der Verfasser eine solche Function, deren circumplexe Functionen die Wurzeln jener Gleichung wären, und findet anstatt jener Function ihre Partialfunctionen, wozu ihm die Formel 7), in welcher die linke Seite durch die entsprechenden Coefficienten der gegebenen Gleichung ersetzt ist, dient, und bestimmt dann mit Hilfe von 5) die circumplexen Functionen, d. h. die Wurzeln der Gleichung.

Der Verfasser bleibt nicht lange bei den Anwendungen stehen und geht zu einer theoretischen Entwickelung nach verschiedenen Richtungen seiner Grundgedanken über. So stellt er z. B. Relationen auf zwischen Derivirten aus Cofunctionen und Cofunctionen aus Derivirten:

$$[f(r_n^h z)]^{(k)} = r_n^{kh} f^{(k)}(r_n^h z), \quad [f_{n,i}(z)]^{(k)} = [f^{(k)}(z)]_{n,\,i-k},$$

und indem ähnliche Gleichungen summirt werden, entstehen die Formeln

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{[f(r_n^h z)]^{(k)}}{f^{(k)}(r_n^h z)} = \begin{cases} n \\ 0 \end{cases} \text{je nachdem} \begin{matrix} k \equiv 0 \\ k \equiv q \end{matrix} \Big\} \;(mod\, n) \quad \Big| \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{[f_{n,i}(z)]^{(k)}}{[f^{(k)}(z)]_{n,\,i-k}} = n,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{[f(r_n^h z)]^{(k)}}{f^{(k)}(r_n^h z)}=\begin{cases}n\\0\end{cases}\text{ je nachdem }\begin{matrix}h\equiv 0\\h\equiv q\end{matrix}\ (mod\, n)\qquad\Bigg|\qquad\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{[f_{n,i}(z)]^{(k)}}{[f^{(k)}(z)]_{n,i-k}}=n.$$

Abgesehen davon, dass diese Formeln schon an und für sich interessant sind. so versprechen sie, in der Analysis eine wichtige Rolle zu spielen.

Indem der Verfasser ferner eine Cofunction wiederum zur Hauptfunction nimmt, bekommt er vier Arten von subordinirten Cofunctionen: partiale Partialfunctionen, partiale circumplexe Functionen, circumplexe circumplexe und circumplexe Partialfunctionen, für welche er eine ganze Reihe von Relationen aufstellt, aus welchen wir folgende hervorheben:

$$\underbrace{\overbrace{f(r_n^h z)}}_{m,i}=f_{m,i}(r_n^h z),\qquad \frac{f_{n,i}(r_n^h z)}{f_{n,i}(z)}=r_n^{ih},$$

$$\sum_{h=0}^{h=n-1}\frac{f_{n,i}(r_n^h z)}{f_{n,i}(z)}=\begin{cases}n\\0\end{cases}\text{ je nachdem } i\equiv\begin{cases}0\\q\end{cases}\ (mod\, n),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{f_{n,i}(r_n^h z)}{f_{n,i}(z)}=\begin{cases}n\\0\end{cases}\text{ je nachdem } h\equiv\begin{cases}0\\q\end{cases}\ (mod\, n).$$

Diese Idee weiter entwickelnd, bildet der Verfasser ein wiederholtes Partialisiren mit immer neuen Indices und zeigt dann, wie man die Cofunction $\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung direct durch ein einmaliges Partialisiren (oder complectiren) der ursprünglichen Hauptfunction erhalten kann, wozu es nur nöthig wird, den Classenindex $n^{(\lambda)}$ und Ordinalindex $i^{(\lambda)}$ (oder $h^{(\lambda)}$) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke giebt der Verfasser folgende Formeln:

$$n^{(\lambda)}=n_0.n_1\ldots n_\lambda,$$
$$i^{(\lambda)}=i_\lambda(n_0.n_1\ldots n_{\lambda-1})+i_{\lambda-1}(n_0.n_1\ldots n_{\lambda-2})+\ldots\ldots+i_1 n_0+i_0$$

$$n^{(\lambda)}=n_0.n_1\ldots n_\lambda,$$
$$\frac{h^{(\lambda)}}{n^{(\lambda)}}=\frac{h_0}{n_0}+\frac{h_1}{n_1}+\ldots+\frac{h_\lambda}{n_\lambda}$$

Zum Behufe der Lösung algebraischer Gleichungen untersucht noch der Verfasser einerseits die Jacobi'sche Functionaldeterminante aus den symmetrischen Functionen der Cofunctionen und zeigt andererseits einen Zusammenhang zwischen der Lösung von Gleichungen und der Umkehrung eines Integrals. Dazu kommt noch eine (übrigens nicht neue) Untersuchung der Wurzeln einer binomischen Gleichung und ausserdem die ganz allgemeine Zerlegbarkeit einer cyklosymmetrischen Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades, bei zusammengesetztem $n$, in ebensolche Determinanten von niedrigeren Graden.

Wie gross schon die Allgemeinheit der Fragestellung und der umständlichen Beantwortung auch ist, so geht der Verfasser doch noch weiter, indem er einen Hinweis zur möglichen Verallgemeinerung der Theorie nach verschiedenen Richtungen giebt.

1. Die Exponenten der Glieder der Partialfunctionen können durch noch irgendwelche andere Bedingungen [ausser der Congruenz 2)]

bestimmt werden, z. B. dass sie Primzahlen, Quadratzahlen u. s. w. sein sollen.

2. Anstatt der Gleichung $x^n = 1$ kann man eine allgemeine Gleichung nehmen.
3. Anstatt der Substitution $r_n^k z$ kann man die allgemeinere Substitution $r_{n_1}^{k_1} x_1 + r_{n_2}^{k_2} x_2 + \ldots + r_{n_m}^{k_m} x_m$ setzen.
4. Als Hauptfunction kann eine Function mit mehreren Variabeln genommen werden.
5. Anstatt der Reihe 1), welche nach Potenzen fortschreitet, kann man eine Reihe nehmen, welche nach anderen Functionen, z. B. Kugelfunctionen, Derivirten, einfachen Integralen u. s. w., fortschreitet, und so ganz allgemeine „operative Cofunctionen" erhalten, von welchen die oben untersuchten „potenziellen" oder schlechtweg „Cofunctionen" specielle Fälle sind.

Ich glaube, dass man nach dem oben Auseinandergesetzten ohne Uebertreibung sagen kann, dass die Erscheinung der analysirten Arbeit eine wichtige Epoche in der Entwickelung der Mathematik eröffnet, und dass sie eine Umwandlung verspricht, deren Grenzen noch schwer vorauszusehen sind.

Aehnlich, wie es so manchen Entdeckern geht, hat auch Herr Schapira Vorgänger, welche er im Vorworte aufzählt; aber alle begnügten sie sich mit einem speciellen Falle, indem sie als Hauptfunction eine Exponentialfunction $e^z$ nahmen. Den Keim zu einer Verallgemeinerung der Fragestellung enthält ein dem Verfasser unbekannter, aber von Günther in seinem Werke über verallgemeinerte Hyperbelfunctionen citirter Artikel von Most im L. Bande des Grunert'schen Archivs. Aber Most hat aus seiner Idee gar nichts gemacht, indem er sich auf die Herleitung der Formel 6) beschränkte, und jener Artikel wäre vielleicht spurlos verloren gegangen, wenn nicht die Analyse des vorliegenden Werkes Veranlassung zur Erwähnung gegeben hätte, so dass die Existenz von Vorgängern das Verdienst von Herrn Schapira nicht blos nicht verringert, sondern es noch eher deutlicher hervortreten lässt, indem wir daraus sehen, wieviele einer wichtigen Entdeckung so nahe standen und dieselbe doch nicht gemacht haben.*

W. Preobraschensky.

---

* Wir freuen uns, durch diesen Beitrag des Odessaer Functionentheoretikers unsere Leser genauer mit dem Inhalte eines Buches bekannt machen zu können, von dem wir S. 182 der histor.-literar. Abtheilung des vorigen Bandes, gezwungen durch unsere Unkenntniss der russischen Sprache, nur das Inhaltsverzeichniss mitzutheilen im Stande waren.

M. C.

**Lehrbuch der praktischen Geometrie**, bearbeitet für den Unterricht an Baugewerkeschulen u. technischen Mittelschulen von Dr. M. DOLL, Lehrer der praktischen Geometrie am grossherzogl. Polytechnikum zu Karlsruhe. Mit Figuren im Text. 8°. II, 77 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1880.

„Die Ertheilung des Unterrichts der praktischen Geometrie an der grossherzogl. badischen Baugewerkeschule und der Wiesenbauschule war die Veranlassung zur Zusammenstellung desjenigen Theils aus dem Gebiete der niederen Geodäsie, welcher für Bautechniker, für das Hilfspersonal bei der Ausführung von Wasser- und Strassenbauten und für Culturtechniker bei Planirungsarbeiten zu wissen nöthig ist.“ Nach einer kurzen Einleitung (2 Seiten) wird im ersten Theil die Horizontalaufnahme mit Messlatten oder Messband und Winkeltrommel, Winkelspiegel oder Winkelprisma, das Auftragen einer Aufnahme, die Flächenberechnung durch Zerfällung in Dreiecke oder mit dem Planimeter und Einiges über Theilung der Flächen mitgetheilt. Ferner werden die gewöhnlichen Aufgaben über Längenmessungen und Abstecken von Geraden mit Hindernissen besprochen und eine recht verständliche Theorie des Amsler-schen Polarplanimeters nach Weisbach gegeben. Ausführlicher und befriedigender ist der zweite, vom Nivelliren handelnde Theil. Nach Stellung der Aufgabe folgt eine Beschreibung der verschiedenen Nivellirlatten, der Kanalwaage, einiger Pendelinstrumente, die zugleich Gefällmesser sind, und endlich eines Libelleninstrumentes. Vollständigkeit wird Niemand verlangen und gegen die getroffene Auswahl ist, da die grundsätzlich schlechten Pendelinstrumente einmal bei dem Publicum, für das die Schrift bestimmt ist, beliebt sind, wenig zu erinnern. Nur wäre es wohl angemessen gewesen, eines Gefällmessers mit constanter Instrumentenhöhe und Zieltafel von derselben Höhe (etwa des Staudinger-schen) Erwähnung zu thun, auch wohl des Libellengefällmessers. Der Abschnitt enthält noch Einiges über Aufnahme und Verzeichnung von Profilen und eine hübsche Anleitung zum Flächennivellement. Der dritte Theil handelt von Berechnung der Erdmassen.

Die ganze Schrift ist in einem knappen Tone gehalten, den man einen militärischen nennen könnte. Begründung wird gewöhnlich gar nicht gegeben, nur der Excurs über das Polarplanimeter macht eine Ausnahme. Es ist allerdings auch noch Einiges aus den physikalischen Lehren, betreffend Winkelspiegel, Winkelprisma, Fernrohr, Linsendiopter, gesagt, ein paar Bemerkungen über Libellen gemacht, aber man kann das nicht einmal als Elemente der Theorie bezeichnen; offenbar war nur praktische Anweisung, nicht eingehende Belehrung beabsichtigt. Das Buch muss als ein Auszug oder eine Zusammenfassung der Lehren angesehen werden, die der Verfasser an den im Vorwort erwähnten Lehranstalten ertheilt. Zum Selbstunterrichte taugt es nicht; Niemand wird daraus

z. B. die Handhabung des Winkelspiegels oder des Prismas erlernen können; selbst die einfacheren Geschäfte der Längenmessung, des Nivellirens mit der Kanalwaage u. dergl. sind hierfür nicht hinreichend ausführlich und deutlich beschrieben. Man muss neben dem Gebrauche des Buches sich eine praktische Anleitung im Felde, mit den Instrumenten in der Hand denken. Der Titel hätte daher statt Lehrbuch passender anders: Instruction, Anleitung, Vorschriften oder sonstwie gelautet. Dass ein solches Buch recht nützlich in manchen Kreisen sein kann, wird nicht bestritten werden können, ebenso wenig wie die Berechtigung und Befähigung des Verfassers, ein solches zu schreiben; manche für den betreffenden Leserkreis vortrefflich ausgeführte Einzelheiten beweisen das. Doch kann, auch wenn man auf den Standpunkt des Verfassers sich stellt und seinen beschränkten Zweck zu erfüllen trachtet, hinsichtlich der Auswahl und mehr noch der Behandlung des Stoffes zuweilen eine merklich andere Ansicht vertreten werden. Allein darüber ist nicht zu rechten; im Ganzen ist das Buch, für seinen Kreis, als ein gutes zu bezeichnen. Mit Definitionen z. B. darf man es aber nicht streng nehmen wollen.

Nur ein „Vergehen“ darf nicht verschwiegen bleiben, begangen gelegentlich der Anleitung zur Berechnung der Erdmassen. Es werden für ein bestimmtes Beispiel (Fig. 88) zunächst — ohne Begründung — zwei ungenaue Regeln angegeben, dann zur Berechnung des „wirklichen Inhalts“ geschritten und dieser auch richtig ausgeführt. Nur wird dabei der Leser — der doch mathematisch ziemlich harmlos gedacht werden soll — irre geführt. Es wird nämlich gesagt, man erhalte durch Zerlegung des vierseitigen Prismas in zwei dreiseitige Prismen den wirklichen Inhalt. Der Körper ist aber kein Prisma (sondern ein Obelisk), und die folgenden Formeln (Flächeninhalt eines Dreiecks mal dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten) sind keine Prismenformeln, sondern (ganz richtig) solche für Prismenstutze. Ohne weitere Anleitung ist Denjenigen, für welche die Schrift bestimmt ist, die Sache nicht verständlich. Es wäre gewiss besser und dabei eigentlich einfacher gewesen, die Formel zur Berechnung eines Obelisken zu geben oder, noch allgemeiner, die Simpson'sche Körperregel vorzutragen und anzuwenden, welche namentlich in weniger einfachen Fällen die oft so mühsamen Zerlegungen ersparen lässt und für die Erdmassenberechnungen (in dem hier in Rede stehenden Umfange) nicht nur die beste, sondern die einzig empfehlenswerthe ist. Praktisch recht gut muss ich, nachdem ich den ersten Theil der Erdmassenberechnung getadelt habe, den zweiten Theil dieses Abschnittes nennen.

Bohn.

**Lehrbuch der ebenen Planimetrie.** Von Dr. JUL. PETERSEN, Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen etc. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. R. v. FISCHER-BENZON, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kopenhagen, Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn. 1881.

„Man wird sich heutigen Tages wohl darüber einig sein, dass der Unterricht in der Geometrie nicht den Zweck hat, die Schüler nur ein System der Geometrie zu lehren, sondern vielmehr den, dieselben für die Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben geschickt zu machen. Die Auflösung solcher Aufgaben ist eine vorzügliche Uebung im logischen und consequenten Denken.

Das vorliegende Lehrbuch ist vorzüglich geeignet, dem oben genannten Zwecke zu entsprechen. Es ist kurz, ohne irgend etwas Wesentliches auszulassen, einfach und anschaulich. Durch seine Kürze erleichtert es dem Schüler Lernen und Repetition; Anordnung und Auswahl des Lehrstoffes und der Aufgaben sind so, dass die Aufgaben die erlernten Lehrsätze nicht nur einüben, sondern auch ergänzen.“

Mit diesen Worten, welche ich aus der Vorrede des Herrn Uebersetzers heraushebe, kann ich mich aus voller Ueberzeugung einverstanden erklären. Auf 105 keineswegs eng gedruckten Seiten findet der Leser ein ausserordentlich reiches und, wie sich das bei einem Geometer von der Begabung Petersen's von vornherein versteht, selbstständiges Material.

Wenn aber am angezeigten Orte es weiter heisst: „Abweichungen vom Herkommen finden sich nicht wenige. Ich bin aber überzeugt, dass dieselben zeitgemäss sind und dass hierin zum Theil die Vorzüge des Buches liegen“, so befürchte ich doch, dass dies Urtheil nur mit einem gewissen Optimismus von allen Abweichungen vom „Herkommen“, die sich in dem Buche finden, ausgesagt werden kann. Möge der Leser selbst urtheilen.

Das erste Capitel zerfällt in vier Abschnitte, deren erster die Ueberschrift „Abhängigkeit der Winkel von einander“ führt und die Winkelsummen eines Polygons in der bekannten Weise durch Umschreitung desselben bestimmt. Alsdann werden im zweiten Abschnitte die Sätze über Peripherie- und Centriwinkel behandelt, im dritten die parallelen Linien, im vierten eine Gruppe von Sätzen über Senkrechte, Schiefe, Mittelsenkrechte vorgetragen, welche als unmittelbare Vorbereitung zum zweiten Capitel gelten können. Dieses enthält als ersten Abschnitt die Lehre über Congruenz und Symmetrie. Die Congruenzsätze erscheinen als Zusätze zu den betreffenden Constructionsaufgaben.

Vom Standpunkte der blossen Theorie aus dürfte gegen die hier vorliegende Stoffvertheilung wenig zu erinnern sein. Wenn der Winkel doch einmal nur durch Kreisbögen gemessen werden kann, so ist kein

vernünftiger Grund abzusehen, warum nicht der Vortrag diesen innigen Zusammenhang auch äusserlich hervorheben soll, warum also nicht Sätze, welche sonst unter Ueberschrift „Kreislehre“ ziemlich spät auftreten, in den Anfang gerückt werden sollen. Zudem empfehlen sich diese Sätze gerade durch ihre Einfachheit als dem Anfänger leicht zugänglich.

Dagegen erscheint es mir bedenklich, wenn der Schüler mit Begriffen, wie „Senkrechte“, „Winkelhalbirer“, „Mitte einer Strecke“ u. s. w. in den Aufgaben zu operiren genöthigt ist, ehe er die betreffenden Constructionen, durch welche doch diese Begriffe ihm erst lebendig werden, ausgeführt hat. So findet sich S. 20 die Aufgabe: Zwei Winkel eines Dreiecks betragen $40^0$ und $80^0$; man halbire den dritten Winkel und ziehe von seinem Scheitelpunkte eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite; wie gross ist der Winkel zwischen der Senkrechten und dem Winkelhalbirer? während die Construction der Senkrechten und die Halbirung des Winkels erst S. 37 gelehrt werden.

Das geäusserte Bedenken ist aber wohl das einzige, welches mir aufgestossen ist. Zudem würde dasselbe ganz wegfallen, wenn das Buch nicht beim ersten Unterrichte, sondern vielleibht bei der Repetition in Secunda und Prima gebraucht würde. Uebrigens wiederhole ich an dieser Stelle, was ich zum Lobe der „Methoden und Theorien“ (diese Zeitschrift Bd. 26 S. 176 flgg.) gesagt habe. Wenn ich dort die methodische Anordnung und geometrische Schönheit der Uebungsaufgaben anerkennen konnte, so soll hier das Gleiche von den Uebungssätzen gern gesagt sein. Auf jeder Seite ist das Büchlein interessant.

Coesfeld, im April 1881. Dr. K. SCHWERING.

---

A. WEINHOLD, **Physikalische Demonstrationen.** Anleitung zum Experimentiren im Unterricht an Gymnasien, Realschulen und Gewerbeschulen. Leipzig, Quandt & Händel. 1881. 677 S. gr. 8°. Preis: 22 Mk.

Die Art und Weise, physikalische Erscheinungen im Unterrichte vorzuführen und Gesetze durch Versuche nachzuweisen, hat innerhalb der letzten 15 Jahre sehr erhebliche Fortschritte gemacht. Einen wesentlichen Anstoss nach dieser Richtung hin hatten die Publicationen der Tyndall'schen Vorlesungen gegeben. Auch viele der hervorragendsten Physiker auf deutschen Lehrstühlen haben es sich schon seit langer Zeit angelegen sein lassen, neue Versuchsanordnungen zu erfinden, durch welche physikalische Vorgänge in zuverlässiger und überzeugender Weise gleichzeitig einer grösseren Zahl von Schülern vorgeführt werden können. Nicht alle aber, welche in dieser Beziehung die Methodik des physikalischen Unterrichtes verbessert haben, machten diese ihre Fortschritte weiteren Kreisen bekannt, sondern manche begnügten sich damit, dass durch ihre neuen Versuche und verbesserten Demonstrationsvorrichtungen

ihre speciellen Schüler besser und eingehender in die Elemente der Physik eingeführt wurden. Allerdings ist in den geeigneten Zeitschriften mancherlei auch den weiteren Kreisen der Lehrer zugänglich gemacht worden, aber gerade einige unter den berufensten Vertretern unserer Wissenschaft beobachten nach dieser Richtung hin eine bedauerliche Zurückhaltung. Trotz alledem hat sich, wie bereits eingangs angedeutet, ein gewaltiger Umschwung hinsichtlich der speciellen Methodik in den letzten Jahren vollzogen und Diejenigen, welche vor längerer Zeit einen geordneten physikalischen Unterricht, sei es an einer deutschen Hochschule, oder sei es selbst nur an einer Mittelschule, genossen haben, würden heute wohl überall den gesammten physikalischen Lehrapparat wesentlich verändert finden und würden staunen, wie es durch bessere Versuchsanordnungen möglich geworden ist, jetzt in derselben Zeit, wie ehemals, ein viel gründlicheres und ausgedehnteres physikalisches Wissen der Zuhörerschaft zugänglich zu machen.

Wenn jedoch insbesondere der physikalische Unterricht an den Mittelschulen zur Zeit noch vielfach erheblich zu wünschen übrig lässt, so hat dies wesentlich in zwei Umständen seine Ursache. Erstens sind nämlich die Mittel, welche seiten der Unterrichtsbehörden den Schulen für Vervollkommnung des physikalischen Lehrapparates zur Verfügung gestellt werden, meist so gering, dass es selbst dem strebsamsten Lehrer nicht möglich ist, auch nur annähernd mit seiner Apparatensammlung den Fortschritten auf methodischem Gebiete zu folgen. Vielfach reichen die disponiblen Summen sogar gerade nur zu, um die dem unmittelbaren Verbrauche ausgesetzten Unterrichtsmittel (Präparate, Glas- und Kautschukwaaren) zu ersetzen und die immer von Zeit zu Zeit nothwendig werdenden Reparaturen vornehmen zu lassen; so dass ganz selten daran gedacht werden kann, ältere Apparate durch zweckmässigere zu ersetzen oder gar neue, gute Apparate, sofern diese einigermassen kostspielig sind, anzuschaffen.

Andererseits ist aber auch zur Zeit die Ausbildung der Lehrer für Mittelschulen an deutschen Hochschulen nicht eine derartige, dass man mit Recht erwarten könnte, dieselben seien ausnahmslos geeignet, einen gedeihlichen Unterricht in Experimentalphysik späterhin zu ertheilen. Die Studienzeit derjenigen Lehrer, welche diese Disciplin späterhin zu vertreten haben, ist durch Ansprüche an eine weitgehende mathematische und mathematisch-physikalische Durchbildung zumeist derart vollständig und ausschliesslich in Anspruch genommen, dass dem Studirenden der Mathematik und Physik für eine sorgsame Vorbereitung auf das physikalische Lehramt nicht die ausreichende Zeit bleibt. Auch scheint man die Wichtigkeit einer solchen besonderen Vorbildung für den Unterricht in Physik an den deutschen Hochschulen seiten der Prüfungscommissionen vielfach noch nicht ganz zu erkennen. Man verlangt zwar eine Lehr-

probe in Mathematik beim Staatsexamen, um darnach die allgemeine Lehrbefähigung des Candidaten beurtheilen zu können; ganz selten aber hört man davon, dass auch eine Lehrprobe in Experimentalphysik abgenommen werde. Jeder aber, der das Wesen des physikalischen Unterrichtes genau kennt, wird wahrscheinlich zugeben, dass Jemand, der sich in seiner mathematischen Lehrprobe als ein ganz tüchtiger Lehrer der Mathematik erwiesen hat, damit noch nicht die Gewähr giebt, dass durchaus er auch im Stande sein werde, einen guten Unterricht in Experimentalphysik zu ertheilen.

Selbst die Arbeiten, welche man in neuerer Zeit wohl an allen Hochschulen den zukünftigen Lehrern in dem physikalischen Laboratorium vornehmen lässt, sind zumeist so einseitig und können nur so kurze Zeit hindurch fortgesetzt werden, dass, wenn ein junger Lehrer dann in die Praxis hinauskommt und mit einem mehr oder minder unvollkommenen physikalischen Lehrapparat seinen Schülern etwas Ordentliches lernen soll, er im Anfange entsetzlich hilflos dasteht. Erst durch viele unangenehme Erfahrungen, die seinen Schülern kostbare Zeit rauben und der physikalischen Sammlung der Schule zunächst zum grossen Schaden gereichen, lernt er allmälig das, was er bei einer ausreichenden Vorbereitung für seinen Beruf von rechtswegen bei dem Beginn seiner amtlichen Thätigkeit mitbringen sollte.

Besonders in Hinblick auf diese zur Zeit noch herrschenden grossen Uebelstände ist das Erscheinen dieses Weinhold'schen Werkes als ein freudiges, sehr bedeutungsvolles Ereigniss aufrichtig zu begrüssen. Weinhold hat sich nicht damit begnügt, die besten Versuchsanordnungen, die ihm irgendwie zugänglich gewesen sind, zu sammeln und sorgfältig zu beschreiben, sondern er hat auch durch Erfindung neuer Versuche und neuer Apparate, durch zweckmässige Umgestaltung älterer Constructionen und durch eine systematische Anweisung zum Experimentiren die Methodik des physikalischen Unterrichtes ganz ausserordentlich gefördert. Derjenige ältere Lehrer der Physik, der in früheren Jahren studirt hat und die Experimentalphysik, wie sie heute ist, nicht nachträglich noch durch Reisen und Verkehr mit hervorragenden Autoritäten auf diesem Gebiete kennen gelernt hat, findet in dem Weinhold'schen Werke eine vortreffliche Gelegenheit, sich damit vertraut zu machen, in welcher Weise er seinen Unterricht umgestalten muss, um denselben wieder auf die Höhe der Zeit zu bringen. Aber auch der jüngere Lehrer, der ein gutes Colleg über Experimentalphysik auf einer Hochschule gehört hat und durch anhaltendes Arbeiten im physikalischen Laboratorium, oder noch besser durch eine Thätigkeit als Famulus und Assistent eines tüchtigen Experimentators mit den eminenten Fortschritten vertraut ist, die der Physikunterricht in den letzten Jahren gemacht hat, wird soviel Neues und durchaus Originelles in den „Physikalischen Demonstrationen"

finden, dass auch er das Buch nicht nur mit grossem Interesse lesen, sondern in demselben einen trefflichen Berather schätzen lernen wird, der ihn fast an keiner Stelle bei den Vorbereitungen für seinen Unterricht im Stiche lässt.

Die Beschreibung der Apparate und die Anordnung der Versuche ist so klar, so eingehend, so leicht fasslich und wird durch eine so grosse Zahl trefflich ausgeführter Figuren unterstützt, dass selbst Derjenige, der sich noch wenig oder gar nicht mit der Anstellung von Unterrichtsexperimenten beschäftigt hat, sich nach dem Weinhold'schen Buche zurechtfinden und etwas Ordentliches leisten kann. Jeder Physiklehrer wird meiner Ansicht nach, sofern er nur halbwegs ein warmes Herz für die Aufgaben seines Berufes hat, sich durch dasselbe angeregt fühlen, erhebliche Verbesserungen in seinem Unterrichte anzubringen.

Die Zahl der wirklich neuen und trefflichen Demonstrationsapparate, die man in dem Weinhold'schen Buche mitgetheilt findet, ist so gross, dass es kaum möglich sein dürfte, alle zu erwähnen oder gar ihre besonderen Vorzüge darzuthun, ohne den Rahmen einer Besprechung ungebührlich zu überschreiten. Wir wollen hier nur hervorheben, was wir jeder Mittelschule zu allernächst zur Beachtung, resp. zur Anschaffung glauben empfehlen zu müssen.

Die Winke über Ausstattung und Anordnung des physikalischen Auditoriums werden Jedem bei Neueinrichtung derartiger Räume oder bei Umgestaltung vorhandener treffliche Dienste leisten; dies um so mehr, als die beigegebenen Zeichnungen derart ausführlich sind, dass die Handwerker ohne Weiteres darnach arbeiten können. In dem ersten Theile, „allgemeine Mechanik", scheint mir besonders gelungen: die bereits früher von Weinhold publicirte Einrichtung der Centrifugalmaschine und deren Hilfsapparate, die neue Anordnung des Foucault'schen Pendelversuchs (S. 98), welche gestattet, dieses Experiment in jedem physikalischen Auditorium vorzunehmen. Zweckmässig ist die Abänderung des Nicholson'schen Aräometers (S. 119), welche das lästige Hineinfallen der Gewichte in die Flüssigkeit unmöglich macht; äusserst geschickt ist die Einrichtung des Apparates für Compression von Flüssigkeiten (S. 128), der sich zur Benutzung im Skioptikon eignet. Höchst empfehlenswerth ist in der Akustik die ausgedehnte Verwendung der sensitiven Flammen als empfindliches Reagens auf Schallwellen, z. B. für den Nachweis der Reflexion des Schalles (S. 204). In der Optik ist durch das Demonstrationsgoniometer (S. 276) ein ausgezeichneter Hilfsapparat gegeben, der zu vielen Zwecken ungemein geeignet ist. Trefflich bewährt haben wir schon seit vielen Jahren den Weinhold'schen Wandheliostaten gefunden (S. 281).

In der Wärmelehre hat mir besonders die einfache Vorrichtung zur absoluten Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers

nach der Dulong-Petit-Regnault'schen Methode gefallen (S. 375). Vorzüglich ist das Dampfbarometer, welches den Zweck hat, eine ziemlich genaue Bestimmung der Spannkräfte des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen im Unterrichte zu ermöglichen (S. 404). Gleich empfehlenswerth sind die Vorrichtungen für den Nachweis des Verhaltens der gesättigten und überhitzten Dämpfe (S. 412) und die für den Nachweis der Spannkräfte der Salzlösungen (S. 414). Auch die Aufnahme des Andrews'schen Compressionsapparates für Verflüssigung von Kohlensäure und Demonstration der kritischen Temperatur im Unterrichte (S. 426) halten wir für einen erheblichen Fortschritt. In der Elektricitätslehre glauben wir besonders die Anwendung des Horizontalpendels und die Herstellung von Leimkugeln als eine zweckmässige Neuerung empfehlen zu sollen (S. 499). Die einfache Form der Thomson'schen Wasserinfluenzelektrisirmaschine (S. 517) ist ein sehr lehrreicher Zuwachs für jedes halbwegs vollständige physikalische Cabinet. Durch die Anwendung des Thomson'schen Quadrantelektrometers in der Einrichtung, wie sie Weinhold empfiehlt (S. 557), wird es möglich, die Grundlage des Galvanismus in sehr überzeugender exacter Weise vorzuführen, besser als dies sonst irgendwie möglich sein dürfte.

Sollen wir nun aber auch, da es einmal bei Besprechung von literarischen Erscheinungen so üblich ist, auch einige abweichende Meinungen aussprechen, so kann Verfasser dieser Zeilen angesichts dieses trefflichen Werkes sich auf ein sehr bescheidenes Maass beschränken und auch hinsichtlich dieser Differenzpunkte giebt er im Voraus gern zu, dass viele derselben auf Rechnung derjenigen individuellen Verschiedenheit zu setzen sind, welche jeder Lehrer vermöge seiner Eigenart seinem Unterrichte giebt.

Zunächst habe ich es seit einer Reihe von Jahren für sehr zweckmässig gefunden, den physikalischen Elementarunterricht nach einer sehr kurzen Einleitung, welche die Grundbegriffe: Bewegung, Masse, Kraft etc. festlegt und einige Andeutung über die Methode, Eintheilung und die Grundsätze der Physik giebt, mit der Wärmelehre zu beginnen. Die Erscheinungen, um die es sich auf diesem Gebiete handelt, schliessen sich am besten an die bisherigen Erfahrungen der Schüler an und sind ihnen am leichtesten verständlich. Die jungen Leute werden auf diese Weise fast unmerklich in die Eigenthümlichkeit der physikalischen Betrachtungsweise der Erscheinungen eingeführt. Was in der Mittelschule von Mathematik in der Wärmelehre gebraucht wird, ist den Schülern bereits vollständig geläufig. In diesen Abschnitt schliesse ich (am Gymnasium), gelegentlich der Besprechung der Ausdehnungserscheinungen, die Bestimmungen der specifischen Gewichte und das Boyle-Mariotte'sche Gesetz, späterhin auch die Elemente der Chemie ein. Wendet man sich erst hiernach zur Mechanik, so kann diese dann, weil inzwischen der mathematische Standpunkt der Schüler ein wesentlich höherer geworden

ist, strenger mathematisch behandelt werden, und man kann zu den einzelnen Fällen lehrreichere Uebungsbeispiele rechnen lassen, als wenn man, wie üblich, die Physik mit der Mechanik beginnt. An die Mechanik schliesst sich dann naturgemäss die Wellenlehre, an diese die Akustik und Optik an. Für die Elektricitätslehre bleibt allerdings dann zumeist wenig Zeit übrig. Da der physikalische Unterricht an der Mittelschule meiner Ansicht nach aber durchaus nicht den Zweck hat, ein vollständiges, abgeschlossenes Wissen auf diesem Gebiete zu vermitteln, sondern die Hauptaufgabe nur die sein dürfte, die Schüler mit dem geordneten Gebrauche der naturwissenschaftlichen, inductiven Methode vertraut zu machen und ihnen Verständniss für diejenigen physikalischen Vorgänge zu geben, welche ihnen später am häufigsten im praktischen Leben begegnen, so finde ich darin keinen wesentlichen Nachtheil, wenn selbst das eine oder andere Gebiet der Physik auf der Schule nur eine mehr encyklopädische Behandlung erfahren sollte, nachdem andere Partien ziemlich gründlich und systematisch erörtert worden sind.

Ein Hauptgewicht wird man meiner Ansicht nach immer auf diejenigen physikalischen Vorgänge zu legen haben, welche, sofern quantitative Verhältnisse dabei ins Spiel kommen, auch einer erschöpfenden elementar-mathematischen Behandlung fähig sind, um Physik und Mathematik, die immer von demselben Lehrer in derselben Classe der Mittelschulen ertheilt werden sollten, in lebendiger Wechselwirkung erhalten zu können.

Infolge der geringen Zeit, welche zumal auf dem Gymnasium, aber auch auf der Realschule der Physik als Unterrichtsgegenstand naturgemäss gewidmet werden kann, wird sich eine Beschränkung in der Zahl der vorzuführenden Experimente gegenüber dem von Weinhold Vorgeschlagenen ganz von selbst nothwendig machen. Der Verfasser des trefflichen Buches denkt aber auch gar nicht daran, die Anstellung aller Experimente für nothwendig zu erklären. Er bietet so vieles, damit jeder Lehrer für die Gebiete sich das Geeignete auswählen könne, von welchem er glaubt, dass durch eingehende Behandlung derselben seine Schüler am besten gefördert werden.

Vermisst haben wir für den Unterricht an Mittelschulen nur ganz wenig in dem Weinhold'schen Werke. Für Realschulen und Gewerbeschulen, deren Schüler künftighin zum Theil mit Dampfmaschinen zu thun haben, sollten die einfachen Versuche nicht wegbleiben, welche zeigen, dass Wasserdampf, Schwefelkohlenstoff sich bei einer adiabatischen Expansion theilweise condensiren, Aetherdampf dagegen ein entgegengesetztes Verhalten zeigt. Auch die Methoden der Bestimmung der Dampfdichte und der Nachweis, dass die Dampfvolumina äquivalenter Mengen verschiedener Substanzen gleich sind, hätten wegen ihrer Bedeutung für das Verständniss vieler physikalisch-chemischen Thatsachen und Lehren meiner Ansicht nach Berücksichtigung verdient. Ebenso hätten wir eine

einfache Vorrichtung, welche das Verhalten der Dielektrica (des Schwefels) zeigt, gern aufgenommen gesehen. Auch den Nachweis der Existenz einer Brechung des Schalles halten wir nicht für unwichtig. Der Torsionselasticität und den Begriffen: Kräftepaar, Drehungsmoment, Drehungsaxe, freie Axe, hätten wir eine etwas eingehendere experimentelle Behandlung gewünscht. — Nur ungern würden wir den Nachweis des wichtigen Joule'schen Gesetzes über die galvanische Wärmeentwickelung in Leitern in einem vollständigen Unterrichte entbehren.

Für die Anstellung der Volta'schen Fundamentalversuche halte ich die Verwendung eines Fechner'schen oder Hankel'schen Elektroskopes, dessen Polplatten man mit dem Skioptikon auf einen Schirm projicirt, auf welchem man durch grosse Plus- und Minuszeichen deren eigene Ladung kenntlich macht, für recht zweckmässig.

Das Weinhold'sche automatisch wirkende Demonstrationsthermometer ist ein allerliebster, geistvoll erfundener Apparat; einer Anschaffung desselben für die physikalischen Cabinete der Mittelschulen können wir jedoch kaum das Wort reden. Ein Apparat, der zum Nachweis einfacher Thatsachen dienen soll, darf meiner Ansicht nach nicht zu complicirt sein. Auch kann man denselben Zweck erreichen, wenn man die betreffenden Versuche in grossem Maassstabe anstellt und sich einer Anzahl grosser Demonstrationsthermometer bedient, deren Grade ungefähr 1 cm lang sind, und bei welchen man den Stand der Quecksilbersäule durch eine dahinter gehaltene Beleuchtungseinrichtung sichtbar machen kann. Selbst wenn man sich drei derartige Demonstrationsthermometer verschafft: von $-40$ bis $+6$, von $0^0$ bis $50^0$ und von $80^0$ bis $110^0$, dürfte man zumeist mit viel geringeren Unkosten dasselbe Ziel in einfacherer Weise erreichen können. In anderen Fällen wird man zweckmässig kleine Projectionsthermometer anwenden und den Versuch vor dem Skioptikon anstellen.

Ferner erscheint es uns geeigneter, wenn man beim Reflexgalvanometer nicht einen Cylinder mit Spalt benutzt, sondern einen Blechcylinder wählt, in dem sich eine scharf begrenzte Oeffnung befindet, in deren Mitte ein nicht zu dünner Draht gespannt ist. Das Bild des dunklen Drahtes in dem hellen Felde wird auf der Scala gut gesehen und man kann leichter, selbst im stark verdunkelten Zimmer, die Stellung des Striches auf der Scala genau beurtheilen.

Für viele Versuche, die Weinhold mit Hilfe des Reflexgalvanometers anstellt, ziehe ich den Gebrauch einer einfachen Wiedemann'schen Tangentenboussole mit Reflexionseinrichtung vor. Man hat dann minder oft Stromverzweigungen nöthig, um die Intensität der angewendeten Ströme abzuschwächen; denn man kann die Grösse der Ablenkung des magnetischen Ringes durch die Entfernung der Drahtrolle vom Magneten, oder durch Veränderung der magnetischen Richtkraft bewirken, indem man einen geeignet gestellten Hilfsmagneten nähert oder entfernt.

Auch auf einen nicht ganz zutreffenden Ausdruck möchten wir noch aufmerksam machen. S. 480 ist der bekannte Versuch beschrieben, durch den man die Schmelzpunktserniedrigung des Eises durch Druck mit Hilfe eines Thermoelementes nachweist, welches sich zwischen zwei Eisstücken befindet, die man in der hydraulischen Presse zusammendrückt. Die Beschreibung dieses Versuches wird mit dem Satze eingeleitet: „Die wichtige Thatsache, dass die durch Druckzunahme bewirkte Schmelzung des Eises infolge der dabei stattfindenden Wärmebindung eine Temperaturerniedrigung bewirkt etc.“ Es handelt sich hierbei jedoch nicht um eine Abkühlung durch vermehrte Wärmeentziehung infolge der Schmelzung, sondern um die Thatsache einer Schmelzpunkterniedrigung.

Damit sind wir nun aber auch mit Ausstellungen, wenn man die vorstehenden kurzen Bemerkungen überhaupt als solche ansehen will, bereits am Ende.

Was wollen diese untergeordneten Differenzpunkte gegenüber dem ungetheilten Beifall besagen, den wir der ganzen Arbeit rückhaltlos zollen können?

Auf die praktischen Rathschläge, die Weinhold in seinem Buche giebt, kann sich jeder Experimentator ganz verlassen; da ist jede Einzelheit oft und gewissenhaft durchprobirt, jeder Theil der Versuchsanordnung ist wohl überdacht. Ja, wir glauben, ein so verdienstvolles Buch, wie diese vorliegenden „Physikalischen Demonstrationen“, konnte eben nur Jemand schreiben, der mit den Vorzügen eines trefflichen, kenntnissreichen Physikers das Geschick eines Mechanikers und eines gewandten Glasbläsers verbindet.

Das Weinhold'sche Buch wird gewiss bald in der Handbibliothek keines physikalischen Cabinets fehlen. Die Mechaniker werden in demselben eine reiche Quelle für neue Arbeit begrüssen. Die massgebenden Personen in den Unterrichtsbehörden aber werden, so hoffe ich, aus dem Buche ersehen, dass es hohe Zeit wird, erheblich grössere Mittel für Verbesserung des Lehrapparates an den Mittelschulen zu bewilligen, als bisher, damit unsere Gymnasien und Realschulen den Fortschritten der Methodik, wie sie in dem Weinhold'schen Buche zur Darstellung gekommen sind, zum Wohle ihrer Schüler in befriedigender Weise zu folgen im Stande sind.

Einer grösseren Munificenz nach dieser Richtung hin würde gewiss keine einsichtige Landesvertretung oder kein städtisches Collegium die Zustimmung versagen.

Von dem Weinhold'schen Buche darf somit eine wesentliche Verbesserung des physikalischen Unterrichtes aus vielen Gründen erwartet werden. Den Anlass dazu gegeben zu haben, ist ein sehr erhebliches

Verdienst, für welches alle Betheiligten dem Verfasser der trefflichen „Physikalischen Demonstrationen“ herzlichen Dank schuldig sind.

Wir können diese Zeilen nicht schliessen, ohne auch der Verlagsbuchbandlung unsere Anerkennung dafür ausgedrückt zu haben, dass sie das Weinhold'sche Buch in einer sehr guten, würdigen Ausstattung dem Publicum darbietet.

Richard Rühlmann.

---

**Hilfstafeln** zur präcisen Berechnung 20stelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu 20stelligen Logarithmen, von Anton Steinhauser, k. k. Regierungsrath. Mit Subvention der k. k. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn. XII, 296 S.

Die Frage, ob es wohl viele Mathematiker geben werde, welche je in die Lage kommen, sich 20stelliger Logarithmen bedienen zu müssen oder zu wollen, ist eine ziemlich müssige. Höchstens der Verleger des uns vorliegenden Werkes konnte sich dieselbe stellen, um je nach der Beantwortung die Möglichkeit eines die Kosten deckenden Absatzes zu erwägen, aber auch ihm hat die Unterstützung der Wiener Akademie die Frage im Munde abgeschnitten. Wir wollen sie nicht aufnehmen. Wir wollen nur feststellen, dass jene Unterstützung keinem Unwürdigen zu Theil wurde. Der längst rühmlichst bekannte Verfasser hat an die Ausarbeitung seiner Tabellen, deren Verlauf er in dem Vorworte genau schildert, eine Arbeitskraft gewandt, die geradezu erstaunlich ist. Er spricht von der nach bereits vollendeter Arbeit wiederholt vorgenommenen Interpolationsrechnung bei 20000 Logarithmen zur Feststellung der Endziffern, als ob das so ein Geschäft wäre, welches zwischen Frühstück und Morgenpfeife erledigt werden könnte. Die Hilfstafel selbst besteht aus vier einzelnen Tabellen $A$, $B$, $C$, $D$. Von diesen liefert $A$ die Logarithmen der Zahlen 1000 bis 9999; $B$ die von 1000 0000 bis 1000 9999; $C$ die von 1000 0000 0000 bis 1000 0000 9999; $D$ die von 1000 0000 0000 0000 bis 1000 0000 0000 9999. Jede beliebige Zahl ist daher zur Logarithmirung in Factoren zu zerlegen, welche in diesen Tabellen aufgefunden werden können. Druck und Ausstattung sind vorzüglich. Ueber die Richtigkeit könnte erst fortgesetzter Gebrauch oder das Nachrechnen beliebig gewählter einzelner Logarithmen in grösserer Anzahl Auskunft geben. Wir begnügen uns damit, aus dem Vorworte die rühmende Anerkennung der Gerold'schen Druckerei zu entnehmen, dass dieselbe die Mehrzahl der Seiten in fehlerfreiem Satze zur ersten Correctur lieferte.

Cantor.

# Bibliographie

vom 1. November bis 15. December 1881.

---

## Periodische Schriften.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 19. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1884, redigirt von Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Astronomischer Kalender für d. Jahr 1882, herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Repertorium der Experimentalphysik, physikal. Technik und Instrumentenkunde, herausgeg. von Ph. Carl. 18. Bd. 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 24 Mk.

Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. VII. Série; Tome 28 No. 8 et 9, Tome 29 No. 2. Leipzig, Voss. 11 Mk. 10 Pf.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirées du bulletin de l'acad. de St. Pétersbourg. Tome V livr. 6. Ebendas. 1 Mk. 30 Pf.

## Reine Mathematik.

Neumann, C., Die nach Kreis-, Cylinder- und Kugelfunctionen fortschreitenden Entwickelungen unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Zmurko, L., Beitrag zur Auflösung von Gleichungen durch die algebr. und geometr. Operationslehre. Wien, Gerold. 3 Mk.

Hamilton, W., Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. 1. Bd. 2. Thl. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Zimmermann, O., Das logarithmische Potential einer gleichseitig-dreieckigen Platte. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 80 Pf.

Holzmüller, G., Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Noth, H., Die Arithmetik der Lage. Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre. Leipzig, Barth. 2 Mk. 40 Pf.

Bussler, F., Elemente der Arithmetik und Algebra. Berlin, Enslin. 1 Mk. 80 Pf.

Bergold, E., Arithmetik und Algebra, nebst einer Geschichte dieser Disciplinen. Karlsruhe, Reuther. 2 Mk. 25 Pf.

Staude, O., Ueber lineare Gleichungen zwischen elliptischen Coordinaten. Leipzig, Lorentz. 1 Mk. 50 Pf.

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 20 Pf.

Erler, W., Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. 2. Aufl. Ebendas. 1 Mk.

Escherich, G. v., Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. Ebendas. 5 Mk. 20 Pf.

Milinowski, A., Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. 2. Thl. Stereometrie. Ebendas. 1 Mk. 80 Pf.

Archimedis opera cum commentariis Eutocii. Ed. L. Heiberg. Vol. 3. Ebendas. 6 Mk.

## Angewandte Mathematik.

Möllinger, O., Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen. Zürich, Schmidt. 3 Mk.

Züge, Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebenen Curven oder Cylinderflächen unter Einwirkung einer Attractionskraft. Lingen, van Acken. 2 Mk.

Margules, M., Ueber Bewegungen zäher Flüssigkeiten und Bewegungsfiguren. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Newcomb, S., Populäre Astronomie. Deutsch von R. Engelmann. Leipzig, Engelmann. 13 Mk. 50 Pf.

## Physik und Meteorologie.

Förster, W., Metronomische Beiträge. Nr. 3: Thermometrische Untersuchungen. Berlin, Dümmler. 8 Mk.

Die moderne Meteorologie in sechs Vorlesungen von J. Mann, K. Laughton, R. Strachan, C. Ley, J. Symons und H. Scott. Deutsche Originalausgabe. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk. 60 Pf.

Pernter, J., Ueber den täglichen und jährlichen Gang des Luftdrucks auf Berggipfeln und in Gebirgsthälern. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

es nicht vergönnt war, auf der Universität projektivische Geometrie zu hören, ihres einfachen Charakters wegen eher Veranlassung sein, sich mit den wesentlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte vertraut zu machen. In den Vordergrund treten die harmonischen und Polareigenschaften. Zu ihrer Untersuchung wird das harmonische Gebilde unmittelbar angewendet, während die projektivische Geometrie dasselbe zunächst benutzt, allgemeine Beziehungen herzustellen und aus diesen jene Eigenschaften herzuleiten.

Die Darstellung geht von einer gemeinschaftlichen Erzeugung der drei Arten von Kegelschnitten aus, leitet aus ihr die Brennpunkts- und Polareigenschaften ab, führt sie darauf in die übrigen bekanntesten Erzeugungsweisen über, um auch aus ihnen jene Eigenschaften wiederholt zu entwickeln. So ist die Polarentheorie in fünffacher Art elementar dargestellt.

Zur leichteren Handhabung der harmonischen Eigenschaften ist ein von Möbius zuerst bemerktes Übertragungsprinzip unter dem Namen der harmonischen Verwandtschaft benutzt. Dasselbe gestattet in elementarster Form ohne aus der Ebene herauszugehen die Eigenschaften der Kreise und Kreisbüschel auf Kegelschnitte und Kegelschnittbüschel zu übertragen. Letztere sowie die reziproken Gebilde, die Kegelschnittscharen werden in ihren wesentlichsten Beziehungen untersucht. Ihnen schliesst sich die Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung an. Den Berührungskreisen der Kegelschnitte, den doppelt berührenden sowie Krümmungskreisen ist ein besonderes Kapitel zugewiesen.

Vorausgeschickt ist ein Abriss: die Theorie des Kreises; den Schluss bildet eine kurze Darstellung der Haupteigenschaften projektivischer Gebilde und eine Zahl von Lehrsätzen und Aufgaben, die teils den gegebenen Stoff erweitern, teils zu seiner Einübung das Material liefern sollen.

**Parabolische Trigonometrie und parabolische Logarithmen.** Eine vergleichende Untersuchung von Dr. Siegmund Günther, Professor an der Königl. Studien-Anstalt zu Ansbach. Mit Holzschnitten im Text. gr. 8. geh.

Diese Schrift entstand in weiterer Verfolgung eines bereits vor längerer Zeit von dem Verfasser gefassten Planes. Es handelte sich darum, die geistreichen Untersuchungen über einen neuen geometrischen Wissenszweig, zu welchem sich der verdiente englische Mathematiker James Booth bei seinen Bemühungen um die geometrische Deutung der elliptischen Integrale geführt sah, dem deutschen Publikum näher zu führen. Dabei aber stellte sich heraus, dass diese von ihrem Begründer sogenannte „Trigonometry of the parabola" eine ganz ungleich einfachere Darstellung zuliess, sobald man von der Booth eigentümlichen symbolischen Rechnungs- und Bezeichnungsweise absah und dafür die anscheinend neue Disziplin in die engste Beziehung zu den Hyperbelfunktionen setzte. Gleichmässig gewannen durch die Einführung dieser analytischen Formen gewisse andere Arbeiten Booths, welche es mit einer merkwürdigen krummen Linie dritter Ordnung und mit einer auf diese letztere gegründeten graphischen Darstellung der Logarithmen zu thun haben. Da ferner das Bestreben des Verfassers auch dahin gehen musste, die Boothsche Untersuchungsreihe als Glied einer Kette von Forschungen von verwandter Tendenz aufzuzeigen und zugleich das analytische Instrument näher zu kennzeichnen, welches im folgenden eine Hauptrolle zu spielen berufen ist, so gliedert sich die Schrift in die folgenden fünf Kapitel: I. Ältere und neuere Untersuchungen über Kurven-Analogie. II. Die Hyperbelfunktionen und deren Verwendung zur Parameter-Darstellung algebraischer Kurven. III. Die logocyklische Kurve. IV. Booths parabolische Trigonometrie, auf ihren wahren Charakter zurückgeführt. V. Graphische Darstellung der Logarithmensysteme durch eine Schar homofokaler Parabeln.

Ansbach. S. G.

---

**Bibliotech** matematica italiana dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX. Compilata dall' ingegn. prof. Pietro Riccardi. Ueber 1850 S. in gr. 8. Mark 40 franco.

**Fratelli Treves Buchhandlung, Bologna.**

# INHALT.

Seite

I. Zur Integration der Differentialgleichungen. Von Woldemar Heymann, Cand. math. in Dresden . . . . . 1
II. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Von J. Thomae, Professor an der Universität Jena (Fortsetzung) . . . . . 41

Kleinere Mittheilungen.

I. Zur Geometrie des Tetraeders. Von H. Thieme in Striegau . . . . . 56
II. Geometrischer Satz. Von Prof. Dr. H. Schroeter in Breslau . . . . . 61
III. Notiz über gewisse elliptische Integrale. Von Schlömilch . . . . . 62

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Versuch neuer Tafeln der hyperbolischen Functionen. Von Prof. Angelo Forti 1

Recensionen:

Schell, Prof. Dr. W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. Von Dietrich . . . . . 12
Drossbach, Maximilian, Kraft und Bewegung. Von P. Zech . . . 13
Weinberg, Messung der Wellenlängen des Lichts. Von P. Zech . . 13
Glaser, Beitrag zur Potentialtheorie. Von P. Zech . . . . . 13
Jenkin, Fleeming, Elektricität und Magnetismus. Deutsch von Exner. Von P. Zech . . . . . 13
Rayleigh, Theorie des Schalls. Deutsch von Neesen. Von P. Zech 14
Kohlrausch, Praktische Physik. Von P. Zech . . . . . 14
Salcher, Elemente der theoretischen Mechanik. Von P. Zech . . 15
Fritsch, Stoss zweier Massen unter Voraussetzung ihrer Undurchdringlichkeit behandelt. Von P. Zech . . . . . 15
Schell, Prof. Anton, Die Tachymetrie, mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichý und Starke. Von Bohn . . 15
Schapira, Dr. H., Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihren Anwendungen. Von W. Preobraschensky . . . 21
Doll, Dr. M., Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von Bohn . . 27
Petersen, Dr. Jul., Lehrbuch der ebenen Planimetrie. Von K. Schwering 29
Weinhold, A., Physikalische Demonstrationen. Von Richard Rühlmann 30
Steinhauser, Anton, Hilfstafeln zur präcisen Berechnung 20stelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu 20stelligen Logarithmen. Von Cantor . . . . . 38

Bibliographie vom 1. November bis 15. December 1881:

Periodische Schriften . . . . . 39
Reine Mathematik . . . . . 39
Angewandte Mathematik . . . . . 40
Physik und Meteorologie . . . . . 40

---

Druck von B. G. Teubner in Dresden

MAY 5 1882



# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**27. Jahrgang. 2. Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 6. April 1882.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

## Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel.

Soeben erschien und ist von **B. G. Teubner** in Leipzig **durch** alle Buchhandlungen zu beziehen:

# OEUVRES COMPLÈTES

DE

# NIELS HENRIK ABEL.

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR

MM. **L. SYLOW** et **S. LIE.**

2 TOMES. 4. *M.* 24.—

TOME PREMIER, CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL.
TOME SECOND, CONTENANT LES MÉMOIRES POSTHUMES D'ABEL.

CHRISTIANIA 1881.

**Leipzig, Kommissions-Verlag von B. G. Teubner.**



Verlag von **Eduard Trewendt in Breslau.**

Soeben wurde komplett:

# Handbuch der Mathematik

herausgegeben von

## Geh. Schulrath Dr. Schlömilch

unter Mitwirkung von

**Professor Dr. F. Reidt** und **Professor Dr. Heger.**

Zwei Bände. Lex. 8. Mit 580 Holzschnitten und 12 lithogr. Tafeln.
Preis: Geheftet 39 Mk., eleg. in Halbfranz gebunden 43 Mk. 80 Pf.

**Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.**

# III.

## Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel.

Von

FERD. MEISEL,

Lehrer a. d. Bauschule in Deutsch-Krone.

Hierzu Taf. I Fig. 1—12.

In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, die Intensitätsvertheilung auf der Oberfläche einer durch eine Kugel beleuchteten oder überhaupt bestrahlten Kugel, insbesondere innerhalb der durch die Berührungskreise der beiden gemeinsamen Tangentenkegel der Kugeln begrenzten Zone, sowie ferner die Intensitätsvariation im Schlagschatten der beleuchteten Kugel annähernd zu bestimmen. Es ist dabei von Beugungs- und Interferenzerscheinungen irgendwelcher Art vollständig abgesehen und die ganz elementare Vorstellung des geradlinigen Lichtstrahls zu Grunde gelegt worden.

Was die leuchtende Kugel betrifft, so ist dieselbe als leuchtende Fläche im strengen Sinne des Wortes vorausgesetzt worden, — eine Annahme, aus welcher, wie auch Zöllner (s. Photometrische Untersuchungen, S. 6) ausdrücklich anführt, sich die Unabhängigkeit der von einem Flächenelemente ausgestrahlten Lichtmenge vom Emanationswinkel mit Nothwendigkeit ergiebt. Die Nichtübereinstimmung dieser Folgerung mit der Erfahrung hat bekanntlich zu der Annahme geführt, dass an der Lichtemission eines glühenden Körpers auch unterhalb der Oberfläche des letzteren liegende Schichten betheiligt seien, und Zöllner hat gezeigt, dass aus dieser Annahme sich das von Lambert *a priori* seinen Untersuchungen zu Grunde gelegte Emanationsgesetz in ungezwungener Weise erklären lässt. Von der Benutzung des doch nicht in aller Strenge richtigen Lambert'schen Princips ist indessen in den folgenden Untersuchungen, wie aus dem Gesagten folgt, Abstand genommen worden, und es ist den Resultaten derselben ein anderes, als rein theoretisches Interesse nicht beizulegen.

Vor dem Uebergange zur eigentlichen Aufgabe möge die Bestrahlung einer Ebene durch eine Kugelfläche einer kurzen Betrachtung unterzogen werden.

Bedeutet

$a$ den senkrechten Abstand eines einzelnen leuchtenden Punktes $L$ von der beleuchteten Ebene,

$x$ die Entfernung eines Punktes $P$ der Ebene vom Fusspunkte $A$ des von $L$ auf dieselbe gefällten Perpendikels,

$J$ die Constante der Intensität, also das Verhältniss der auf ein im Abstande 1 von $L$ befindliches Flächenelement fallenden Strahlenmenge zur Grösse dieses Flächenelements,

so wird die im Punkte $P$ erzeugte Intensität ausgedrückt durch die Formel

$$1)\qquad J_x = \frac{Ja}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

An die Stelle des einzelnen leuchtenden Punktes werde nun eine leuchtende Kugel vom Radius $r$ gesetzt, und unter $a$ sei der senkrechte Abstand des Kugelmittelpunktes $M$ von der Ebene verstanden. Die durch $M$, $A$ und $P$ gelegte Ebene sei die Ebene der Zeichnung (s. Fig. 1). $L$ sei ein beliebiger Punkt der Kugelfläche, $B$ seine Projection auf die beleuchtete Ebene, $L'$ und $B'$ die Projectionen von $L$ und $B$ auf die Ebene der Zeichnung, $C$ der Mittelpunkt des durch $L$ senkrecht zu $MP$ gelegten Schnittkreises, $\angle LMP = \varphi$, $\angle AMP = \beta$, $\angle LCL' = \alpha$.

Die durch $L$ in $P$ erzeugte Intensität ergiebt sich aus 1), wenn für $a$ der Abstand $LB = L'B'$ und für $x$ die Entfernung $PB = \sqrt{\overline{PB'}^2 + \overline{BB'}^2}$ gesetzt wird.

Nun ist

$$L'B' = a - r\cos\varphi\cos\beta + r\sin\varphi\cos\alpha\sin\beta$$
$$= a + \frac{r}{\sqrt{a^2+x^2}}.(x\sin\varphi\cos\alpha - a\cos\varphi),$$
$$\overline{PB'}^2 = \left[x - \frac{rx\cos\varphi}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{ar\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]^2 + r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha.$$

Die Einsetzung dieser Werthe in 1) ergiebt für die durch $L$ in $P$ erzeugte Intensität nach einigen Umformungen, und wenn man der Kürze halber

$$a^2 + x^2 = m^2$$

setzt:

$$J_x = J\left[a + \frac{r}{m}(x\sin\varphi\cos\alpha - a\cos\varphi)\right].[m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi]^{-3/2}.$$

Dieser Werth ist nun mit dem Flächenelement $r^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\alpha$ zu multipliciren, und man erhält für die durch den ganzen, durch $L$ senkrecht zu $MP$ gelegten Schnittkreis, resp. den unendlich schmalen Flächenstreifen in $P$ erzeugte Intensität den Werth

$$J_1 = 2Jr^2\sin\varphi\, d\varphi(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{-3/2}$$
$$\times\int_0^\pi\left[a + \frac{r}{m}(x\sin\varphi\cos\alpha - a\cos\varphi)\right]d\alpha$$
$$= 2\pi Jr^2\sin\varphi\, d\varphi\,(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{-3/2}.\left(a - \frac{ra\cos\varphi}{m}\right).$$

Die durch die ganze Kugelfläche, resp. denjenigen Theil derselben, der überhaupt Strahlen nach $P$ senden kann, erzeugte Intensität ist demnach

$$J = 2\pi J r^2 a \int_0^{\arccos\frac{r}{m}} \sin\varphi \,.\, (m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{-3/2} \,.\, \left(1 - \frac{r}{m}\cos\varphi\right) d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \sin\varphi \,.\, \frac{1 - \frac{r}{m}\cos\varphi}{(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{3/2}} \,.\, d\varphi$$

$$= \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{3/2}} - \frac{r}{m}\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{mr\sqrt{m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi}}$$

$$+ \frac{1}{2m^3 r}\left[\sqrt{m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi} + \frac{m^2 + r^2}{\sqrt{m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi}}\right]$$

$$= -\frac{m\cos\varphi - r}{m^3\sqrt{m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi}}.$$

Für das bestimmte Integral ergiebt sich daraus der Werth

$$\frac{1}{m^3}$$

und folglich hat man

$$J = 2\pi r^2 \,.\, J \,.\, \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit 1) zeigt, dass eine leuchtende Kugelfläche auf ein ebenes Flächenelement, also auch auf irgend eine krumme Fläche, ganz ebenso wirkt, wie ein in ihrem Mittelpunkte befindlicher einzelner Leuchtpunkt, in dem die Leuchtkraft der halben Kugeloberfläche vereinigt ist — vorausgesetzt, dass nicht ein Theil der leuchtenden Kugel für das betrachtete Flächenelement verdeckt ist.

Es soll nun zur eigentlichen Aufgabe übergegangen und als beleuchtete Fläche eine Kugelfläche vom Radius r eingeführt werden; $a$ sei der Centralabstand beider Kugeln (Fig. 2). Auf der beleuchteten Kugelfläche werde ein Punkt $P$ zunächst so angenommen, dass von ihm aus die leuchtende Kugel als volle Scheibe sichtbar ist. Die durch $P$ und die Centrale gelegte Ebene sei die Ebene des Papiers. Eine in $P$ an die Kugel gelegte Tangentenebene schneidet die Zeichenfläche in einer Tangente des Schnittkreises. Die durch die ganze leuchtende Kugel in $P$ erzeugte Intensität wird aus 2) erhalten, indem man $a$ durch $MA$ und $x$ durch $AP$ ersetzt. Ist $\beta$ der dem Punkte $P$ entsprechende Centriwinkel, so ist

$$MN = a\cos\beta - \mathfrak{r}, \quad NP = a\sin\beta,$$

also

3) $$\mathrm{J} = 2\pi r^2 J \cdot \frac{a\cos\beta - \mathfrak{r}}{(a^2 + \mathfrak{r}^2 - 2a\mathfrak{r}\cos\beta)^{3/2}}.$$

Diese Formel gilt zwischen den Grenzen $\beta = 0$ und $\beta = \beta_1 = arccos\frac{\mathfrak{r}+r}{a}$; für $\beta = 0$ ergiebt sich der Maximalwerth

$$\mathrm{J}_0 = 2\pi J \cdot \left(\frac{r}{a-\mathfrak{r}}\right)^2$$

und für die Grenze $\beta = \beta_1$ folgt

$$J' = 2\pi J \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2\mathfrak{r}r}}\right)^3.$$

Wächst nun $\beta$ über $\beta_1$ hinaus, so wird für den Punkt $P$ ein Segment der Scheibe, als welche die Kugel erscheint, unsichtbar; dieses Segment wird ein Halbkreis, wenn $\beta$ die durch die von $M$ ausgehende Tangente bestimmte Grösse $\beta_0 = arc\cos\frac{\mathfrak{r}}{a}$ erreicht hat; wächst $\beta$ noch weiter, so wird der sichtbare Theil der Scheibe noch kleiner und verschwindet ganz, wenn $\beta$ den Winkel $\beta_2 = arc\cos\frac{\mathfrak{r}-r}{a}$ erreicht hat (Fig. 3).

Es soll nun zuerst der Fall

$$\beta_1 < \beta < \beta_0$$

untersucht werden. — Der senkrechte Abstand der in $P$ an die beleuchtete Kugel gelegten Tangentenebene vom Mittelpunkte der leuchtenden Kugel sei mit $n$ bezeichnet; $\varphi$ und $\alpha$ mögen dieselben Bedeutungen haben, wie bei der Untersuchung der Beleuchtung der Ebene.

Wächst nun $\varphi$ von 0 an, so ist der einer bestimmten Grösse von $\varphi$ entsprechende Kugelkreis von $P$ aus ganz sichtbar, bis $\varphi$ eine gewisse Grenze $\varphi_0$ erreicht hat, die durch die Gleichung

$$\cos\varphi_0 = \frac{m^2 + r^2 - (x - \sqrt{r^2 - n^2})^2}{2mr} = \frac{n^2 + x\sqrt{r^2 - n^2}}{mr},$$

in welcher $x = a\sin\beta$, $n = a\cos\beta - \mathfrak{r}$ zu setzen ist, bestimmt wird.

Die durch den unendlich schmalen ringförmigen Flächenstreifen der leuchtenden Kugel, welcher einem senkrecht zu $MP$ geführten Schnittkreise anliegt, in $P$ erzeugte Intensität wird, wie bereits gefunden, durch die Gleichnng ausgedrückt

$$J_1 = \frac{2\pi r^2 n J}{m} \cdot \frac{\sin\varphi(m - r\cos\varphi)\,d\varphi}{(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Es ist also der erste, den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_0$ entsprechende Theil der Intensität

$$\mathrm{J}_1 = \frac{2\pi J r^2 n}{m} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi(m - r\cos\varphi)\,d\varphi}{(m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{\sin\varphi\,(m - r\cos\varphi)\,d\varphi}{(m^2 + r^2 - 2\,mr\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{r - m\cos\varphi}{m^2\sqrt{m^2 + r^2 - 2\,mr\cos\varphi}}$$

und daraus folgt mit Berücksichtigung des oben angegebenen Werthes von $\varphi_0$

$$4)\qquad J_1 = \frac{2\pi J r n}{m^3} \cdot \frac{(r+x)(r - \sqrt{r^2 - n^2}) - n^2}{x - \sqrt{r^2 - n^2}}.$$

Für $\beta = \beta_1$ erhält man hieraus

$$J_1 = J' = 2\pi J \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{a^2 - \mathfrak{r}^2 - 2\mathfrak{r}r}}\right)^3,$$

denselben Werth, der bereits aus 3) gefunden wurde. Für $\beta = \beta_1$ stellt also, wie auch ohne Weiteres klar ist, $J_1$ die ganze Intensität dar, der zweite Theil hat seinen Grenzwerth 0.

Ist nun $\varphi > \varphi_0$, so darf man $\alpha$ nicht bis $\pi$, sondern nur bis zu einer gewissen Grenze $\alpha_1$ wachsen lassen, die leicht zu bestimmen ist (Fig. 3). Das in der Figur mit $w$ bezeichnete Stück ist $= \frac{n(m - r\cos\varphi)}{x}$ und daraus folgt

$$\alpha_1 = arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi}.$$

Es ist also die durch das von $P$ aus sichtbare Stück des zu $MP$ senkrechten Schnittkreises erzeugte Intensität

$$J_2 = 2Jr^2\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\alpha_1}\left[\frac{n + \frac{r}{m}(x\sin\varphi\cos\varphi - n\cos\varphi)}{(m^2 + r^2 - 2\,mr\cos\varphi)^{3/2}}\right]d\alpha$$

$$= \frac{2Jr^2\sin\varphi\,d\varphi}{m(m^2 + r^2 - 2\,mr\cos\varphi)^{3/2}} \cdot \left\{ n(m - r\cos\varphi)\,arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi} + \sqrt{r^2x^2\sin^2\varphi - n^2(r\cos\varphi - m)^2} \right\}$$

und demnach der ganze zweite Theil der Intensität:

$$5)\qquad J_2 = \frac{2Jr^3}{m}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi}{(m^2 + r^2 - 2\,mr\cos\varphi)^{3/2}}\left\{\sqrt{r^2x^2\sin^2\varphi - n^2(r\cos\varphi - m)^2} + n(m - r\cos\varphi)\,arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}\right\}d\varphi,$$

worin $\varphi_0 = arc\cos\left(\frac{n^2 + x\sqrt{r^2 - n^2}}{mr}\right)$, $\varphi_1 = arc\cos\left(\frac{r}{m}\right)$ ist.

Das hier auftretende Integral ist nun also näher zu untersuchen.

Es mag hier gleich eingeschaltet werden, dass, wie man leicht sieht, für den Fall, dass $\beta_0 < \beta < \beta_2$ ist, der Theil $J_1$ der Intensität ganz weg-

fällt und nur der jetzt näher zu ermittelnde Theil $J_2$ in Betracht kommt. In diesem Falle ist übrigens

$$\alpha_1 = arc\cos\frac{n(m - r\cos\varphi)}{rx\sin\varphi}$$

zu setzen, wodurch eine leicht ersichtliche Vorzeichenänderung in der obigen Formel für $J_2$ eintritt.

Es ist nun

$$\int\frac{\sin\varphi}{(m^2+r^2-2mr\cos\varphi)^{3/2}}\left\{\sqrt{r^2x^2\sin^2\varphi - n^2(r\cos\varphi - m)^2}\right.$$
$$\left. + n(m - r\cos\varphi).arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}\right\}d\varphi$$
$$= \int\frac{\sin\varphi\sqrt{r^2x^2\sin^2\varphi - n^2(r\cos\varphi - m)^2}}{(m^2+r^2-2mr\cos\varphi)^{3/2}}d\varphi$$
$$+ nm\int\frac{\sin\varphi}{(m^2+r^2-2mr\cos\varphi)^{3/2}}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi$$
$$- nr\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(m^2+r^2-2mr\cos\varphi)^{3/2}}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi.$$

Bezeichnet man der Kürze halber das ganze unbestimmte Integral der linken Seite mit $Z$ und setzt ferner

$$\sqrt{r^2x^2\sin^2\varphi - n^2(r\cos\varphi - m)^2} = A, \quad \sqrt{m^2+r^2-2mr\cos\varphi} = B,$$

so hat man

$$Z = \int\frac{\sin\varphi A}{B^3}d\varphi + nm\int\frac{\sin\varphi}{B^3}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi$$
$$- nr\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{B^3}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi.$$

Es ist also zu untersuchen

1) $$\int\frac{\sin\varphi A}{B^3}d\varphi.$$

Nach der Regel der theilweisen Integration, indem man nämlich $\frac{\sin\varphi}{B^3} = \frac{du}{d\varphi}$, $A = v$ setzt, erhält man

$$\int\frac{\sin\varphi A}{B^3}d\varphi = -\frac{A}{mrB} + mr\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{AB}d\varphi - n^2\int\frac{\sin\varphi}{AB}d\varphi.$$

2) $$\int\frac{\sin\varphi}{B^3}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi.$$

Setzt man

$$\frac{\sin\varphi}{B^3} = \frac{du}{d\varphi}, \quad arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi} = v,$$

so ergiebt sich

$$\int\frac{\sin\varphi}{B^3}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi}d\varphi$$
$$= -\frac{1}{mrB}.arc\cos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{rx\sin\varphi} + \frac{n}{m}\int\frac{d\varphi}{AB.\sin\varphi} - \frac{n}{r}\int\frac{\cos\varphi.d\varphi}{AB\sin\varphi}.$$

3) $$\int \frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{B^3} . \arccos \frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi} d\varphi.$$

Indem man $\frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{B^3} = \frac{du}{d\varphi}$, $\arccos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi} = v$ setzt, folgt

$$\int \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{B^3} . \arccos \frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{m^2 r^2} . \frac{m^2 + r^2 - 2mr\cos\varphi}{B} . \arccos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi}$$

$$+ \frac{n(2m^2 + r^2)}{m^2 r}\int\frac{d\varphi}{AB\sin\varphi} - \frac{n(m^2 + 2r^2)}{m r^2}\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{AB\sin\varphi} - \frac{n}{r}\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{AB}.$$

Daraus folgt nun

$$Z = -\frac{A}{mrB} + \frac{n(r - m\cos\varphi)}{m^2 B} . \arccos\frac{n(r\cos\varphi - m)}{r x \sin\varphi}$$

$$+ mr\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{AB} - \frac{n^2(m^2 + r^2)}{m^2}\int\frac{d\varphi}{AB\sin\varphi} + \frac{2rn^2}{m}\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{AB\sin\varphi}.$$

Die drei hierin auftretenden Integrale lassen sich auf elliptische reduciren. Führt man nämlich die Integration aus, so findet man für $AB$ die Wurzel aus einer Function dritten Grades von $\cos\varphi$, und setzt man dann $\cos\varphi = z$, so erhält man

$$\int\frac{\sin\varphi . \cos\varphi . d\varphi}{AB} = -\int\frac{z . dz}{\sqrt{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3}},$$

$$\int\frac{d\varphi}{AB\sin\varphi} = -\int\frac{\frac{dz}{1 - z^2}}{\sqrt{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3}},$$

$$\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{AB\sin\varphi} = -\int\frac{\frac{z . dz}{1 - z^2}}{\sqrt{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3}},$$

worin $A_0 \ldots A_3$ die bei der angedeuteten Multiplication entstehenden Coefficienten bedeuten.

Die Reduction dieser Integrale auf Kreisbögen, Logarithmen und die drei Normalformen elliptischer Integrale habe ich nach bekannter Methode ausgeführt. Da jedoch die Rechnung sehr langwierig ist, nichts Interessantes bietet und die Anwendung des erhaltenen Resultats sehr mühsam sein würde, möge es gestattet sein, diese Reduction hier wegzulassen und zu einer Näherungsmethode überzugehen.

---

**Näherungsmethode.**

Es werde zunächst wieder die durch eine Kugel beleuchtete Ebene betrachtet (Fig. 1).

Für den Punkt $A$ der Ebene ist die Intensität, welche durch ein Element der Kugelfläche erzeugt wird, für alle auf einem zu $AM$ senkrechten Schnittkreise liegenden Flächenelemente constant. Diese Elementarintensität ergiebt sich aus der für $J_x$ gefundenen Formel, wenn man $x=0$ setzt. Wird das Flächenelement der Kugel kurz mit $df$ bezeichnet, so findet man

$$dJ = J.df.(a - r\cos\varphi).(a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi)^{-3/2}.$$

Es soll nun das Gesetz gefunden werden, nach welchem sich diese für einen Kreis constante Elementarintensität von einem Kreise zum nächsten ändert.

Um den Punkt $A$ denke man sich eine Kugelfläche mit dem Radius 1 beschrieben und in Flächenelemente zerlegt, welche in Kreisen angeordnet sind, deren Ebenen senkrecht zu $AM$ liegen. Macht man ein solches Element $df_1$ zur Basis einer unendlich schmalen Pyramide, deren Spitze in $A$ liegt, so schneidet diese Pyramide aus der leuchtenden Kugelfläche, wenn sie dieselbe überhaupt trifft, ein Flächenelement von gewisser Grösse heraus. Berechnet man dieses Element und setzt es an die Stelle von $df$ in obige Formel, so erhält man offenbar das Gesetz, nach welchem sich die Leuchtkraft von Kreis zu Kreis in der Scheibe ändert, als welche die leuchtende Kugel von $A$ aus gesehen erscheint. Um die Grösse dieses Flächenelements zu bestimmen, hat man den Neigungswinkel der auf $AL$ liegenden Flächenelemente beider Kugeln zu ermitteln, $df_1$ durch den Cosinus dieses Winkels zu dividiren und mit $\overline{AL}^2$ zu multipliciren.

Der Neigungswinkel der beiden Flächenelemente gegen einander ist gleich dem Winkel der entsprechenden Kugelradien $= \angle MLA = \angle MNA$, und es ist

$$\sin\angle MNA = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}, \text{ also } \cos\angle MNA = \frac{a\cos\varphi - r}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}.$$

Ferner ist

$$\overline{AL}^2 = \overline{AN}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi, \text{ also } df = df_1 . \frac{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi)^{3/2}}{a\cos\varphi - r}.$$

Die Einsetzung in obige Formel ergiebt

$$6) \qquad dJ = J\,df_1 . \frac{a - r\cos\varphi}{a\cos\varphi - r}.$$

Diese Formel zeigt die Aenderung der Leuchtkraft in der scheinbaren Scheibe. Das Minimum von $dJ$ findet für $\varphi = 0$, d. h. im Centrum statt; mit wachsendem $\varphi$ nimmt $dJ$ zu und wird für $\varphi = arc\cos\frac{r}{a}$, d. h. am Rande der Scheibe unendlich.

Wenn $r$ klein gegen $a$ ist, so kann man die Centralprojection der leuchtenden Kugel auf die um $P$ beschriebene Kugelfläche näherungs-

weise als ebenen Kreis von dem Radius $\frac{r}{a}$ betrachten; ist ferner $z$ der Radius des einem Winkel $\varphi$ entsprechenden Kreises dieser ebenen Kreisfläche, so hat man

$$z = \frac{r \sin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\varphi}},$$

woraus sich

$$\cos\varphi = \frac{1}{r}\left[az^2 + \sqrt{(r^2 - a^2z^2)(1 - z^2)}\right]$$

ergiebt. Führt man diesen Werth in 5) ein, so folgt

$$7)\qquad dJ = J\,df_1 \,.\, \frac{r\left(a - az^2 - \sqrt{(r^2 - a^2z^2)(1 - z^2)}\right)}{a\left(az^2 + \sqrt{(r^2 - a^2z^2)(1 - z^2)}\right) - r^2}.$$

Diese Gleichung ergiebt also die Intensität des Flächenelements unmittelbar als Function seines Abstandes vom Mittelpunkte der Projection. Denkt man sich in jedem Punkte der als eben betrachteten kreisförmigen Scheibe die Intensität senkrecht zur Ebene der Scheibe aufgetragen, so erhält man einen Rotationskörper, dessen Meridiancurve durch die Gleichung

$$7a)\qquad y = J \,.\, \frac{r\left(a - az^2 - \sqrt{(r^2 - a^2z^2)(1 - z^2)}\right)}{a\left[az^2 + \sqrt{(r^2 - a^2z^2)(1 - z^2)}\right] - r^2}$$

bestimmt und dessen Volumen proportional der im Punkte $A$ erzeugten Intensität ist.

Ist nun ein Theil der Scheibe verdeckt, so kann man, um näherungsweise die durch den Rest der Scheibe erzeugte Intensität zu finden, die trennende Linie in der Scheibe zur Directrix einer zur Ebene der Scheibe senkrechten Cylinderfläche machen und wird das durch diese Cylinderfläche abgeschnittene Stück des erwähnten Rotationskörpers als proportional der gesuchten Intensität betrachten dürfen.

Handelt es sich nun um die in einem ausserhalb $A$ liegenden Punkte $P$ der Ebene erzeugte Intensität, so ist die eben angegebene Betrachtungsweise nicht zulässig, weil die Verbindungslinien eines solchen Punktes mit den Punkten eines senkrecht zu $MP$ gelegten Schnittkreises nicht gleiche Winkel mit der Normalen der beleuchteten Ebene bilden. Indessen erhält man jedenfalls ein annähernd richtiges Resultat, wenn man die Formel 7) auch auf einen solchen Punkt anwendet, die Grösse $a$ aber durch $m$ ersetzt und dann noch mit dem Cosinus eines mittleren Einfallswinkels multiplicirt.

Um von der durch die bisher eingeführten Vernachlässigungen hervorgebrachten Abweichung eine Vorstellung zu erhalten, ist es vielleicht nicht ohne Interesse, die durch die volle Scheibe in einem beliebigen Punkte $P$ erzeugte Intensität, für die ein exacter Ausdruck bereits in 2) vorliegt, nun auch auf die eben beschriebene Weise zu berechnen. Als

Cosinus des mittleren Einfallswinkels würde hier einfach $\frac{a}{m}$ zu betrachten sein und man hätte also die annähernd richtige Gleichung

$$dJ = J\,df_1 \cdot \frac{ar}{m} \cdot \frac{m - mz^2 - \sqrt{(r^2 - m^2z^2)(1-z^2)}}{m\left[mz^2 + \sqrt{(r^2 - m^2z^2)(1-z^2)}\right] - r^2}.$$

Die durch die ganze Scheibe hervorgerufene Intensität wäre demnach annähernd

$$\mathrm{J} = \frac{2\pi a r}{m} \cdot J \cdot \int_0^{\frac{r}{m}} \frac{z\left(m - mz^2 - \sqrt{r^2 - (m^2+r^2)z^2 + m^2z^4}\right)dz}{m\left[mz^2 + \sqrt{r^2 - (m^2+r^2)z^2 + m^2z^4}\right] - r^2}.$$

Mit Hilfe der Substitution $z^2 = y$ findet man

$$\int \frac{z(m - mz^2 - R)\,dz}{m[mz^2 + R] - r^2} = \frac{1}{2m^2}\left\{\frac{m^2 - r^2}{2m} \cdot log \cdot \left[-\frac{m^2+r^2}{2} + m^2z^2 + mR\right] - R\right\},$$

wenn nämlich der Kürze halber

$$\sqrt{r^2 - (m^2+r^2)z^2 + m^2z^4} = R$$

gesetzt wird.

Daraus ergiebt sich für das bestimmte Integral der Werth

$$\frac{1}{2m^2}\left[r + \frac{m^2 - r^2}{2m} \cdot log \cdot \left(\frac{m+r}{m-r}\right)\right]$$

und daraus folgt schliesslich

$$\mathrm{J} = \frac{\pi a r}{m^3} \cdot J \cdot \left[r + \frac{m^2 - r^2}{2m} \cdot log \cdot \left(\frac{m+r}{m-r}\right)\right].$$

Diese Formel stimmt mit

2) $$\mathrm{J} = \frac{2\pi a r^2}{m^3} \cdot J$$

überein für

$$r = \frac{m^2 - r^2}{2m} \cdot log \cdot \frac{m+r}{m-r} \quad \text{oder} \quad \frac{2mr}{m^2 - r^2} = log \cdot \frac{m+r}{m-r},$$

eine Bedingung, die ihrer Erfüllung mit gegen $r$ wachsendem $m$ sich sehr schnell nähert. Es ist damit die Zulässigkeit der hier angewandten Betrachtungsweise für einigermassen grosse Entfernungen nachgewiesen.

Betrachtet man nun wieder einen Punkt der beleuchteten Kugel, dem ein zwischen $\beta_1$ und $\beta_2$ liegender Werth von $\beta$ entspricht (Fig. 3), so schneidet die in einem solchen Punkte an die beleuchtete Kugel gelegte Tangentenebene von der leuchtenden Kugel und somit auch von der als ebene Kreisfläche betrachteten Projection der letzteren auf die um $P$ beschriebene Kugel ein Segment ab. Man wird nun, dem früher Gesagten entsprechend, in der Sehne, in welcher die Tangentenebene die kreisförmige Scheibe schneidet, eine zu letzterer senkrechte Ebene

zu errichten und das durch letztere von dem früher erwähnten Rotationskörper abgeschnittene Stück zu ermitteln haben. Das Volumen des abgeschnittenen Stückes giebt, mit dem Cosinus des mittleren Einfallswinkels multiplicirt, annähernd die gesuchte Intensität an.

Als mittleren Einfallswinkel wird man den Winkel der Normalen der Ebene mit einer Linie zu verstehen haben, die man erhält, wenn man den Schwerpunkt des abgeschnittenen Theils des Rotationskörpers auf die Ebene der kreisförmigen Scheibe projicirt und diese Projection mit dem betrachteten Punkte $P$ verbindet.

Wollte man nun diese Rechnung mit Zugrundelegung der unter 7a) gegebenen Meridiancurve durchführen, so würde die Berechnung ausserordentlich complicirt werden und einigermassen übersichtliche Resultate nicht ergeben. Es soll daher diese Curve durch eine einfachere ersetzt werden.

Am nächsten würde es liegen, die Intensität in der scheinbaren Scheibe näherungsweise als umgekehrt proportional dem Cosinus des Winkels $\varphi$ zu betrachten, was bei unendlicher Entfernung des beleuchteten Punktes genau der Fall ist. Man hätte dann zu setzen

$$dJ = J\,df_1 \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{J\,df_1\,r}{a z^2 + \sqrt{(r^2 - a^2 z^2)(1 - z^2)}}.$$

Indessen führt auch diese Gleichung nicht zu dem gewünschten Ziele und es möge daher an die Stelle der durch 7a) angegebenen richtigen Curve ein Viertel einer Ellipse als Meridiancurve angenommen werden. Die Ellipse ist so zu bestimmen, dass sie für die Mitte der Scheibe dieselbe Intensität wie die richtige Curve ergiebt, dass sie ferner das im Endpunkte des Radius auf diesem errichtete Perpendikel berührt und dass schliesslich das Volumen des ganzen Rotationskörpers $= \frac{2\pi r^2}{a} J$, d. h. gleich der durch die ganze Scheibe im Punkte $A$ wirklich erzeugten Intensität ist. Die Gleichung dieser Ellipse ist — wenn man $a$ durch $m$ ersetzt —:

$$y = \left(4 - \frac{3}{r}\sqrt{r^2 - m^2 z^2}\right) J.$$

Wie Fig. 4, in welcher die richtige Curve durch $ad$ (für $a = 10r$), die Ellipse durch $ac$ dargestellt ist, zeigt, ist die Abweichung beider Curven von einander allerdings nicht ganz unbedeutend. Indessen wird man auf eine angenäherte Richtigkeit der Resultate bei Anwendung der Ellipse dennoch rechnen dürfen, da der Unterschied zweier entsprechender Abschnitte der beiden Rotationskörper jedenfalls verhältnissmässig viel geringer ist, als der Unterschied der Abschnitte der durch die Curven begrenzten Flächen. Ueberdies mag berücksichtigt werden, dass die Intensitäten, welche in dem hier betrachteten Bezirke der beleuchteten

Kugel auftreten, überhaupt sehr klein wird gegen diejenigen, welche in der Nähe der Centralen erzeugt werden.

Bezeichnet man mit $p$ den senkrechten Abstand der trennenden Sehne vom Mittelpunkte der Scheibe, so ist, wie man leicht erkennt,

$$p = \frac{n}{m} = \frac{a\cos\beta - \mathfrak{r}}{\sqrt{a^2 + \mathfrak{r}^2 - 2a\mathfrak{r}\cos\beta}}.$$

Es sei nun

I) $$\beta_1 < \beta < \beta_0.$$

In diesem Falle ist weniger als die Hälfte der Scheibe verdeckt. Es ist nun zunächst die durch die volle Scheibe vom Radius $p$ erzeugte Intensität $J_1$ zu ermitteln. Diese ist

$$J_1 = 2\pi J \int_0^p z\left(4 - \frac{3}{r}\sqrt{r^2 - m^2 z^2}\right) dz . \cos\lambda$$

$$= 2\pi J \left\{2p^2 - \frac{r^3 - (r^2 - m^2 p^2)^{3/2}}{m^2 r}\right\} \cos\lambda,$$

wenn der erwähnte mittlere Einfallswinkel vorläufig mit $\lambda$ bezeichnet wird.

Für Punkte der Scheibe, deren $z$ zwischen $p$ und $\frac{r}{m}$ liegt, ist die Elementarintensität mit dem Bogen $\left(\pi + 2\arcsin\frac{p}{z}\right)$ zu multipliciren. Die durch den äussern Theil der Scheibe erzeugte Intensität $J_2$ ist also

$$J_2 = J \int_p^{\frac{r}{m}} z\left(4 - \frac{3}{r}\sqrt{r^2 - m^2 z^2}\right)\left(\pi + 2\arcsin\frac{p}{z}\right) dz . \cos\lambda$$

$$= J \left\{\frac{\pi}{m^2 r}\left[2r^3 - 2p^2 m^2 r - (r^2 - m^2 p^2)^{3/2}\right]\right.$$

$$\left. + 2\int_p^{\frac{r}{m}} z\left(4 - \frac{3}{r}\sqrt{r^2 - m^2 z^2}\right) . \arcsin\frac{p}{z}\, dz\right\} \cos\lambda$$

und demnach die gesammte Intensität

$$J = J_1 + J_2 = J \left\{\frac{\pi}{m^2 r}\left[2m^2 p^2 r + (r^2 - m^2 p^2)^{3/2}\right]\right.$$

$$\left. + 2\int_p^{\frac{r}{m}} z\left(4 - \frac{3}{r}\sqrt{r^2 - m^2 z^2}\right) . \arcsin\frac{p}{z}\, dz\right\} \cos\lambda.$$

Setzt man

$$z\left(4-\frac{3}{r}\sqrt{r^2-m^2z^2}\right)=\frac{du}{dz},\quad \arcsin\frac{p}{z}=v,$$

so findet man

$$\int z\left(4-\frac{3}{r}\sqrt{r^2-m^2z^2}\right).\arcsin\frac{p}{z}\,dz$$

$$=\left[2z^2+\frac{(r^2-m^2z^2)^{3/2}}{m^2r}\right].\arcsin\frac{p}{z}+p\left\{2\int\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-p^2}}+\frac{1}{m^2r}\int\frac{(r^2-m^2z^2)^{3/2}}{z\sqrt{z^2-p^2}}\,dz\right\}$$

$$=\left[2z^2+\frac{(r^2-m^2z^2)^{3/2}}{m^2r}\right].\arcsin\frac{p}{z}$$

$$+p\left\{2\sqrt{z^2-p^2}+\frac{1}{2m^2r}\left[-m^2\sqrt{-r^2p^2+z^2(r^2+m^2p^2)-m^2z^4}\right.\right.$$

$$+\frac{r^3}{p}.\arcsin\frac{(r^2+m^2p^2)z^2-2r^2p^2}{z^2(r^2-m^2p^2)}$$

$$\left.\left.+\left(\tfrac{3}{2}mr^2-\tfrac{1}{2}m^3p^2\right).\arcsin\frac{r^2+m^2p^2-2m^2z^2}{r^2-m^2p^2}\right]\right\}.$$

Daraus erhält man für das bestimmte Integral den Werth

$$\frac{2r^2}{m^2}.\arcsin\frac{mp}{r}+\frac{2p}{m}\sqrt{r^2-m^2p^2}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{m^2}-\frac{3rp}{2m}+\frac{mp^3}{2r}-2p^2-\frac{(r^2-m^2p^2)^{3/2}}{m^2r}\right]$$

und hieraus endlich

$$J=J\left\{\frac{4r^2}{m^2}.\arcsin\frac{mp}{r}+\frac{4p}{m}\sqrt{r^2-m^2p^2}+\pi\left(\frac{r^2}{m^2}-\frac{3rp}{2m}+\frac{mp^3}{2r}\right)\right\}.\cos\lambda.$$

Es ist also nun $\cos\lambda$ zu ermitteln.

Für den Abstand $s_1$ des Schwerpunktes des hier in Betracht kommenden Theils des Rotationskörpers von der Axe desselben findet man leicht

$$s_1=\frac{(r^2-m^2p^2)^{3/2}\left[8-\frac{9\pi}{8r}\sqrt{r^2-m^2p^2}\right]}{3m\left[\pi\left(3r^2-\tfrac{3}{2}mrp+\tfrac{1}{2}\frac{m^3p^3}{r}\right)-4r^2.\arccos\frac{pm}{r}+4mp\sqrt{r^2-m^2p^2}\right]}$$

und man hat sodann

8a) $$\cos\lambda=s_1+p.$$

Setzt man noch für $p$ seinen Werth $\frac{n}{m}$, so erhält man

8b) $$s_1=\frac{(r^2-n^2)^{3/2}\left[8-\frac{9\pi}{8r}\sqrt{r^2-n^2}\right]}{3m\left[\pi\left(3r^2-\tfrac{3}{2}rn+\tfrac{1}{2}\frac{n^3}{r}\right)-4r^2.\arccos\frac{n}{r}+4n\sqrt{r^2-n^2}\right]}$$

und schliesslich

8) $$J=\frac{J}{m^2}\left\{4r^2.\arcsin\frac{n}{r}+4n\sqrt{r^2-n^2}+\pi\left(r^2-\tfrac{3}{2}rn+\frac{n^3}{2r}\right)\right\}\cos\lambda.$$

Ist

II) $$\beta_0<\beta<\beta_2,$$

so ist mehr, als die Hälfte der Scheibe verdeckt. $J_1$ tritt in diesem Falle nicht auf, und da die Elementarintensität mit dem Bogen $\left(\pi - 2\, arc\sin\frac{p}{2}\right)$ zu multipliciren ist, ist der zweite Theil von $J_2$ negativ zu nehmen. Man gelangt dadurch zu der Formel

$$9)\quad \mathrm{J} = \frac{J}{m^2}\left\{-4r^2 . arc\sin\frac{n}{r} - 4n\sqrt{r^2-n^2} + \pi\left(r^2 + \tfrac{3}{2}rn - \frac{n^3}{2r}\right)\right\}\cos\lambda,$$

welche sich aus der für den ersten Fall gefundenen ergiebt, wenn man $n$ negativ nimmt. Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes des hier in Betracht kommenden Abschnittes von der Axe des Rotationskörpers mit $s_2$, so hat man zu setzen

$$9\text{a})\qquad \cos\lambda = s_2 - p$$

und für den erwähnten Abstand ergiebt sich die Formel

$$9\text{b})\quad s_2 = \frac{(r^2-n^2)^{3/2} . \left[8 - \frac{9\pi}{8r}\sqrt{r^2-n^2}\right]}{3m\left[\pi\left(-r^2 + \tfrac{3}{2}rn - \tfrac{1}{2} . \frac{n^3}{r}\right) + 4r^2 . arc\cos\frac{n}{r} - 4n\sqrt{r^2-n^2}\right]}.$$

Für $\beta = \beta_0$ ergiebt sich die sehr einfache Formel

$$\mathrm{J} = J . \frac{r^3(8 - \frac{9}{8}\pi)}{3m^3}.$$

Zur Berechnung eines Beispiels habe ich die Zahlenwerthe

$$\mathrm{r} = 1,\quad r = 10,\quad a = 100$$

gewählt. Daraus folgen die Werthe

$$\beta_1 = 83^0\,41'\,4{,}86'',\quad \beta_0 = 89^0\,25'\,31{,}18'',\quad \beta_2 = 95^0\,9'\,48{,}99''.$$

Aus Formel 3) erhält man die Zahlen

| für $\beta = 0^0$ | $15^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $75^0$ | $83^0 41' 4{,}86''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{J}}{J} = 0{,}06411$ | 0,06184 | 0,05521 | 0,04474 | 0,03125 | 0,01575 | 0,00632 |

Ferner folgt aus 8) für $\beta = 86^0\,30'$ der Werth $\frac{\mathrm{J}}{J} = 0{,}00363$
und „ $\beta = 89^0\,25'\,31{,}18''$ „ „ „ $= 0{,}00149$
und aus 9) „ $\beta = 92^0\,30'$ „ „ „ $= 0{,}00028$
und „ $\beta = 95^0\,9'\,48{,}99''$ „ „ „ $= 0{,}00000$.

Die diesen Werthen entsprechende Curve ist in Fig. 5 dargestellt.

---

## Untersuchung der Intensitätsvariation im Halbschatten der beleuchteten Kugel.

Im Abstande $\xi$ von $\mathfrak{M}$, dem Mittelpunkte der beleuchteten Kugel, sei durch den Schatten ein Schnitt senkrecht zur Axe gelegt (Fig. 6).

Der Radius $UX$ des Schnittkreises wird durch die gemeinsamen Tangenten der Kreise und durch die von $M$ an den Kreis $\mathfrak{M}$ gelegte Tangente in drei Abschnitte getheilt. $UV$ liegt im Kernschatten; für einen Punkt innerhalb $VW$ reicht die Bedeckung der hellen Scheibe durch die dunkle über den Mittelpunkt der ersteren hinaus; für einen Punkt innerhalb $WX$ reicht die Bedeckung nicht bis zum Mittelpunkt der hellen Scheibe. Liegt nun z. B. der betrachtete Punkt $P$ auf $WX$, so erhält er von dem Theile $NQ$ der leuchtenden Kugel, d. h. von einem gewissen centralen Theile der scheinbaren leuchtenden Scheibe volles Licht; von einem über $QN$ hinaus liegenden, senkrecht zu $MP$ gelegten Schnittkreis wird durch eine Ellipse ein Stück herausgeschnitten, deren grosse Axe $= LT$ ist. Es wäre also die Intensität, welche durch den übrig bleibenden Theil des unendlich schmalen Ringes erzeugt wird, zu ermitteln und dann von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1 = arc\,cos\left(\frac{r}{m}\right)$ zu integriren. Die Ausführung dieser Rechnung wäre jedoch, wenn überhaupt möglich, ausserordentlich complicirt und würde keinesfalls auch nur einigermassen übersichtliche Formeln ergeben. Es soll deshalb sofort zu einer Näherung geschritten werden, welche der früher benutzten Näherung entspricht.

Beschreibt man wieder um den Punkt $P$ eine Kugel vom Radius 1, so sind die Centralprojectionen der Kugeln $M$ und $\mathfrak{M}$ auf diese Kugel Kreise, deren Flächen annäherungsweise als eben betrachtet werden mögen. Der Radius der Projection der leuchtenden Kugel ist $= \frac{r}{m}$, der Radius der Projection der beleuchteten Kugel sei mit $\varrho$, der Centralabstand beider Projectionen mit $p$ bezeichnet. Sind ferner $\xi$ und $\eta$ die Coordinaten des Punktes $P$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ als Ursprung, so hat man

$$p = sin\,MP\mathfrak{M}, \quad cos\,MP\mathfrak{M} = \frac{\xi^2 + a\xi + \eta^2}{\sqrt{[(a+\xi)^2 + \eta^2](\xi^2 + \eta^2)}},$$

demnach

$$p = \frac{a\eta}{\sqrt{[(a+\xi)^2 + \eta^2](\xi^2 + \eta^2)}} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Bei der theilweisen Bedeckung der hellen durch die dunkle Scheibe können, vorausgesetzt, dass $r > 2\mathfrak{r}$ sei, folgende vier Phasen eintreten:

I. Die dunkle Scheibe schneidet in die helle ein, erreicht aber nicht den Mittelpunkt der letzteren;

II. die dunkle Scheibe schneidet in die helle ein und überdeckt den Mittelpunkt der letzteren;

III. die dunkle Scheibe liegt ganz innerhalb der hellen und bedeckt den Mittelpunkt der letzteren;

IV. die dunkle Scheibe liegt ganz innerhalb der hellen, ohne den Mittelpunkt der letzteren zu bedecken.

Die Bezirke der vier Phasen im Halbschatten sind in Fig. 7 angegeben. Bei der Begrenzung dieser Bezirke kommen folgende Abscissen in Betracht, deren Bedeutung ebenfalls aus Fig. 7 und Fig. 7a zu ersehen ist:

$$\xi_0 = -\frac{\mathfrak{r}}{a}(r+\mathfrak{r}), \quad \xi_3 = \frac{a\mathfrak{r}}{r-\mathfrak{r}},$$

$$\xi_1 = -\frac{\mathfrak{r}^2}{a}, \quad \xi_4 = a\mathfrak{r}\,.\,\frac{\sqrt{a^2-\mathfrak{r}^2}+\sqrt{a^2-(r-\mathfrak{r})^2}}{(r-\mathfrak{r})\sqrt{a^2-\mathfrak{r}^2}-\mathfrak{r}\sqrt{a^2-(r-\mathfrak{r})^2}},$$

$$\xi_2 = \frac{\mathfrak{r}}{a}(r-\mathfrak{r});$$

zu $\xi_4$ gehört die Ordinate

$$\eta_4 = \frac{ar\mathfrak{r}}{(r-\mathfrak{r})\sqrt{a^2-\mathfrak{r}^2}-\mathfrak{r}\sqrt{a^2-(r-\mathfrak{r})^2}}.$$

Es soll nun für jede der vier Phasen die bestimmten Werthen von $p$ und $\varrho$ entsprechende Intensität gefunden werden. Die Einführung der Ellipse als Näherungscurve führt in diesem Falle auf unbequeme elliptische Integrale; es soll daher, um zu übersichtlicheren Formeln zu gelangen, an die Stelle der genauen Curve ein Parabelstück gesetzt werden, dessen Scheitel und Scheiteltangente mit dem Scheitel und der Scheiteltangente der richtigen Curve zusammenfallen, und das so zu bestimmen ist, dass die der ganzen Scheibe zukommende Leuchtkraft nicht verändert wird. Als Gleichung der diesen Bedingungen entsprechenden Parabel findet man leicht

$$y = J\left(1+\frac{2m^2}{r^2}\,.\,z^2\right),$$

worin $m=\sqrt{(a+\xi)^2+\eta^2}$ ist. Da für die Punkte des Schlagschattens die Ordinate $\eta$ immer als klein gegen $a+\xi$ zu betrachten ist, kann man ohne merkbare Abweichung für alle Punkte des Schattens den Cosinus des mittleren Einfallswinkels $=\frac{a+\xi}{m}$ setzen, ohne auf die Lage des Schwerpunktes des sichtbaren Theils der Scheibe Rücksicht zu nehmen. Man kann diesen Factor von vornherein in die Gleichung der angenommenen Parabel einfügen und dieselbe schreiben

$$y = J(a+\xi)\,.\left[\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}\,.\,z^2\right].$$

Es muss nun für jede der vier Phasen die Intensitätsformel gefunden werden.

Phase I (Fig. 8). Zunächst ist ein voller Kreis vom Radius $(p-\varrho)$ in Rechnung zu ziehen. Das unbestimmte Integral

$$\int(a+\xi)\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}\,.\,z^2\right)z\,dz = \frac{(a+\xi)z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{mz^2}{r^2}\right)$$

ergiebt für die Grenzen 0 und $p-\varrho$ den Werth

$$J_1 = \pi J(a+\xi)(p-\varrho)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{m(p-\varrho)^2}{r^2}\right).$$

Für $p-\varrho < z < \frac{r}{m}$ ist die Elementarintensität zu multipliciren mit

$$2(\pi-\alpha) = 2\left(\pi - arc\cos\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}\right) = \pi + 2.arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}.$$

Die durch den ausserhalb des Radius $p-\varrho$ gelegenen Theil der Scheibe erzeugte Intensität ist demnach

$$J_2 = J(a+\xi)\int_{p-\varrho}^{\frac{r}{m}} z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right)\left(\pi + 2\,arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}\right)dz,$$

was sich reducirt auf

$$J_2 = J(a+\xi)\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{2r^2}{m^3}-\frac{(p-\varrho)^2}{m}-\frac{m(p-\varrho)^4}{r^2}\right]\right.$$
$$\left.+2\int_{p-\varrho}^{\frac{r}{m}} z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right).arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}dz\right\}.$$

Demnach ist die volle Intensität

$$J = J(a+\xi)\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{2r^2}{m^3}+\frac{(p-\varrho)^2}{m}+\frac{m(p-\varrho)^4}{r^2}\right]\right.$$
$$\left.+2\int_{p-\varrho}^{\frac{r}{m}} z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right).arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}dz\right\}.$$

Setzt man $z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right)=\frac{du}{dz}$, $arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}=v$, so findet man

$$\int z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right).arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}.dz = \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{mz^2}{r^2}\right).arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}$$
$$-\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{z^2}{m}+\frac{mz^4}{r^2}\right)\frac{z^2-p^2+\varrho^2}{z\sqrt{-z^4+2z^2(p^2+\varrho^2)-(p^2-\varrho^2)^2}}dz.$$

Setzt man ferner $\sqrt{-z^4+2z^2(p^2+\varrho^2)-(p^2-\varrho^2)^2}=R$, so findet man

$$\int\left(\frac{z^2}{m}+\frac{mz^4}{r^2}\right)\frac{z^2-p^2+\varrho^2}{zR}dz$$
$$=-\frac{p^2-\varrho^2}{m}.\int\frac{z\,dz}{R}+\left[\frac{1}{m}-\frac{m}{r^2}(p^2-\varrho^2)\right]\int\frac{z^3\,dz}{R}+\frac{m}{r^2}\int\frac{z^5\,dz}{R}.$$

Ferner ist, wie man mit Hilfe der Substitution $z^2=y$ findet,

$$\int\frac{z\,dz}{R} = -\tfrac{1}{2}arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-z^2}{2p\varrho},$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{R} = -\tfrac{1}{2}\left\{R + (p^2+\varrho^2)\,.\,arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-z^2}{2p\varrho}\right\},$$

$$\int \frac{z^5\,dz}{R} = -\tfrac{1}{4}\,[z^2+3(p^2+\varrho^2)]\,R - \tfrac{1}{2}(p^4+4p^2\varrho^2+\varrho^4)\,.\,arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-z^2}{2p\varrho}.$$

Folglich ist

$$\int\left(\frac{z^2}{m}+\frac{m z^4}{r^2}\right)\frac{z^2-p^2+\varrho^2}{zR}\,.\,dz$$

$$= arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-z^2}{2p\varrho}\left\{\frac{p^2-\varrho^2}{2m} - \frac{p^2+\varrho^2}{2}\left[\frac{1}{m}-\frac{m}{r^2}(p^2-\varrho^2)\right] - \frac{m}{2r^2}(p^4+4p^2\varrho^2+\varrho^4)\right\}$$

$$- R\left\{\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{m}-\frac{m}{r^2}(p^2-\varrho^2)\right]+\frac{m}{4r^2}[z^2+3(p^2+\varrho^2)]\right\},$$

also

$$\int z\left(\frac{1}{m}+\frac{2m}{r^2}z^2\right) arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz}\,dz$$

$$= \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{m z^2}{r^2}\right) arc\sin\frac{p^2+z^2-\varrho^2}{2pz} + \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{2mp^2}{r^2}+\frac{m\varrho^2}{r^2}\right) arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-z^2}{2p\varrho}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{2r^2}(z^2+p^2+5\varrho^2)\right]\sqrt{-z^4+2z^2(p^2+\varrho^2)-(p^2-\varrho^2)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich für das bestimmte Integral der Werth

$$\frac{r^2}{m^3}arc\sin\frac{p^2+\left(\frac{r}{m}\right)^2-\varrho^2}{2\frac{pr}{m}} + \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{2mp^2}{r^2}+\frac{m\varrho^2}{r^2}\right) arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-\left(\frac{r}{m}\right)^2}{2p\varrho}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left[\frac{3}{2m}+\frac{m}{2r^2}(p^2+5\varrho^2)\right].\sqrt{-\left(\frac{r}{m}\right)^4+2\left(\frac{r}{m}\right)^2(p^2+\varrho^2)-(p^2-\varrho^2)^2}$$

$$-\frac{\pi}{4}\left\{(p-\varrho)^2\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{r}(p-\varrho)^2\right]+\varrho^2\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{r^2}(2p^2+\varrho^2)\right]\right\}$$

und so ergiebt sich schliesslich

$$10)\qquad J = J(a+\xi)\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{2r^2}{m^3}-\varrho^2\left(\frac{1}{m}+\frac{m}{r^2}(2p^2+\varrho^2)\right)\right]\right.$$

$$+\frac{2r^2}{m^3}arc\sin\frac{p^2+\left(\frac{r}{m}\right)^2-\varrho^2}{2\frac{pr}{m}} + \varrho^2\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{r^2}(2p^2+\varrho^2)\right] arc\sin\frac{p^2+\varrho^2-\left(\frac{r}{m}\right)^2}{2p\varrho}$$

$$\left.+\tfrac{1}{4}\left[\frac{3}{m}+\frac{m}{r^2}(p^2+5\varrho^2)\right].\sqrt{-\left(\frac{r}{m}\right)^4+2\left(\frac{r}{m}\right)^2(p^2+\varrho^2)-(p^2-\varrho^2)^2}\right\}.$$

Phase II (Fig. 9). In diesem Falle tritt $J_1$ nicht auf; $J_2$ ist zwischen den Grenzen $(\varrho-p)$ und $\frac{r}{m}$ zu nehmen und man erhält dadurch dieselbe Formel, welche für Phase I gefunden wurde.

Phase III (Fig. 10). $J_1$ fällt hier ebenfalls weg; $J_2$ ist zwischen den Grenzen $(\varrho-p)$ und $(\varrho+p)$ zu nehmen und dann tritt noch die In-

tensität $J_3$ hinzu, welche durch den äusseren vollen Ring, für welchen $z$ zwischen den Grenzen $\varrho+p$ und $\frac{r}{m}$ zu nehmen ist, erzeugt wird.

Mit Hilfe des bereits berechneten unbestimmten Integrals findet man leicht

$$J_2 = J(a+\xi)\pi p \left\{ \frac{2\varrho+p}{m} + \frac{m}{r^2}(p^3+4p^2\varrho+4p\varrho^2+4\varrho^3) \right\}$$

und ferner

$$J_3 = 2J(a+\xi)\pi \left\{ \frac{r^2}{m^3} - \frac{(p+\varrho)^2}{2}\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{r^2}(p+\varrho)^2\right] \right\},$$

schliesslich also

$$11)\qquad J = J(a+\xi)\pi \left\{ \frac{2r^2}{m^3} - \frac{\varrho^2}{m} - \frac{m\varrho^2}{r^2}(2p^2+\varrho^2) \right\}.$$

Phase IV (Fig. 11). Hier besteht J aus $J_1$, $J_2$ und $J_3$; $J_1$ ist zwischen den Grenzen 0 und $p-\varrho$, $J_2$ zwischen den Grenzen $p-\varrho$ und $p+\varrho$, $J_3$ zwischen den Grenzen $p+\varrho$ und $\frac{r}{m}$ zu nehmen. Man gelangt auf diese Weise zu derselben Formel, welche soeben für Phase III gefunden worden ist.

---

Die nach den soeben abgeleiteten Formeln für einen Punkt des Halbschattens gefundene Intensität ist die Bestrahlungsstärke eines durch diesen Punkt gehenden, senkrecht zur Centrale beider Kugeln gerichteten Flächenelements.

---

### Beispiel (Fig. 12).

Es sind auch hier wieder die Werthe

$$\mathfrak{r}=1,\quad r=10,\quad a=100$$

gewählt worden. Daraus ergeben sich die Werthe

$$\xi_0=-0{,}11,\ \xi_1=-0{,}01,\ \xi_2=0{,}09,\ \xi_3=11{,}111\ldots,\ \xi_4=24{,}93737\ldots$$

Es sind nun verschiedene Werthe von $\xi$ und für jeden derselben verschiedene Werthe von $\eta$ angenommen und die zugehörigen Grössen der relativen Intensität $\frac{J}{J}$ berechnet worden.

Die grösser gedruckten Werthe von $\eta$ entsprechen den Durchschnittspunkten mit den Tangenten $PC$, $MA$ und $Q'B'$.

$\xi = 1.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\eta=$ | 0,914 | 1,010 | 1,115 |
| $\frac{J}{J}=$ | 0 | 0,0355 | 0,0616. |

$\xi = 4.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0,643 | 0,84 | 1,040 | 1,24 | 1,446 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0 | 0,0160 | 0,0328 | 0,0458 | 0,0581. |

$\xi = 7.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0,371 | 0,7 | 1,070 | 1,4 | 1,777 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0 | 0,0139 | 0,0317 | 0,0440 | 0,0549. |

$\xi = 11,111.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,55 | 1,111 | 1,66 | 2,231 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0 | 0,0176 | 0,0316 | 0,0412 | 0,0509. |

$\xi = 15.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,2 | 0,351 | 0,75 | 1,15 | 2,00 | 2,661 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0253 | 0,0248 | 0,0238 | 0,0269 | 0,0317 | 0,0414 | 0,0475. |

$\xi = 20.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,4 | 0,803 | 1,2 | 1,7 | 2,54 | 3,213 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0330 | 0,0323 | 0,0305 | 0,0312 | 0,0341 | 0,0397 | 0,0436. |

$\xi = 24,937.$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,6 | 1,249 | 2 | 3 | 3,758 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0340 | 0,0334 | 0,0314 | 0,329 | 0,0373 | 0,0402. |

$\xi = 30.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,6 | 1,2 | 1,707 | 2,6 | 3,5 | 4,317 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0330 | 0,0330 | 0,0321 | 0,0308 | 0,0321 | 0,0350 | 0,0371. |

$\xi = 35.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,7 | 1,4 | 2,058 | 3 | 4 | 4,870 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0316 | 0,0313 | 0,0306 | 0,0298 | 0,0303 | 0,0328 | 0,0344. |

$\xi = 40.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 0,8 | 1 7 | 2,611 | 3,5 | 4,5 | 5,422 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0298 | 0,0297 | 0,0291 | 0,0281 | 0,0288 | 0,0307 | 0,0320. |

$\xi = 45.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta =$ | 0 | 2 | 3,062 | 3,8 | 5,974 |
| $\frac{\mathrm{J}}{J} =$ | 0,0282 | 0,0275 | 0,0267 | 0,0271 | 0,0298. |

Mit Hilfe dieser Ordinaten sind die Curven gezeichnet und sodann die Isophoten auf eine sich von selbst ergebende Weise daraus construirt worden. Die Punkte, in denen die Isophoten die Tangente $Q'B'$ schneiden, werden mit Hilfe der Formel 2) bestimmt.

Die Intensität in einem Punkte der Axe wird leicht gefunden, indem man in Gleichung 11) $p=0$ setzt und ferner für $m$ und $\varrho$ die Werthe $(a+\xi)$ und $\frac{\mathfrak{r}}{\xi}$ setzt. Man erhält die Formel

$$J_0 = J(a+\xi)\pi\left\{\frac{2r^2}{(a+\xi)^3} - \frac{\mathfrak{r}^2}{\xi^2(a+\xi)} - \frac{a+\xi}{r^2}\cdot\frac{\mathfrak{r}^4}{\xi^4}\right\}.$$

Die Curve, welche in dieser Gleichung enthalten ist, liefert die Punkte, in welchen die Isophoten die Axe schneiden.

Die Intensität in einem Punkte der den Kernschatten begrenzenden Tangente $Q'B'$ erhält man, wenn man in Gleichung 11) $\frac{r}{m}=p+\varrho$ setzt. Die Curve der Intensität in der erwähnten Tangente dient zur Ermittelung der Spitzen der Isophoten.

Die so gefundenen Isophoten sind natürlicherweise als Meridiancurven der Flächen gleicher Helligkeit zu betrachten.

Weicht auch die eingeführte Parabel von der in 7a) gegebenen richtigen Curve nicht unbedeutend ab, so sind doch, wie man aus dem ausgeführten Beispiele sieht, die Intensitätsverluste, welche durch die verdeckende Kugel herbeigeführt werden, bei grösseren Werthen von $\xi$ überhaupt nicht so bedeutend, dass eine mässige Ungenauigkeit dieser Verluste sehr wesentliche Unterschiede in der sich ergebenden Intensitätsvertheilung nach sich ziehen könnte; und da, wie aus der Figur ersichtlich ist, gerade diejenigen Intensitätscurven, welche grösseren Werthen von $\xi$ entsprechen, auf die Gestaltung der Isophoten den wesentlichsten Einfluss ausüben, kann man die letzteren wohl als der Wahrheit nahe kommend betrachten.

# IV.

## Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s)=\sum\left(\frac{D}{n}\right).\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten.

Von

Dr. Ad. Hurwitz
in Hildesheim.

Hierzu Taf. I Fig. 14 u. 15.

Im Jahre 1849 hat Herr Schlömilch folgende interessante Bemerkung gemacht*:

„Bezeichnet man durch $f(s)$ die Function

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^s}\ldots,$$

so besteht zwischen den Werthen $f(s)$ und $f(1-s)$ die Relation

$$\text{A)}\qquad f(1-s)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^s.\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right).\Gamma(s).f(s),$$

wobei $\Gamma(s)$ die (Euler'sche) Gammafunction bezeichnet."

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe eines Theorems aus der Theorie der Fourier'schen Reihen geführt. Später ist Herr Schlömilch noch einmal auf die Gleichung A) zurückgekommen**, indem er sie auf einem neuen und elementaren Wege herleitete und ihr die analog gebaute Gleichung

$$\text{B)}\qquad \varphi(1-s)=\frac{2^s-1}{2^{1-s}-1}.\frac{2}{(2\pi)^s}.\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right).\Gamma(s).\varphi(s)$$

hinzufügte, wo

$$\varphi(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-+\ldots+(-1)^n.\frac{1}{n^s}\ldots$$

ist.

Zwischen beide Veröffentlichungen fällt der bekannte Aufsatz von Riemann: „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. III S. 130—131.

** Dieselbe Zeitschrift, and. O.

Grösse".* Riemann stützt hier seine Untersuchung auf einige Eigenschaften der Function

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\dots+\frac{1}{n^s}+\dots;$$

unter Anderem leitet er für diese Function die Gleichung her

$$\text{C)} \qquad \zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cdot cos\left(\frac{s\pi}{2}\right).\Gamma(s).\zeta(s).$$

Die Analogie dieser Gleichung mit den Relationen A) und B), namentlich mit B), springt in die Augen. Wir werden auch sogleich sehen, dass B) durch eine kleine Umformung aus C) erhalten werden kann. Zuvor müssen wir jedoch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen der Riemann'schen Relation und den beiden von Schlömilch angegebenen aufmerksam machen.

Die Functionen $f(s)$ und $\varphi(s)$ sind nämlich für alle complexen Werthe von $s$ definirt, deren reelle Theile positiv sind, denn für solche Werthe von $s$ convergiren die durch $f(s)$ und $\varphi(s)$ bezeichneten unendlichen Reihen; dagegen ist die mit $\zeta(s)$ benannte Reihe nur convergent, sobald der reelle Theil von $s$ grösser als 1 ist. Während daher die Relationen A) und B) einen guten Sinn haben, so lange der reelle Theil von $s$ zwischen 0 und 1 liegt, scheint die Gleichung C) vollkommen sinnlos zu sein.

In der That lässt sich aber die Function $\zeta(s)$, so gut wie die Functionen $f(s)$ und $\varphi(s)$, nach den Grundprincipien der modernen Functionentheorie über die ganze complexe Ebene $s$ fortsetzen. Dieses wird weiter unten geschehen; wir werden dabei finden, dass alle drei Functionen durchaus eindeutig sind und dass daher die Relationen A), B) und C) für jeden beliebigen complexen Werth von $s$ giltig sind.

Da

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\dots \quad \text{und} \quad \frac{2}{2^s}.\zeta(s)=\frac{2}{2^s}+\frac{2}{4^s}+\dots,$$

so folgt

$$(1-2^{1-s}).\zeta(s)=\varphi(s),$$

so lange der reelle Theil von $s$ grösser als 1 ist, und diese Gleichung setzt sich über die ganze complexe Ebene $s$ fort. Aus der Beziehung zwischen $\varphi(s)$ und $\zeta(s)$ ist aber ersichtlich, dass die Relationen B) und C) in der That wesentlich dasselbe aussagen.

Bei dem Versuche, die Relation A) auf dem Wege zu erhalten, welcher dem von Riemann zur Herleitung der Relation C) eingeschlagenen analog ist, gelangte ich zu allgemeinen Formeln, die von gleicher

---

* Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, S. 136; oder auch in den Monatsberichten der Berliner Akademie, November 1859.

Einfachheit sind, wie die von Schlömilch und Riemann gegebenen, und dieselben überdies als specielle Fälle enthalten.

Diese allgemeinen Formeln dürften um so mehr ein Interesse beanspruchen, als sie sich auf eben die Functionen beziehen, die bei den tiefen Untersuchungen Dirichlet's über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen und über die in einer arithmetischen Reihe enthaltenen Primzahlen eine wichtige Rolle spielen.

Ich will nun gleich hier die hauptsächlichsten Resultate der anzustellenden Betrachtungen angeben. — Bezeichnet $D$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl, die ausser 1 keine weitere Quadratzahl als Factor enthält, so setzen wir

$$F(s, D) = \frac{1}{1-(-1)^{\frac{1}{8}(D^2-1)}\frac{1}{2^s}} \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s}, \text{ wenn } D \equiv 1 \ (mod. 4),$$

$$F(s, D) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s} \text{ in allen übrigen Fällen.}$$

Dabei bedeutet $\left(\frac{D}{n}\right)$ das bekannte Jacobi'sche Symbol aus der Theorie der quadratischen Reste, und die Summation erstreckt sich über alle Werthe von $n$, die positiv, ganzzahlig und relativ prim zu $2D$ sind.

Dann gelten folgende Sätze:

I. „Die Functionen $F(s, D)$ sind durchaus eindeutige Functionen der complexen Variabeln $s$."

II. „Alle Functionen $F(s, D)$ mit einziger Ausnahme von $F(s, 1)$ haben einen endlichen Werth für jeden beliebigen endlichen Werth des Arguments $s$."

III. „Die Function $F(s, 1)$ hat für jeden im Endlichen gelegenen Werth von $s$ selbst einen endlichen Werth, mit Ausnahme der Stelle $s = 1$, wo $F(s, 1)$ so unendlich wird, dass $lim[(s-1) F(s, 1)]_{s=1} = 1$ ist."

IV. „Die Functionen $F(s, D)$ genügen folgenden einfachen Relationen:

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{\varkappa D} \cdot cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D)$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn $D$ positiv ist;

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{-\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{-\varkappa D} \cdot sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D)$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn $D$ negativ ist. Dabei ist

$\varkappa = 1$ für $D \equiv 1$ $(mod. 4)$,

$\varkappa = 4$ in allen übrigen Fällen."*

Von diesen Sätzen ist nur III. aus Riemann's citirtem Aufsatze bekannt, indem $F(s, 1)$ der Riemann'schen Function $\zeta(s)$ gleich ist. Der Satz IV. ergiebt für $D = 1$ die Riemann'sche Relation $(C)$, für $D = -1$ die Schlömilch'sche $(A)$; diese Relationen entsprechen also den einfachsten Werthen, welche $D$ annehmen kann.

Der positiven oder negativen Zahl $D$ hatten wir die Beschränkung auferlegt, durch kein Quadrat ausser durch 1 theilbar zu sein. Diese Beschränkung ist nicht wesentlich. Denn es ist

$$\sum\left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s} = \sum\left(\frac{D'}{n'}\right) \cdot \frac{1}{n'^s} \cdot \prod\left(1-\left(\frac{D'}{r}\right) \cdot \frac{1}{r^s}\right),$$

wenn $D = D'.S^2$ und $r$ alle Primzahlen beschreibt, die in $D$, nicht aber gleichzeitig in $D'$ aufgehen.** Lässt man also in der Definition der Functionen $F(s, D)$ die Bedingung fort, dass $D$ keine quadratischen Factoren besitzen soll, so lassen sich die neu hinzugekommenen Functionen $F$ vermöge der letzten Gleichung auf diejenigen zurückführen, von denen unsere Sätze I—IV handeln.

Der Beweis dieser Sätze soll uns nunmehr beschäftigen — Wir betrachten folgendes System von Functionen:

$$f(s, 1) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(1+m)^s} + \frac{1}{(1+2m)^s} + \frac{1}{(1+3m)^s} + \cdots,$$

$$f(s, 2) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2+m)^s} + \frac{1}{(2+2m)^s} + \frac{1}{(2+3m)^s} + \cdots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f(s, a) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+m)^s} + \frac{1}{(a+2m)^s} + \frac{1}{(a+3m)^s} + \cdots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f(s, m) = \frac{1}{m^s} + \frac{1}{(m+m)^s} + \frac{1}{(m+2m)^s} + \frac{1}{(m+3m)^s} + \cdots;$$

$m$ bedeutet hierbei irgend eine positive ganze Zahl.

---

* Die zweite Form der Relationen geht aus der ersten durch die leicht zu beweisenden Gleichungen hervor:

$$\Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot 2^{s-1} \cdot \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(s) \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot 2^{s-1} \cdot \sqrt{\pi}.$$

** Lejeune-Dirichlet, Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind; 2. Aufl., S. 248 und 249.

Jede dieser Functionen ist für alle Werthe von $s$ definirt, deren reelle Theile grösser als 1 sind. Zur näheren Untersuchung der $f(s, a)$ gehen wir von der bekannten Gleichung aus:

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx.$$

Die Summation über alle Werthe $n = a + mk$, $k = 0, 1, 2, \ldots \infty$, liefert die Gleichung

$$\Gamma(s) \,.\, f(s, a) = \int_0^\infty \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx} - 1}\, x^{s-1}\, dx.$$

Wir betrachten nun, immer den von Riemann eingeschlagenen Weg verfolgend, das Integral

$$J = \int (-x)^{s-1} \,.\, \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx} - 1}\, dx$$

$$= \int e^{(s-1)\log(-x)} \,.\, \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx} - 1}\, dx,$$

wobei die Integration auf einem Wege ausgeführt werden soll, der, von dem Punkte $+\infty$ ausgehend, dicht an der positiven Seite der reellen Axe herläuft, dann um den Nullpunkt biegt und dicht an der negativen Seite der reellen Axe zum Unendlichkeitspunkte zurückführt (Fig. 14).

Dabei soll ausser dem Nullpunkt keiner der übrigen Unstetigkeitspunkte der integrirten Function innerhalb des schraffirten Theiles der Figur fallen, und bei der Integration soll der $\log(-x)$ so genommen werden, dass er für negative $x$ reell, also für positive $x$ auf der positiven Seite der reellen Axe den imaginären Bestandtheil $-\pi i$, auf der negativen Seite den imaginären Bestandtheil $+\pi i$ aufweist. Da wir den Integrationsweg unbeschadet des Werthes des Integrals beliebig verzerren dürfen, wenn dabei nur nicht ein Unstetigkeitspunkt der integrirten Function überschritten wird, so ist unser Integral gleich dem auf folgendem Wege genommenen: Auf der reellen Axe von $+\infty$ bis zu einer dicht vor dem Nullpunkte liegenden Stelle $A$, von $A$ im Kreise $C$ um den Nullpunkt als Mittelpunkt nach $A$ zurück und schliesslich wieder auf der reellen Axe nach $+\infty$. Dabei muss $A$ so dicht vor dem Nullpunkte liegen, dass im Innern des Kreises $C$, ausser dem Nullpunkte, kein Unstetigkeitspunkt der integrirten Function liegt. In leicht verständlicher Schreibweise haben wir dann:

$$J = \int_\infty^A e^{(s-1)\{\log x - \pi i\}} \,.\, \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx} - 1}\, dx$$

$$+ \int_A^\infty e^{(s-1)\{\log x + \pi i\}} \,.\, \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx} - 1}\, dx$$

$$+\int\limits_{(C)} e^{(s-1)\log(-x)} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\,dx$$

$$= -2i\sin\pi s \int\limits_{A}^{\infty} x^{s-1} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\,dx$$

$$+\int\limits_{(C)} e^{(s-1)\log(-x)} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\,dx.$$

Ist nun der reelle Theil von $s$ grösser als 1, so verschwindet das über den Kreis $C$ genommene Integral, wenn der Punkt $A$ in den Nullpunkt hineinrückt, denn dann ist

$$\lim\left[x\,.\,(-x)^{s-1} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\right]_{x=0} = 0.$$

Für diesen Fall wird daher

$$J = -2i\sin\pi s \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-1} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\,dx$$

$$= -2i\sin\pi s\,.\,\Gamma(s)\,.\,f(s,a)$$

$$= -\frac{2i\pi}{\Gamma(1-s)} \cdot f(s,a).$$

Also

$$f(s,a) = \frac{i}{2\pi} \cdot \Gamma(1-s) \int (-x)^{s-1} \cdot \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\,dx,$$

wo das Integral auf dem ursprünglich angegebenen Wege von $+\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen ist.

Fassen wir nun diese Gleichung als Definitionsgleichung der Function $f(s,a)$ auf, so ist damit die Aufgabe gelöst, die durch die Reihe

$$\frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+m)^s} + \frac{1}{(a+2m)^s} + \ldots.$$

nur für Werthe von $s$, deren reelle Theile grösser als 1 sind, definirte Function über die ganze complexe Ebene $s$ fortzusetzen. Die Function auf der rechten Seite unserer Gleichung ist nämlich in der ganzen complexen Ebene $s$ eindeutig, und sie stimmt mit der Reihe $\frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+m)^s} + \ldots$ überein, sobald der reelle Bestandtheil von $s$ grösser als 1 ist.

Nunmehr ist die Function $f(s,a)$ für jeden Werth von $s$ definirt, und zwar besitzt sie für jedes endliche $s$ einen vollkommen eindeutig bestimmten Werth. Dieser Werth ist, wie wir weiter behaupten, überall ein endlicher, ausgenommen an der Stelle $s=1$, wo $f(s,a)$ so unendlich wird, dass $\lim\,[(s-1)f(s,a)] = \frac{1}{m}$ wird.

Das Integral

$$J = \int (-x)^{s-1} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} dx$$

ist nämlich für jeden endlichen Werth von $s$ endlich. $f(s, a)$ kann folglich nur dadurch unendlich werden, dass $\Gamma(1-s)$ unendlich gross wird. Letzteres geschieht für $s = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Für $s = 2, 3\ 4, \ldots$ wird aber das Unendlichwerden von $\Gamma(1-s)$ durch das Verschwinden des Integrals $\int (-x)^{s-1} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} dx$* compensirt; dagegen wird für $s = 1$

$$\int (-x)^{s-1} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} dx\,^* = \frac{2 i \pi}{m},$$

also $f(s, a)$ unendlich wie $-\frac{\Gamma(1-s)}{m}$, d. h. $\lim\, [(s-1) f(s, a)]_{s=1} = \frac{1}{m}$.

Hiermit sind unsere Behauptungen erhärtet. — Es verdient noch bemerkt zu werden, dass für nicht positive ganzzahlige Werthe von $s$:

$$s = -\varrho\,,\ \varrho = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$f(-\varrho, a) = (-1)^{\varrho+1} i \,.\, \frac{\varrho!}{2\pi} \int \frac{e^{(m-a)x}}{x^{\varrho+1}(e^{mx}-1)} dx$$

$$= (-1)^{\varrho} \,.\, \varrho! \left[\frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}\right]_{x^{\varrho}}$$

ist, wenn $[F(x)]_{x^{\varrho}}$ den Coefficienten von $x^{\varrho}$ in der Entwickelung von $F(x)$ nach Potenzen von $x$ bedeutet. — So findet man z. B.

$$f(0, a) = \frac{m-2a}{2m}$$

$$f(-1, a) = -\frac{m^2 - 6ma + 6a^2}{12m}$$

$$f(-2, a) = -\frac{a(m-a)(m-2a)}{6m}$$

etc. — Allgemein können wir sagen: „Die Werthe von $f(s, a)$ für nicht positive ganze Zahlen sind rationale Functionen von $m$ und $a$ und folglich rationale Zahlen."

Betrachten wir jetzt in der Ebene der complexen Variabeln $x$ ein Rechteck, dessen Seiten der Axe der rein imaginären Zahlen, resp. der Axe der reellen Zahlen parallel laufen und dessen Mittelpunkt der Punkt $x = 0$ ist (Fig. 15), so wird im Innern desselben die Function

$$\psi(x) = (-x)^{s-1} \,.\, \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1}$$

nur für die Punkte $x = \frac{2k\pi i}{m}$, $k = \pm 1, \pm 2$ und $x = 0$ unstetig. Daher ist das Integral $\int \psi(x)\, dx$ in positiver Richtung um den schraffirten Theil

* Man werthet es bekanntlich aus, indem man den Integrationsweg auf einen kleinen Kreis um den Nullpunkt zusammenzieht.

der Figur genommen, gleich der Summe der in negativem Sinne genommenen Integrale $\int \psi(x)\,dx$ längs des Rechtecks $ABCD$ und der kleinen Kreise, welche die in dem Rechtecke gelegenen Punkte $\frac{2k\pi i}{m}$ umgeben. Lassen wir nun das Rechteck $ABCD$ unendlich gross werden, indem wir die Punkte $P$, $-P$, $Q$, $-Q$ nach resp. $+\infty$, $-\infty$, $+i\infty$, $-i\infty$ rücken lassen, so geht das Integral um das schraffirte Gebiet in das eben betrachtete Integral $J$ über. Somit ergiebt sich, wenn man noch beachtet, dass das Integral $\int \psi(x)\,dx$ in negativem Sinne längs eines sehr kleinen, den Punkt $\frac{2k\pi i}{m}$ umgebenden Kreis genommen

$$=(-\pi i)\left(-\frac{2ki\pi}{m}\right)^{s-1}\cdot\frac{e^{(m-a)\cdot\frac{2ki\pi}{m}}}{m}$$

ist,

$$-\frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)}\cdot f(s,a)=\lim_{\lambda=\infty}\cdot\left[\sum_{k=-\lambda}^{k=+\lambda}(-2\pi i)\left(\frac{-2ki\pi}{m}\right)^{s-1}\cdot\frac{e^{(m-a)\frac{2ki\pi}{m}}}{m}+(ABCD)\right],$$

wobei $(ABCD)$ das Integral über das ins Unendliche ausgedehnte Rechteck bedeutet. Dieses letztere Integral verschwindet nun, wenn der reelle Theil von $s$ negativ ist. Unter dieser Annahme erhalten wir somit

$$\frac{f(s,a)}{\Gamma(1-s)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{-2ki\pi}{m}\right)^{s-1}\cdot\frac{e^{\frac{-2ki\pi}{m}a}}{m}+\left(\frac{2ki\pi}{m}\right)^{s-1}\cdot\frac{e^{\frac{2ki\pi}{m}a}}{m}\right\},$$

oder:

$$\frac{\pi}{\Gamma(1-s)}\cdot f(s,a)=\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{s-1}\cos\left\{\frac{(s-1)\pi}{2}+\frac{2ak\pi}{m}\right\}.$$

Setzen wir nun

$$k=mk'+r,$$

so nimmt $k$ alle seine Werthe an, wenn $k'$ von $0\ldots\infty$ und $r$ von $1\ldots m$ läuft. Also ist:

$$\frac{\pi}{\Gamma(1-s)}\cdot f(s,a)=\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{s}\sum_{r=1}^{m}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(mk'+r)^{1-s}}\cos\left(\frac{(s-1)}{2}\pi+\frac{2ar\pi}{m}\right)$$

$$=\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{s}\sum_{r=1}^{m}\cos\left(\frac{(s-1)\pi}{2}+\frac{2ar\pi}{m}\right)\cdot f(1-s,r).$$

Ersetzen wir noch, der bequemeren Schreibweise halber, $s$ durch $1-s$, so folgt schliesslich:

$$1)\qquad f(1-s,a)=\frac{\Gamma(s)}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{1-s}\sum_{r=1}^{m}\cos\left(\frac{2ar\pi}{m}-\frac{s\pi}{2}\right)f(s,r).$$

Die Functionen $f(s,a)$ haben also die Eigenschaft, dass jeder der $m$ Werthe $f(1-s,a)$ sich als lineare ganze Function der $m$ Werthe $f(s,a)$ nach vorstehender Formel darstellen lässt.

Ehe wir diesen Satz über ein System von Functionen für die Dirichlet'schen Functionen verwerthen, wollen wir die Gleichung 1) in Bezug auf die Anzahl der in ihr enthaltenen Einzelformeln untersuchen. — Die Function $f(s, a)$ hängt ausser von $a$ noch von der Zahl $m$ ab; wir wollen dies, wenn nöthig, durch die Schreibweise $f(s, a|m)$ andeuten. Ist $\delta$ nun ein gemeinsamer Theiler von $a$ und $m$, und ist

$$a = \delta a', \quad m = \delta m',$$

so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+km)^s} = \delta^{-s} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a'+km')^s},$$

also:

$$f(s, a|m) = \delta^s . f(s, a'|m').$$

Mit Benutzung dieser Gleichung geht die Formel 1) über in

$$\delta^{s-1}.f(1-s, a'|m') = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{\delta m'}\right)^{1-s} . \sum_{r=1}^{m} \cos\left(\frac{2a'r\pi}{m'} - \frac{s\pi}{2}\right) . f(s, r|m)$$

$$= \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{\delta m'}\right)^{1-s} . \sum_{\lambda=0}^{\delta-1} \sum_{\mu=1}^{m'} \cos\left(\frac{2a'(\lambda m'+\mu)}{m'}\pi - \frac{s\pi}{2}\right) . f(s, \lambda m'+\mu|m).$$

Durch Ausführung der Summation nach $\lambda$ und gehörige Reduction findet man

$$f(1-s, a'|m') = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{m'}\right)^{1-s} . \sum_{\mu=1}^{m'} \cos\left(\frac{2a'\mu\pi}{m'} - \frac{s\pi}{2}\right) . f(s, \mu|m'),$$

also eine zur Zahl $m'$ gehörige Formel.

Daher können wir sagen:

„Jede unter den $m$ durch 1) repräsentirten Formeln, die sich auf ein $a$ bezieht, welches nicht relativ prim zu $m$ ist, sondern mit $m$ den grössten gemeinsamen Theiler $\delta$ hat, sagt im Wesentlichen dasselbe aus, wie eine unter den Formeln, die zu der Zahl $m' = \frac{m}{\delta}$ gehören. Alle wesentlich verschiedenen Formeln 1) entstehen also, wenn man $m$ alle möglichen ganzen Zahlen durchlaufen lässt und $a$ immer relativ prim zu $m$ annimmt."

Aus den Grössen $f(s, a)$ setzen sich nun, wie man auf den ersten Blick sieht, die Dirichlet'schen Functionen $\sum \left(\frac{D}{n}\right) . \frac{1}{n^s}$ zusammen. Wir wollen jetzt sehen, was für letztere Functionen aus dem Satze über die Grössen $f(1-s, a)$ folgt. Dabei setzen wir voraus, dass die positive oder negative ganze Zahl $D$ ausser 1 keine weitere Quadratzahl als Factor enthält. (Vgl. oben S. 89.) Unter dieser Voraussetzung sind vier Fälle möglich:

I) $D = \pm P \equiv 1 \ (mod. 4)$,

II) $D = \pm P \equiv 3 \ (mod. 4)$,

III) $D = \pm 2P \equiv 2 \pmod{8}$,

IV) $D = \pm 2P \equiv 6 \pmod{8}$,

wobei $P$, resp. $2P$ den absoluten Werth von $D$ bezeichnet.

Wir müssen diese Fälle einzeln behandeln. Im Falle I, wollen wir die Function

$$F(s, D) = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{P}\right)\cdot\frac{1}{2^s}}\cdot\sum\left(\frac{D}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^s}$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{P}\right)\cdot\frac{1}{2^s}}\cdot\sum\left(\frac{n}{P}\right)\cdot\frac{1}{n^s}$$
$$= \sum\left(\frac{n'}{P}\right)\cdot\frac{1}{n'^s}$$

betrachten, wo $n'$ alle positiven relativen Primzahlen zu $P$ durchlaufen muss.

Da nun $\left(\frac{n'_1}{P}\right) = \left(\frac{n'_2}{P}\right)$, wenn $n_1' \equiv n_2' \pmod{P}$, so ist

$$F(s, D) = \sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot f(s, \lambda \mid P),$$

wo $\lambda$ alle Zahlen durchlaufen muss, die positiv, zu $P$ relativ prim und kleiner als $P$ sind.

Schreiben wir in der letzten Gleichung $1-s$ statt $s$ und machen dann von den Formeln für die $f(1-s, a)$ Gebrauch, so kommt

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s}\cdot\sum_{r=1}^{P} f(s, r \mid P)\cdot\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}-\frac{s\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma s}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s}\cdot\sum_{r=1}^{P} f(s, r \mid P)\cdot\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\cdot\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right)\right.$$
$$\left.+\sin\frac{s\pi}{2}\cdot\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right)\right\}.$$

Nun ist

$$\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right) + i\cdot\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right) = \sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot e^{\frac{2\lambda r i\pi}{P}}$$

$= \left(\frac{r}{P}\right)\cdot i^{\frac{1}{4}(P-1)^2}\cdot\sqrt{P}$*, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, und $\left(\frac{r}{P}\right) = o$ zu setzen ist, wenn $r$ nicht relativ prim zu $P$ ist.

Für $P \equiv 1 \pmod{4}$, d. h. für ein positives $D$, ist daher

$$\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right) = \left(\frac{r}{P}\right)\cdot\sqrt{P}$$
$$\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\lambda r\pi}{P}\right) = 0;$$

* Lejeune-Dirichlet, Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, S. 299 der 2. Auflage.

dagegen für $P \equiv 3 \ (mod. 4)$, d. h. für ein negatives $D$, ist

$$\sum \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \cos\left(\frac{2\lambda r \pi}{P}\right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \sin\left(\frac{2\lambda r \pi}{P}\right) = \left(\frac{r}{P}\right) . \sqrt{P}.$$

Tragen wir diese Werthe in den Ausdruck für $F(1-s, D)$ ein, so kommt:

für ein positives $D$

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} . \sum_{r=1}^{P} f(s, r \mid P) . \left(\frac{r}{P}\right) . \sqrt{P} . \cos\frac{s\pi}{2}$$

$$= \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} . \cos\frac{s\pi}{2} . F(s, D);$$

für ein negatives $D$

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sum_{r=1}^{P} f(s, r \mid P) . \left(\frac{r}{P}\right) . \sqrt{P} . \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} . \sin\frac{s\pi}{2} . F(s, D).$$

In den Fällen II), III) und IV) betrachten wir die Functionen $F(s, D) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) . \frac{1}{n^s}$, wo $n$ alle positiven relativen Primzahlen zu $2D$ durchlaufen soll.

Im Falle II), also $D = \pm P \equiv 3 \ (mod. 4)$, ist aber $\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} . \left(\frac{n}{P}\right)$. Hieraus folgt $\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{n_1}\right)$, wenn $n \equiv n_1 \ (mod. 4P)$, und also

$$F(s, D) = \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . f(s, \lambda \mid 4P),$$

wo $\lambda$ alle positiven Zahlen relativ prim zu $4P$ und kleiner als $4P$ durchlaufen muss. Unter Benutzung der Formel für $f(1-s, a)$ (S. 93) finden wir nun:

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{4P}\right)^{1-s} . \sum_{r=1}^{4P} f(s, r \mid 4P) . \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \cos\left(\frac{2\lambda r \pi}{4P} - \frac{s\pi}{2}\right).$$

Hier ist

$$\sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{4P} - \frac{s\pi}{2}\right) = \cos\frac{s\pi}{2} . \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{4P}\right)$$

$$+ \sin\frac{s\pi}{2} . \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \sin\left(\frac{2\lambda r\pi}{4P}\right)$$

auszuwerthen. Betrachten wir nun die Summe $S = \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . e^{\frac{2\lambda r i\pi}{4P}}$, so behält dieselbe denselben Werth, wenn $\lambda$ statt der angegebenen Zahlen irgend ein anderes, vollständiges, relativ primes Restsystem $(mod. 4P)$ durchläuft. Es ist daher

$$\sum(-1)^{1/8(\lambda-1)}.\left(\frac{\lambda}{P}\right).e^{\frac{2\lambda ri\pi}{P}}$$
$$=\sum_\sigma\sum_\tau(-1)^{1/8(4\sigma+P\tau-1)}.\left(\frac{4\sigma+P\tau}{P}\right).e^{2ri\pi.\frac{4\sigma+P\tau}{4P}},$$

wenn wir $\sigma$ alle Zahlen kleiner als $P$ und relativ prim zu $P$ und (unabhängig von $\sigma$) $\tau$ die Werthe 1 und 3 durchlaufen lassen. Es wird somit

$$S=\sum(-1)^{1/8(P\tau-1)}.e^{\frac{2ri\pi\tau}{4}}.\sum\left(\frac{\sigma}{P}\right).e^{\frac{2ri\pi\sigma}{P}}$$
$$=(-1)^{1/8(P-1)}.i^r.(1-(-1)^r).\left(\frac{r}{P}\right).i^{1/4(P-1)^2}.\sqrt{P},$$

also $S=0$, wenn $r$ nicht relativ prim zu $2P$ ist; für die übrigen Werthe von $r$ $S=2.(-1)^{1/8(r-1)}.\left(\frac{r}{P}\right).i\sqrt{P}$, wenn $P\equiv1\,(mod.4)$,

$$S=2.(-1)^{1/8(r-1)}.\left(\frac{r}{P}\right).\sqrt{P},\text{ wenn } P\equiv3\,(mod.4).$$

Also kommt:

$$F(1-s,D)=\frac{\Gamma s}{\pi}.\left(\frac{2\pi}{4P}\right)^{1-s}.\sum(-1)^{1/8(r-1)}.\left(\frac{r}{P}\right).f(s,r).\begin{cases}2\sqrt{P}.\cos\frac{s\pi}{2}, & \text{für } D>0,\\ 2\sqrt{P}.\sin\frac{s\pi}{2}, & \text{für } D<0,\end{cases}$$

oder schliesslich:

$$F(1-s,D)=\frac{\Gamma s}{\pi}.\left(\frac{2\pi}{4P}\right)^{1-s}.\sqrt{4P}.\cos\frac{s\pi}{2}.F(s,D),\text{ für } D>0,$$
$$F(1-s,D)=\frac{\Gamma s}{\pi}.\left(\frac{2\pi}{4P}\right)^{1-s}.\sqrt{4P}.\sin\frac{s\pi}{2}.F(s,D),\text{ für } D<0. -$$

Den dritten Fall bildete die Annahme $D=\pm2P\equiv2\,(mod.8)$. Hier ist

$$\left(\frac{D}{n}\right)=(-1)^{1/8(n^2-1)}.\left(\frac{n}{P}\right),$$

also

$$F(s,D)=\sum(-1)^{1/8(\lambda^2-1)}.\left(\frac{\lambda}{P}\right).f(s,\lambda|8P),$$

wo $\lambda$ alle positiven Zahlen kleiner als $8P$ und relativ prim zu $8P$ durchlaufen muss. Nun wird

$$F(1-s,D)=\frac{\Gamma s}{\pi}.\left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s}.\sum f(s,r).\sum(-1)^{1/8(\lambda^2-1)}.\left(\frac{\lambda}{P}\right).\cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{8P}-\frac{s\pi}{2}\right),$$

und es ist

$$S'=\sum(-1)^{1/8(\lambda^2-1)}.\left(\frac{\lambda}{P}\right).e^{\frac{2\lambda ri\pi}{8P}}=\sum\sum(-1)^{1/8((8\sigma+P\tau)^2-1)}$$
$$\times\left(\frac{8\sigma+P\tau}{P}\right).e^{\frac{2ri\pi}{8P}(8\sigma+P\tau)}=\sum(-1)^{1/8(P^2\tau^2-1)}.e^{\frac{2ri\pi\tau}{8}}.\left(\frac{2}{P}\right).\sum\left(\frac{\sigma}{P}\right).e^{\frac{2ri\pi\sigma}{P}},$$

wo $\sigma$ alle Zahlen $< P$ und relativ prim zu $P$, und, unabhängig davon, $\tau$ die Werthe 1, 3, 5, 7 zu durchlaufen hat. Es ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen

$$S' = e^{\frac{2 r i \pi}{8}} . \Big[1-(-1)^r\Big] . \Big[1-i^r\Big] . \left(\frac{r}{P}\right) . i^{\frac{1}{4}(P-1)^2} . \sqrt{P},$$

und folglich $S' = 0$, wenn $r$ nicht relativ prim zu $2P$ ist; für alle übrigen Werthe von $r$:

$$S' = \frac{4}{\sqrt{2}} . (-1)^{\frac{1}{8}(r^2-1)} . \left(\frac{r}{P}\right) . \sqrt{P}, \text{ wenn } P \equiv 1 \ (mod. 4)$$

und

$$S' = i \frac{4}{\sqrt{2}} . (-1)^{\frac{1}{8}(r^2-1)} . \left(\frac{r}{P}\right) . \sqrt{P}, \text{ wenn } P \equiv 3 \ (mod. 4).$$

Daher ist

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s} . \sqrt{8P} . \cos\frac{s\pi}{2} . F(s, D) \text{ für } D > 0$$

und

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s} . \sqrt{8P} . \sin\frac{s\pi}{2} . F(s, D) \text{ für } D < 0. \text{ —}$$

Endlich haben wir im letzten Falle $D = \pm 2P \equiv 6 \ (mod. 8)$, und also

$$\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)} . \left(\frac{n}{P}\right).$$

Es ist folglich

$$F(s, D) = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)+\frac{1}{8}(\lambda^2-1)} \left(\frac{\lambda}{P}\right) . f(s, \lambda | 8P),$$

wo $\lambda$ alle positiven relativen Primzahlen zu $8P$ durchlaufen muss, die kleiner als $8P$ sind.

Man findet nun weiter

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} . \left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s} . \sum_{r=1}^{8P} f(s, r) . \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)+\frac{1}{8}(\lambda^2-1)} . \left(\frac{\lambda}{P}\right) . \cos\left(\frac{2\lambda r\pi}{8P} - \frac{s\pi}{2}\right),$$

und

$$S'' = \sum_{\lambda} \left(\frac{D}{\lambda}\right) . e^{\frac{2 r i \pi \lambda}{8P}} = \sum_{\tau}\sum_{\sigma} (-1)^{\frac{1}{2}(8\sigma+P\tau-1)+\frac{1}{8}((8\sigma+P\tau)^2-1)} \times \left(\frac{8\sigma+P\tau}{P}\right) . e^{\frac{2 r i \pi}{8P}(8\sigma+P\tau)}$$

$$= \sum_{\tau=1,3,5,7} (-1)^{\frac{1}{2}(P\tau-1)+\frac{1}{8}(P^2\tau^2-1)} . e^{\frac{2 r i \pi}{8}\tau} . \sum_{\sigma} \left(\frac{\sigma}{P}\right) . e^{\frac{2 r i \pi}{P}\sigma}$$

$$= e^{\frac{2 r i \pi}{8}} . (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)} . \Big[1-(-1)^r\Big] . \Big[1+i^r\Big] . \left(\frac{r}{P}\right) . i^{\frac{1}{4}(P-1)^2} \sqrt{P}.$$

Also $S'' = 0$, wenn $r$ nicht relativ prim zu $2P$. Dagegen ist, wie man leicht findet, für alle übrigen Werthe von $r$:

$$S'' = (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)+\frac{1}{8}(r^2-1)} \cdot \left(\frac{r}{P}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} i\sqrt{P}, \quad \text{wenn } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$S'' = (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)+\frac{1}{8}(r^2-1)} \cdot \left(\frac{r}{P}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{P}, \quad \text{wenn } P \equiv 3 \pmod{4}.$$

Demnach ist

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s} \cdot \sqrt{8P} \cdot \cos\frac{s\pi}{2} \cdot F(s, D) \quad \text{für } D > 0$$

und

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{8P}\right)^{1-s} \cdot \sqrt{8P} \cdot \sin\frac{s\pi}{2} \cdot F(s, D) \quad \text{für } D < 0.$$

Hiermit ist der Satz IV S. 88 vollkommen erwiesen: Für positives $D$ ist

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \sqrt{\varkappa D} \cdot \frac{\cos s\pi}{2} \cdot F(s, D)$$

$$= \left(\frac{\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot F(s, D);$$

für negatives $D$ dagegen

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma s}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{-\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \sqrt{\varkappa D} \cdot \sin\frac{s\pi}{2} \cdot F(s, D)$$

$$= \left(\frac{-\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wobei $\varkappa = 1$, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$,
und $\varkappa = 4$ in allen übrigen Fällen.

In Betreff des analytischen Charakters der Functionen $F(s, D)$ folgt aus den Gleichungen

$$F(s, D) = \sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cdot f(s, \lambda | P) \quad \text{für } D \equiv 1 \pmod{4}$$

($\lambda$ positv, $< P$ und relativ prim zu $P$),

$$F(s, D) = \sum_{\lambda} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \cdot f(s, \lambda | 4P) \quad \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}$$

($\lambda$ positiv, $< 4P$ und relativ prim zu $4P$),

$$F(s, D) = \sum_{\lambda} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \cdot f(s, \lambda | 8P) \quad \text{für } D \equiv 2,6 \pmod{8}$$

($\lambda$ positiv, $< 8P$ und relativ prim zu $8P$),

und aus den oben bewiesenen Eigenschaften der Functionen $f(s, a | m)$, dass die $F(s, D)$ sämmtlich eindeutige und, ausgenommen den Fall $D = 1$, im Endlichen überall endliche Functionen von $s$ sind. Denn für den einzigen Werth $s = 1$, für welchen die Endlichkeit in Frage kommen kann, ist

$$lim[(s-1).F(s, D)] = \frac{1}{P}.\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right), \text{ resp. } = \frac{1}{4P}\sum\left(\frac{D}{\lambda}\right),$$
$$\text{resp. } = \frac{1}{8P}\sum\left(\frac{D}{\lambda}\right),$$

also in allen Fällen gleich Null, woraus die Endlichkeit von $F(s, D)$ auch für $s=1$ folgt.

Wir wollen nun schliesslich noch einige naheliegende Folgerungen aus den gewonnenen Resultaten ziehen. — Da $F(s, D)$, $D \gtrless 1$, überall endlich ist, so sind für positives, resp. negatives $D$ die Unendlichkeitsstellen von $\Gamma(s).cos\frac{s\pi}{2}$, resp. $\Gamma(s).sin\frac{s\pi}{2}$ Nullstellen der Function $F(s, D)$. D. h.:

„$F(s, D)$ verschwindet, wenn $D>0$ und von 1 verschieden ist, für $s=0$ und alle negativen geraden ganzzahligen Werthe von $s$, und wenn $D<0$, für alle negativen ungeraden Zahlen."

Dieser Satz lässt sich übrigens auch leicht direct beweisen. Es möge genügen, dieses für den Fall $D=-P\equiv 1$ $(mod. 4)$ auszuführen.

Aus der Formel

$$f(-\varrho, \lambda|m) = (-1)^{\varrho}.\varrho!\left[\frac{e^{(m-\lambda)x}}{e^{mx}-1}\right]_{x^{\varrho}} \quad \text{(siehe S. 92)}$$

folgt nämlich

$$F(-\varrho, D) = (-1)^{\varrho}.\varrho!\left[\frac{\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right).e^{(P-\lambda)x}}{e^{Px}-1}\right]_{x^{\varrho}};$$

es handelt sich also darum, nachzuweisen, dass die ungeraden Potenzen von $x$ in der Entwickelung von

$$\Phi(x) = \frac{\sum\left(\frac{\lambda}{P}\right).e^{(P-\lambda)x}}{e^{Px}-1}$$

fehlen oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, dass $\Phi(-x)=\Phi(x)$ ist.

Bezeichnen wir aber diejenigen Zahlen $\lambda$, die kleiner als $\frac{P}{2}$ sind, mit $\lambda'$, so setzen sich die Werthe $\lambda$ aus den Zahlen $\lambda'$ und $P-\lambda'$ zusammen. Also ist

$$\Phi(x) = \frac{\sum\left(\frac{\lambda'}{P}\right).e^{(P-\lambda')x}+\sum\left(\frac{P-\lambda'}{P}\right).e^{\lambda' x}}{e^{Px}-1}$$
$$= \sum\left(\frac{\lambda'}{P}\right)\left\{\frac{e^{(P-\lambda')x}-e^{\lambda' x}}{e^{Px}-1}\right\}$$

und

$$\Phi(-x) = \sum\left(\frac{\lambda'}{P}\right)\left\{\frac{e^{(\lambda'-P)x}-e^{-\lambda' x}}{e^{-Px}-1}\right\}.$$

Es ist aber offenbar

$$\frac{e^{(P-\lambda')x} - e^{\lambda x}}{e^{Px}-1} = \frac{e^{(\lambda'-P)x} - e^{-\lambda' x}}{e^{-Px}-1},$$

also folgt

$$\Phi(x) = \Phi(-x), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die bislang ausgeschlossene Function $F(s, 1)$ verschwindet, wie man leicht sieht, für alle negativen ganzzahligen geraden Werthe von $s$, ein Satz, welcher übrigens aus Riemann's citirter Arbeit bekannt ist.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man die für die $F(s, D)$ gefundenen Relationen auch so aussprechen kann:

Für positives $D$ ändert die Function

$$F(s, D) \,.\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) . \left(\frac{\varkappa D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}$$

ihren Werth nicht, wenn $1-s$ an Stelle von $s$ gesetzt wird. Dieselbe Eigenschaft besitzt für negatives $D$ die Function

$$F(s, D) . \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) . \left(\frac{-\varkappa D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}.$$

Hildesheim, den 10. October 1881.

---

## V.

# Untersuchungen über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen.

Von

K. Schwering

in Coesfeld.

---

### § 1.

Sei $\alpha$ eine complexe fünfte Wurzel der Einheit, also

1) $$\alpha^5 = 1,$$

so behaupte ich: jede reelle Primzahl von der Form $p = 10n + 1$ ist in vier complexe Factoren $\pi(\alpha)$, $\pi(\alpha^2)$, $\pi(\alpha^3)$, $\pi(\alpha^4)$, wo

2) $$\pi(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4$$

und $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ ganze reelle Zahlen sind, zerlegbar.

Weil

3) $$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

so kann immer bewirkt werden, dass einer der Coefficienten in 2) verschwindet und alle übrigen positiv sind. Wir haben uns also, wenn wir von einem Multiplicator $\alpha^\lambda$ absehen, nur mit dem Ausdrucke

4) $$\pi(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$$

zu beschäftigen, wo $a$, $b$, $c$, $d$ positive oder negative ganze Zahlen, die Null eingeschlossen, sein dürfen, und

$$a + b + c + d \overline{\overline{<}} f$$

sein soll ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. Ueber $f$ soll nachstehend verfügt werden.

Lassen wir für $a$, $b$, $c$, $d$ nur positive Zahlen, welche der vorigen Ungleichung genügen, zu, so ergiebt sich, dass wir alsdann

$$\frac{(f-1)f.(f+1)(f+2)}{24} = g'$$

verschiedene complexe ganze Zahlen bilden können, wie eine einfache Ueberlegung zeigt.

Nehmen wir nun $f = \frac{1}{2} E(\sqrt{p})$, unter $E(\sqrt{p})$ die grösste ganze, in $\sqrt{p}$ enthaltene Zahl verstehend, so wird $g' > p$ werden, sobald

$$f(f-1)(f+1)(f+2) \gtrless 96(f+1)^2$$

wird. Dies hat zur Folge

$$f^3+f^2-98f-96 \gtrless 0.$$

Jene Ungleichung wird also bestehen, sobald $f>10$ oder $p>401$.

Denken wir uns nun alle complexen Zahlen der obigen Art aufgeschrieben und $\alpha$ durch $g^{\frac{p-1}{5}}$ ersetzt, wo $g$ eine primitive Wurzel $mod p$ ist, so erhalten wir mindestens zwei Zahlen, welche $mod p$ congruent sind. Man beweist dies leicht durch Anwendung des Satzes, dass eine Congruenz dritten Grades nicht mehr, als drei Wurzeln haben kann, mit Rücksichtnahme ferner auf den Umstand, dass wir vier verschiedene Einsetzungen für $\alpha$, nämlich

$$g^{\frac{p-1}{5}},\quad g^{2\frac{p-1}{5}},\quad g^{3\frac{p-1}{5}},\quad g^{4\frac{p-1}{5}}$$

machen können.

Bilden wir die Differenz der so erhaltenen zwei complexen Zahlen, so entsteht eine neue:

$$a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3,$$

von der wir behaupten können, dass sie für $\alpha=g^{\frac{p-1}{5}}$ durch $p$ theilbar ist und dass die Summe der Coefficienten dem absoluten Betrage nach kleiner, als $\sqrt{p}$ ist. Daher wird sein

$$N(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3)<p^2.$$

Diese Norm enthält aber sicher den Theiler $p$ (s. Bachmann, Kreistheilung, S. 250). Folglich kann sie ausser $p$ nur kleinere Primzahlen enthalten und unser Satz ist bewiesen, sobald es gelingt, die Zerlegung der reellen Primzahlen bis 401 in ihre complexen Factoren wirklich auszuführen.

Das Resultat dieser Rechnung enthält die beigefügte Tabelle, wozu bemerkt werden mag, dass es praktisch nie vorkommt, was der obige Beweis verlangt, nämlich die Ausscheidung kleinerer Primzahlen. Die echten Primfactoren finden sich immer mit Leichtigkeit direct.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p=5$, | $\pi(\alpha)=1-\alpha$, | $p=191$, | $\pi(\alpha)=\alpha+\alpha^2-\alpha^3-3$, |
| 11, | $2+\alpha$, | 211, | $2-3\alpha^4$, |
| 31, | $2-\alpha$, | 241, | $-\alpha+\alpha^2+4$, |
| 41, | $\alpha^2-\alpha^3-2$, | 251, | $2\alpha^4+\alpha+5$, |
| 61, | $3+\alpha$, | 271, | $\alpha+3\alpha^4-3$, |
| 71, | $\alpha^3-\alpha-3$, | 281, | $\alpha-\alpha^3-4$, |
| 101, | $\alpha^3-\alpha^4-3$, | 311, | $\alpha-\alpha^3-2\alpha^4-4$, |
| 131, | $\alpha^3-\alpha^2-3$, | 331, | $2\alpha^2-\alpha^4-4$, |
| 151, | $3\alpha^4+2-\alpha^3$, | 401, | $4\alpha^2+3\alpha^4-1$. |
| 181, | $4\alpha+3$, | | |

## § 2.

### Die Kummer'sche Normalform.

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, kann $\pi(\alpha)$ immer in die Form gesetzt werden

5) $$\pi(\alpha) = a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4$$

Dies ist eine nothwendige Form, weil die Gleichung vierten Grades 3) irreducibel ist.

Um die Norm unserer Primzahl herzustellen, habe ich als einfachsten Ausdruck den folgenden erhalten. Man bilde das Product

$$P = (a+b+c+d).\pi(\alpha).\pi(\alpha^2).\pi(\alpha^3).\pi(\alpha^4).$$

Dann findet man

$$P = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + 5bcd(bd - c^2) + 5cda(cd - a^2)$$

6) $$+ 5abd(ab - d^2) + 5abc(ac - b^2).$$

Führt man nun die folgenden Beziehungen ein:

7) $$\eta = \alpha + \alpha^4, \quad \eta' = \alpha^2 + \alpha^3, \quad \varrho = \alpha - 1,$$

so erhält man für $\varrho$ und $\eta$ die nachstehenden irreductiblen Gleichungen:

8) $$\eta^2 + \eta = 1,$$

9) $$\varrho^4 + 5\varrho^3 + 10\varrho^2 + 10\varrho + 5 = 0.$$

Daher nimmt jede Function $g(\alpha)$ in einer nothwendigen Form die Gestalt an

$$g(\alpha) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + a_3\varrho^3.$$

Man wird als Norm von $\pi(\alpha)$ in der Form

10) $$\pi(\alpha) = A + B\varrho + C\varrho^2 + D\varrho^3$$

die folgende erhalten:

$$N = A^4 - 5A^3B + 5A^3C - 5A^3D + 10A^2B^2 + 10A^2C^2$$
$$+ 25A^2D^2 - 20A^2BC + 20A^2BD - 25A^2CD - 10AB^3$$
$$+ 125AD^3 + 40AB^2C - 25AB^2D - 25ABC^2 + 50AC^2D$$
$$+ 150ACD^2 + 25ABCD + 5B^4 - 25B^3C + 25B^3D$$
$$+ 25B^2C^2 - 25B^2CD - 50BC^3 + 150BDC^2 - 125BCD^2$$

11) $$+ 25C^4 - 125C^3D + 250C^2D^2 - 250CD^3 + 125D^4.$$

Durch die Untersuchungen Kummer's, welcher der Entdecker der allgemeinen Reciprocitätsgesetze ist, hat nun die Darstellung von $\pi(\alpha)$ in der Form 10) eine so hervorragende Bedeutung gewonnen, dass wir uns mit derselben eingehend zu beschäftigen haben.

Unter einer complexen Einheit verstehen wir diejenige complexe Zahl, deren Norm Eins ist. Als solche erscheinen in unserer Theorie

$$\alpha^k \text{ und } \eta^k.$$

Um alle solche complexe Einheiten zu finden, nennen wir eine derselben $E(\alpha)$ und bilden

$$E(\alpha).E(\alpha^4) = a + b\eta,$$

wo $a$ und $b$ ganze reelle Zahlen sind. Dann muss sein

$$(a + b\eta)(a + b\eta') = 1 \quad \text{oder} \quad a^2 - ab - b^2 = 1.$$

Man hat also die nicht äquivalenten Darstellungen der Einheit durch die quadratische Form $a^2 - ab - b^2$ aufzusuchen.

Die Theorie der quadratischen Formen zeigt nun, dass man alle diese Darstellungen erhält, wenn man die positiven und negativen ganzzahligen Potenzen von $\eta$ bildet.

Man findet $\eta = -\frac{1}{\eta'}$ und

$$\begin{array}{lll} & \eta^2 = 1 - \eta, & \eta' = -1 - \eta, \\ & \eta^3 = 2\eta - 1, & \eta'^2 = 2 + \eta, \\ & \eta^4 = 2 - 3\eta, & \eta'^3 = -3 - 2\eta, \\ & \eta^5 = 5\eta - 3, & \eta'^4 = 5 + 3\eta, \\ & \eta^6 = 5 - 8\eta, & \eta'^5 = -8 - 5\eta, \\ 12) & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Demnach sind zwei Primfactoren $\pi(\alpha)$ und $\pi'(\alpha)$, welche zu derselben Congruenzwurzel $g^{\frac{p-1}{5}}$ gehören, entweder identisch oder nur durch Multiplicatoren von der Form

$$\alpha^k . \eta^\lambda$$

verschieden. Andererseits sehen wir hierin ein Mittel, die Primfactoren $\pi(\alpha)$ derartig umzuformen, dass sie eine gewisse Form annehmen, welche für den Ausspruch der Reciprocitätsgesetze unerlässlich ist. Diese Form verdankt man dem Scharfblicke Kummer's, und mag sie daher die Kummer'sche Form heissen.

Man hat zunächst

$$\begin{aligned} \alpha &= \varrho + 1, \\ \alpha^2 &= 1 + 2\varrho + \varrho^2, \\ \alpha^3 &= 1 + 3\varrho + 3\varrho^2 + \varrho^3, \\ \alpha^4 &= -4 - 6\varrho - 4\varrho^2 - \varrho^3. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\pi(\alpha) = a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3,$$

so kann $a$ nicht durch 5 theilbar sein, weil $\varrho$ ein Theiler von 5 ist, also $\pi(\alpha)$ ebenfalls den Theiler $\varrho$ haben würde. Multipliciren wir nun $\pi(\alpha)$ mit den verschiedenen Potenzen von $\alpha$ und bilden die Reste $mod\,5$, so durchläuft der Coefficient von $\varrho$ ein vollständiges Restsystem, muss also einmal durch 5 theilbar werden. So kann man also zunächst immer bewirken, dass wird

$$\pi(\alpha) = \alpha^k \pi'(\alpha) = a + 5b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3.$$

Nun bilden wir die verschiedenen Potenzen von $\eta$ und finden

13)
$$\left.\begin{aligned}\eta &\equiv 2+\varrho^2\\ \eta^2 &\equiv 4+4\varrho^2\\ \eta^3 &\equiv 3+2\varrho^2\\ \eta^4 &\equiv 1+2\varrho^2\end{aligned}\right\} \mathit{mod}\, 5.$$

Daraus ergiebt sich mit Leichtigkeit, dass auch $c$ durch 5 theilbar werden kann, und damit die Kummer'sche Normalform

14) $$\varphi(\alpha) = \eta^\lambda \alpha^k \varphi(\alpha) = A + 5B\varrho + 5C\varrho^2 + D\varrho^3.$$

Zahlenbeispiele.

$$\begin{aligned}
p = 11,\quad \varphi(\alpha) &= 2 + 5\varrho + 5\varrho^2 + 2\varrho^3 = \alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3,\\
31,\quad & -1 + \varrho^3 = -2 + 3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3,\\
41,\quad & 6 + 10\varrho + 5\varrho^2 + \varrho^3 = 3\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3,\\
61,\quad & -4 - 5\varrho - 5\varrho^2 - \varrho^3 = -3 + 2\alpha - 2\alpha^2 - \alpha^3,\\
71,\quad & 13 + 20\varrho + 15\varrho^2 + 4\varrho^3 = 4 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3,\\
101,\quad & -3 - 10\varrho - 10\varrho^2 - 3\varrho^3 = \alpha - \alpha^2 - 3\alpha^3.
\end{aligned}$$

Selbstverständlich bleibt die K.'sche Form erhalten, wenn man $\pi(\alpha)$ mit $\eta^5$ multiplicirt. So ergiebt sich z. B.

$$\text{für } p = 101:\ \pi(\alpha) = 20 + 7\alpha + 8\alpha^2 + 19\alpha^3 = 44 + 80\varrho + 65\varrho^2 + 19\varrho^3.$$

## § 3.

### Die Perioden. Charakter von 2, 3, 5, $\eta$.

Sei $x$ eine $p^{\text{te}}$ Wurzel (imaginär) der Einheit, $g$ eine zum Modulus $p$ gehörige Einheitswurzel, so bilden wir nachstehend die fünf Perioden

15)
$$\left\{\begin{aligned}
\eta_0 &= x + x^{g^5} + x^{g^{10}} + \ldots + x^{g^{p-6}},\\
\eta_1 &= x^g + x^{g^6} + x^{g^{11}} + \ldots + x^{g^{p-5}},\\
\eta_2 &= x^{g^2} + x^{g^7} + x^{g^{12}} + \ldots + x^{g^{p-4}},\\
\eta_3 &= x^{g^3} + x^{g^8} + x^{g^{13}} + \ldots + x^{g^{p-3}},\\
\eta_4 &= x^{g^4} + x^{g^9} + x^{g^{14}} + \ldots + x^{g^{p-2}}.
\end{aligned}\right.$$

Ferner bilden wir die bekannte Function

16) $$F(x, \alpha) = \eta_0 + \alpha\eta_1 + \alpha^2\eta_2 + \alpha^3\eta_3 + \alpha^4\eta_4.$$

Rücksichtlich derselben verweisen wir auf die Lehrbücher, insbesondere Bachmann, Kreistheilung, 8. Vorlesung.

Die Perioden $\eta_0, \ldots, \eta_4$ haben die merkwürdige Eigenschaft (Bachmann, S. 48), dass jede ganze Function derselben sich linear durch die fünf Perioden ausdrücken lässt. Dabei findet man sich veranlasst, insbesondere die Congruenzen

17) $$1 + g^{5\nu+k} \equiv g^{5\nu'+\lambda}\ \mathit{mod}\, p$$

in Betracht zu ziehen. $k$ und $\lambda$ bedeuten darin gegebene Werthe aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, und $\nu$, $\nu'$ sind so ganzzahlig zu bestimmen, dass 17) stattfindet. Die Anzahl der Auflösungen dieser Congruenz, welche auch Null sein kann, bezeichnen wir mit

$(k, \lambda)$.

Dann beweist man leicht

18) $$(k, \lambda) = (\lambda, k) = (-k, \lambda - k)$$

($-1$ äquivalent mit 4, $-2$ mit 3 u. s. w.)

Hieraus ergiebt sich das folgende Schema:

$$(0, 0)$$
$$(0, 1) = (1, 0) = (4, 4), \quad (1, 2) = (2, 1) = (4, 1) = (1, 4) = (3, 4) = (4, 3),$$
$$(0, 2) = (2, 0) = (3, 3), \quad (1, 3) = (3, 1) = (4, 2) = (2, 4) = (2, 3) = (3, 2),$$
$$(0, 3) = (3, 0) = (2, 2),$$

19) $(0, 4) = (4, 0) = (1, 1)$.

Mithin bleiben von den anfangs vorhandenen 25 Grössen $(k, \lambda)$ nur 7 übrig, die vorläufig von einander unabhängig sind. Schreibt man die Zahlen *modp* tabellarisch in der von Gauss bei den biquadratischen Resten befolgten Weise in fünf Classen auf, so lassen sich die sieben Grössen leicht abzählen. Als Beispiel wählen wir $p = 41$, $g = 11$.

| *A.* | *B.* | *C.* | *D.* | *E.* |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 39 | 19 | 4 | 3 |
| 33 | 35 | 16 | 12 | 9 |
| 17 | 23 | 7 | 36 | 27 |
| 10 | 28 | 21 | 26 | 40 |
| 30 | 2 | 22 | 37 | 38 |
| 8 | 6 | 25 | 29 | 32 |
| 24 | 18 | 34 | 5 | 14 |
| 31 | 13 | 20 | 15 | 1. |

Die Spalte $A$ enthält die Zahlen vom Index $5\nu + 1$, $B$ vom Index $5\nu + 2$ u. s. w., $E$ die Reste. Es ist $(0, 0) = 0$, $(0, 1) = 2$, nämlich bei 9, 10 und 32, 33, ebenso $(1, 0) = 2$ bei 8, 9 und 31, 32, endlich $(4, 4) = 2$ bei 4, 5 und 36, 37.

Es ist

$$(0, 0) = 0, \quad (0, 1) = 2, \quad (0, 2) = 3, \quad (0, 3) = 0, \quad (0, 4) = 2,$$
$$(1, 2) = 1, \quad (1, 3) = 2.$$

Man findet diese Zahlen praktisch, indem man neben die Spalten $A$ und $E$ die um 1 vergrösserten Zahlen schreibt, also 12 neben 11, 34 neben 33, 18 neben 17 u. s. w., und dann die Indices dieser Zahlen 12, 34, 18, ... sucht, welche ebenfalls nebengeschrieben eine dritte Spalte bilden.

Nun findet man

$$20) \left\{ \begin{aligned} \eta_0^2 &= \frac{p-1}{5} + (0, 0)\eta_0 + (0, 1)\eta_1 + (0, 2)\eta_2 + (0, 3)\eta_3 + (0, 4)\eta_4, \\ \eta_0\eta_1 &= \qquad\quad (0, 1)\eta_0 + (0, 4)\eta_1 + (1, 2)\eta_2 + (1, 3)\eta_3 + (1, 2)\eta_4, \\ \eta_0\eta_2 &= \qquad\quad (0, 2)\eta_0 + (1, 2)\eta_1 + (0, 3)\eta_2 + (1, 3)\eta_3 + (1, 3)\eta_4. \end{aligned} \right.$$

Daraus zieht man die Gleichungen

$$21)\quad \begin{cases} (0,0)+(0,1)+(0,2)+\ (0,3)\ +\ (0,4)\ =\dfrac{p-1}{5}-1, \\ (0,1)+(0,4)+2.(1,2)+\ (1,3)\ =\dfrac{p-1}{5}, \\ (0,2)+(0,3)+\ (1,2)\ +2.(1,3)=\dfrac{p-1}{5}. \end{cases}$$

Von den sieben Coefficienten $(k, \lambda)$ bleiben also nur vier unbestimmt. Diese werden in folgender Weise gewonnen.

Man beweist die Gleichung

$$22)\qquad \frac{F(x, \alpha) . F(x, \alpha^h)}{F(x, \alpha^{h+1})} = \psi_h(\alpha),$$

wenn

$$23)\qquad \psi_h(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p-2} \alpha^{h . ind\, \nu - (h+1) ind (\nu+1)}.$$

Fasst man nur die zweite Gleichung ins Auge, so scheint eine ganze Reihe verschiedener $\psi$ durch dieselbe eingeführt zu sein. Suchen wir dieselben näher kennen zu lernen.

Wir wollen für einen Augenblick setzen

$$\psi(\beta, \gamma) = \sum_{\nu}^{p-2}{}_{1}\, \alpha^{\beta . ind\, \nu + \gamma . ind (\nu+1)} = \psi_{\beta, \gamma}(\alpha).$$

Wenn nun $\nu$ und $\nu+1$ beide der Classe $A$ angehören, so tritt in $\psi(\beta, \gamma)$ die Einheit auf. Dies wird also zunächst $(0, 0)$-mal der Fall sein. Um eine klare Einsicht in das Weitere zu gewinnen, wollen wir einen speciellen Fall durchführen.

$$\psi(1, 2) = \sum_{1}^{p-2} \alpha^{ind\, \nu + 2 ind (\nu+1)} = \psi_{1,2}(\alpha).$$

Sei

$$\delta = k + 2\lambda \ mod 5,$$

so ergiebt sich die folgende Tabelle:

| 1. | | | 2. | | | 3. | | | 4. | | | 5. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$, | $\lambda$, | $\delta$; | $k$, | $\lambda$, | $\delta$; | $k$, | $\lambda$, | $\delta$; | $k$, | $\lambda$, | $\delta$; | $k$, | $\lambda$, | $\delta$. |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | 0 | 3 | 4 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 1 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 4 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 0 |
| 0 | 4 | 3 | 1 | 4 | 4 | 2 | 4 | 0 | 3 | 4 | 1 | 4 | 4 | 2 |

Mithin tritt die Einheit $(0, 0) + (1, 2) + (2, 4) + (3, 1) + (4, 3)$-mal auf u. s. w.

Setzen wir also

$$24)\qquad \psi_{1,2}(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + A_4\alpha^4,$$

so ergiebt sich

$$A_0 = (0, 0) + (1, 2) + (2, 4) + (3, 1) + (4, 3) = (0, 0) + 2.(1, 2) + 2.(1, 3),$$
$$A_1 = (0, 3) + (1, 0) + (2, 2) + (3, 4) + (4, 1) = (0, 1) + 2.(0, 3) + 2.(1, 2),$$
$$A_2 = (0, 1) + (1, 3) + (2, 0) + (3, 2) + (4, 4) = (0, 2) + 2.(0, 1) + 2.(1, 3),$$
$$A_3 = (0, 4) + (1, 1) + (2, 3) + (3, 0) + (4, 2) = (0, 3) + 2.(0, 4) + 2.(1, 3),$$
$$A_4 = (0, 2) + (1, 4) + (2, 1) + (3, 3) + (4, 0) = (0, 4) + 2.(0, 2) + 2.(1, 2).$$

Mit der Function $\psi_{1,2}(\alpha)$ sind nun aber drei weitere Functionen erledigt. Denn es ist

$$\psi_{1,2}(\alpha^2) = \psi_{2,4}(\alpha), \quad \psi_{1,2}(\alpha^3) = \psi_{3,1}(\alpha), \quad \psi_{1,2}(\alpha^4) = \psi_{4,3}(\alpha).$$

Um die übrigen auf unsere Function zurückzuführen, hat man zunächst (Bachmann, S. 86)

25) $$\psi_{\beta,\gamma}(\alpha) = \psi_{-(\beta+\gamma),\gamma}(\alpha).$$

Ferner

26) $$\psi_{\beta,\gamma}(\alpha) = \psi_{\gamma,\beta}(\alpha).$$

Die letztere Gleichung folgt am einfachsten durch Aufstellung der Werthe für $\psi$ in $F$ und Division, unter Beachtung, dass

27) $$F(x, \alpha^\gamma) . F(x, \alpha^{-\gamma}) = p.$$

Demnach ist

28) $$\psi_{1,2}(\alpha) = \psi_{2,1}(\alpha) = \psi_{2,2}(\alpha).$$

Hiermit sind alle Functionen $\psi_{\beta,\gamma}$ auf eine einzige zurückgeführt. Denn aus den drei Stammfunctionen 28) ergeben sich zwölf durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$. Und die vier noch denkbaren:

$$\psi_{1,4}, \quad \psi_{4,1}, \quad \psi_{2,3}, \quad \psi_{3,2}$$

reduciren sich mit Hilfe von 21) auf die negative Einheit.

Nehmen wir nun an

29) $$F^2(x, \alpha) = \psi(\alpha) . F(x, \alpha^2),$$

so können wir alle zwölf $\psi_{\beta,\gamma}$ auf diese eine Function zurückführen.

$$\psi_{1,3}(\alpha) = \psi_{3,1}(\alpha) = \psi_{1,1}(\alpha) = \psi(\alpha),$$
$$\psi_{2,1}(\alpha) = \psi_{1,2}(\alpha) = \psi_{2,2}(\alpha) = \psi(\alpha^2),$$
$$\psi_{3,4}(\alpha) = \psi_{4,3}(\alpha) = \psi_{3,3}(\alpha) = \psi(\alpha^3),$$
30) $$\psi_{4,2}(\alpha) = \psi_{2,4}(\alpha) = \psi_{4,4}(\alpha) = \psi(\alpha^4).$$

Setzen wir fest

31) $$\psi(\alpha) = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2 + B_3\alpha^3 + B_4\alpha^4,$$

so finden wir

$$B_0 = (0, 0) + 2.(1, 2) + 2.(1, 3),$$
$$B_1 = (0, 2) + 2.(0, 1) + 2.(1, 3),$$
$$B_2 = (0, 4) + 2.(0, 2) + 2.(1, 2),$$
$$B_3 = (0, 1) + 2.(0, 3) + 2.(1, 2),$$
$$B_4 = (0, 3) + 2.(0, 4) + 2.(1, 3).$$

Ersetzt man in $\psi(\alpha)$

$$\alpha \text{ durch } g^{\lambda\frac{p-1}{5}}, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4,$$

so wird $\psi\left(g^{\frac{p-1}{5}}\right)$ und $\psi\left(g^{2.\frac{p-1}{5}}\right)$, nicht aber die beiden andern durch $p$ theilbar. Also enthält $\psi(\alpha)$ die beiden Primfactoren

$$\pi(\alpha) \text{ und } \pi(\alpha^3).$$

Da man hat (Bachmann, S. 123)

32) $$\psi(\alpha).\psi(\alpha^4) = p,$$

so können wir setzen

$$\psi(\alpha) = E(\alpha)\ \pi(\alpha).\pi(\alpha^3),$$

wo $E(\alpha)$ eine complexe Einheit bedeutet. Diese kann nun wegen 32) keine Potenz von $\eta$ sein, weil dann $E(\alpha) = E(\alpha^4)$ sein würde. Ferner kann man beweisen, dass $\psi(\alpha)$ immer die Kummer'sche Normalform besitzt. Da nun ausser $\eta$ noch die Potenzen von $\alpha$ als Einheitsfactoren auftreten könnten, dieselben aber die Kummer'sche Normalform nicht haben, so würde, wenn wir $\pi(\alpha)$ und $\pi(\alpha^3)$ in Kummer'scher Form angenommen haben, die obige Gleichung unmöglich werden. Daher

33) $$\psi(\alpha) = \pi(\alpha).\pi(\alpha^3).$$

Diese Gleichung darf schon dann behauptet werden, wenn $\pi(\alpha)$ und $\pi(\alpha^3)$ in der Form auftreten, dass in denselben nur der Coefficient von $\varrho$, nicht aber auch der von $\varrho^2$ durch 5 theilbar ist.

Nunmehr finden wir für unsere sieben Coefficienten die folgenden Werthe (vergl. d. Abh. von Kummer, Crelle 44, S. 93):

$$5.(0,0) = -2.\frac{p+4}{5} + 3B_0,$$

$$10.(1,2) = \frac{p+\mu}{5} + B_0 - B_1 + B_2 + B_3 - B_4,$$

$$10.(1,3) = \frac{p+4}{5} + B_0 + B_1 - B_2 - B_3 + B_4,$$

34)
$$5.(0,1) = -2.\frac{p-1}{5} + 2B_1 + B_3, \quad 5.(0,2) = -2.\frac{p-1}{5} + 2B_2 + B_1,$$
$$5.(0,3) = -2.\frac{p-1}{5} + 2B_3 + B_4, \quad 5.(0,4) = -2.\frac{p-1}{5} + 2B_4 + B_2.$$

Selbstverständlich ist, nachdem 33) den Werth von $\psi(\alpha)$ geliefert hat, demselben diejenige Form zu ertheilen, dass alle Coefficienten positiv und ihre Summe $p-2$ wird, was immer und nur auf eine Art möglich ist.

Zahlenbeispiel: $p = 41$.

Für $g = 11$ finden wir

$$\alpha \equiv 16, \quad \alpha^2 \equiv 10, \quad \alpha^3 \equiv 37, \quad \alpha^4 \equiv 18 \quad mod\,\pi(\alpha),$$

daher

$$\pi(\alpha) = \alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha^4, \quad \pi(\alpha^3) = \alpha^3 + 3\alpha + 2\alpha^2.$$

Die Multiplication ergiebt

$$\pi(\alpha).\pi(\alpha^3) = 9 + 4\alpha + 5\alpha^2 + 11\alpha^3 + 7\alpha^4.$$

Die Summe der Coefficienten ist 36. Bilden wir nun

$$15(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)-\pi(\alpha).\pi(\alpha^3),$$

so erhalten wir

$$\psi(\alpha)=-\pi(\alpha).\pi(\alpha^3),\quad \psi(\alpha)=6+11\alpha+10\alpha^2+4\alpha^3+8\alpha^4.$$

Hätten wir vorher $\pi(\alpha)$ die K.'sche Form

$$\pi'(\alpha)=\eta^5.\pi(\alpha)=15+12\alpha-4\alpha^2+25\alpha^3-6\alpha^4$$

ertheilt, so würden wir direct, weil $\eta^5.\eta'^5=-1$ ist, erhalten haben

$$\pi'(\alpha).\pi'(\alpha^3)=\psi(\alpha).$$

Da diese Form immer vorher ertheilt werden kann, so haben wir nicht nöthig gehabt, in 33) eine Ausnahme anzumerken. Will man aber, da die Rechnung durch Anwendung der zweiten K.'schen Form nicht unerheblich complicirt wird, die Ausnahme machen, so kann man sagen:

Wenn

$$\pi(1)\equiv 2 \text{ oder } 3 \quad mod\, 5,$$

so ist

$$\psi(\alpha)=\pi(\alpha).\pi(\alpha^3).$$

Wenn dagegen

$$\pi(1)\equiv 1 \text{ oder } 4 \quad mod\, 5,$$

so ist

33a) $$\psi(\alpha)=-\pi(\alpha).\pi(\alpha^3).$$

Da für $p=41$

$$B_0=6,\quad B_1=11,\quad B_2=10,\quad B_3=4,\quad B_4=8,$$

so folgt

$$5.(0,0)=-18+18=0,$$
$$5.(0,1)=-16+22+4=10,$$
$$10.(1,2)=\quad 9+\ 6-11+10+4-8=10.$$

Ueber die Coefficienten von $\psi(\alpha)$ können wir noch folgende Bemerkungen machen:

Sei

$$2\equiv g^{5\nu+\lambda},$$

dann ist

$$\eta_0^2\equiv\eta_\lambda,\quad \eta_1^2\equiv\eta_{\lambda+1},\ \dots\quad mod\, 2,$$

demnach

$$F^2(x,\alpha)\equiv\eta_\lambda+\alpha^2\eta_{\lambda+1}+\dots\equiv\alpha^{-2\lambda}.F^2(x,\alpha)\quad mod\, 2.$$

Andererseits ist

$$\psi(\alpha).F(x,\alpha^2)=F^2(x,\alpha).$$

Daraus zieht man den Satz:

Unter den Coefficienten von $\psi(\alpha)$ befindet sich immer ein einziger ungerader. Sei derselbe $B_\lambda$. Dann hat $2\, mod\, p$ den Charakter $\frac{5-\lambda}{2}$ oder $5-\frac{\lambda}{2}$, je nachdem $\nu$ ungerade oder gerade ist.

Analog beweist man den folgenden Lehrsatz:

Unter den Coefficienten von $\psi(\alpha)$ sind immer je zwei einander $mod\, 3$ congruent. Der fünfte übrige ist keinem

andern $mod\,3$ congruent. Sei derselbe $B_\lambda$. Dann hat $3\,mod\,p$ den Charakter $5-\lambda$.

Untersuchen wir endlich $\psi(\alpha)$ $mod\,5$.

Da es die K.'sche Form hat und $\psi(1)\equiv 4\ mod\,5$, so wird

$$\psi(\alpha)\equiv 4+d(1-\alpha)^3 = 4+d(1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3).$$

Nun kann $d$ durch 5 theilbar sein oder nicht. Im letzteren Falle wird $\psi(\alpha)$ congruent einer der vier Formen

$$2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3,\quad 1+4\alpha+\alpha^2+3\alpha^3,$$
$$2+\alpha+4\alpha^2+2\alpha^3,\quad 3+3\alpha+4\alpha^2+\alpha^3.$$

Andererseits ist

$$\psi(\alpha)=B_0-B_4+(B_1-B_4)\alpha+(B_2-B_4)\alpha^2+(B_3-B_4)\alpha^3.$$

Daher der Lehrsatz:

Entweder ist $B_0$ **einer** der Zahlen $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ $mod\,4$ congruent oder die letzteren alle einander.

Wendet man die allgemeinen Methoden Kummer's auf die fünften Reste an, so findet man

35) $$\eta^{\frac{p-1}{5}}\equiv a^{3\frac{p-1}{5}+3B_4}\ mod\,\pi(\alpha).$$

Will man dagegen nur den Index von $\eta$ kennen lernen, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Coefficienten $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ alle einander congruent sind, so ist $\eta$ fünfter Rest.

Wenn nur $B_\lambda\equiv B_0\ mod\,5$, so ist

36) $$\lambda.\ in\,d\eta\equiv 3\ mod\,5,\quad \lambda.\ in\,d\eta'\equiv 2\ mod\,5.$$

Als Zahlenbeispiele für Primzahlen, zu denen $\eta$ fünfter Rest ist, dienen:

$$p=421,\quad \psi(\alpha)=80+86\alpha+86\alpha^3+96\alpha^4+71\alpha^2,$$
$$\eta=110,$$
$$p=521,\quad \psi(\alpha)=110+106\alpha+106\alpha^2+86\alpha^3+111\alpha^4,$$
$$\eta=99.$$

Zur Bestimmung des Charakters der Zahl 5 findet man nach Kummer zunächst

$$in\,d5\equiv\frac{4(B_4-B_1)+3(B_3-B_2)}{5}\ mod\,5.$$

Bringen wir nun $\psi(\alpha)$ auf die Normalform

37) $$\psi(\alpha)=C_0+5C_1\varrho+5C_2\varrho^2+C_3\varrho^3,$$

so folgt

38) $$in\,d5\equiv C_1\ mod\,5.$$

Dies Resultat ist in der That so elegant wie nur möglich.

Es ist (vergl. Kummer *l. c.*) wenig lohnend, auf die Primfactoren $\pi(\alpha)$ zurückzugehen. Nur mögen die beiden Sätze hervorgehoben werden, welche die Bedingungen angeben, so dass 5 oder $\eta$ Reste werden. Sie lauten:

5 ist Rest, wenn $\pi(\alpha) = A + 25B\varrho + 5C\varrho^2 + D\varrho^3$,
$\eta$ ist Rest, wenn $\pi(\alpha) = A + 5B\varrho + 5C\varrho^2 + 5D\varrho^3$.

5 ist z. B. Rest zu den Primzahlen 31, 191, 271, 601. Merkwürdiger Weise kann bei diesen allen $B$ und $C$ als Null angenommen werden, so dass sie durch die Form

$$p = x^4 + 5x^3y + 25x^2y^2 - 125xy^3 + 125y^4$$

darstellbar sind.

## § 4.
## Die Periodengleichung.

Die fünf Perioden $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$ sind Wurzeln einer Gleichung fünften Grades, welche ermittelt werden soll. Schicken wir der Behandlung des allgemeinen Falles die zwei einfachsten numerischen Beispiele $p = 11$ und $p = 31$ voraus.

Man findet

1. $p = 11$,
$$\begin{aligned} \eta_0^2 &= 2 + \eta_4, \\ \eta_0^3 &= 3\eta_0 + \eta_2, \\ \eta_0^4 &= 6 + 4\eta_4 + \eta_3, \\ \eta_0^5 &= 10\eta_0 + 5\eta_2 + \eta_1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen ermöglichen es, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ in Potenzen von $\eta_0$ auszudrücken. Die Summe aller $\eta$ giebt $-1$, daher

39) $$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

$y$ ist für $\eta_\lambda$ eingetreten.

2. $p = 31$.

Hier hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_0^2 &= 6 + 2\eta_0 + \eta_2 + 2\eta_4, \\ \eta_0\eta_1 &= 2\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + \eta_4, \\ \eta_0\eta_1\eta_2 &= 6 + 8\eta_0 + 6\eta_1 + 7\eta_2 + 7\eta_3 + 7\eta_4, \\ \eta_0\eta_1\eta_3 &= 12 + 9\eta_0 + 5\eta_1 + 7\eta_2 + 6\eta_3 + 7\eta_4, \\ \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 &= -2\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 - \eta_4, \\ \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 &= -5. \end{aligned}$$

Und als definitive Gleichung, deren Wurzeln die $\eta_\lambda$ sind,

40) $$y^5 + y^4 - 12y^3 - 21y^2 + y + 5 = 0.$$

Gehen wir jetzt an die Lösung der allgemeinen Aufgabe. Möge die gesuchte Gleichung lauten

41) $$y^5 + m_1y^4 + m_2y^3 + m_3y^2 + m_4y + m_5 = 0,$$

so ist zunächst

$$\Sigma\eta_0 = -1,$$

wo das Summenzeichen cyklische Vertauschung umfasst. Daher

42) $$m_1 = 1.$$

Weiter findet man

$$\sum y_0 y_1 = \sum y_0 y_2 = -\frac{p-1}{5},$$

43) $$m_2 = -2 . \frac{p-1}{5}.$$

Multiplicirt man den Ausdruck für $\eta_0 \eta_1$ in 20) mit $\eta_2$ und summirt, so erhält man

$$\sum \eta_0 \eta_1 \eta_2 = p.(1, 2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2,$$
$$\sum \eta_0 \eta_1 \eta_3 = p.(1, 3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2.$$

Daher

44) $$m_3 = 2 . \left(\frac{p-1}{5}\right)^2 - p\,((1, 2) + (1, 3)).$$

Durch dasselbe Mittel erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\sum \eta_0^3 = p.(0, 0) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^4,$$
$$\sum \eta_0^2 \eta_1 = \sum \eta_0 \eta_4^2 = p.(0, 1) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2,$$
$$\sum \eta_0^2 \eta_2 = \sum \eta_0 \eta_3^2 = p.(0, 2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2,$$
$$\sum \eta_0^2 \eta_3 = \sum \eta_0 \eta_2^2 = p.(0, 3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2.$$
$$\sum \eta_0^2 \eta_4 = \sum \eta_0 \eta_1^2 = p.(0, 4) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^2.$$

Daraus folgt nach verhältnissmässig leichter Rechnung

45) $$m_4 = -\left(\frac{p-1}{5}\right)^3 + p\,\{((0, 1) + (0, 4))\,((1, 2) + (1, 3)) + (1, 2)^2\}$$

und endlich

46) $$5\,m_5 = \left(\frac{p-1}{5}\right)^4 - p\,\{((0, 1) + (0, 4))^2\,((1, 2) + (1, 3)) + (2.(0, 1) + 2.(0, 4) + (0, 2) + (0, 3)).(1, 2)^2 + (1, 2)\,((0, 1).(0, 2) + (0, 3) \times (0, 4)) + (1, 3).(0, 1).(0, 4) + (1, 2).(1, 3)\,((0, 1) + (0, 4)) + 2.(1, 2)^2.(1, 3) + 4.(1, 3)^2.(1, 2)\}.$$

Zur Umformung setzen wir

47) $$y = z - \tfrac{1}{5}.$$

Dann erhalten alle fünf Coefficienten den Factor $p$. Schreiben wir die Gleichung in der Form

48) $$z^5 + \tfrac{1}{5} n_2 z^3 = + \tfrac{1}{25} n_3 z^2 + \tfrac{1}{125} n_4 z + \tfrac{1}{3125} n_5 = 0,$$

so ergiebt sich augenblicklich

49) $$\begin{cases} n_2 = -2p, \\ n_3 = \quad p(p - 2 \quad - 5B_0), \\ n_4 = \quad p(p^2 - 3p + 4 - 5B_0^2 - 5\,(B_1 - B_4)\,(B_2 + B_3)). \end{cases}$$

Wollte man dieselbe Umrechnung für $n_5$ anwenden, so würde man zu Rechnungen von abschreckender Länge seine Zuflucht nehmen müssen. Glücklicherweise ergiebt sich ein einfacheres Verfahren, wie folgt.

Bekanntlich ist (s. Bachmann, S. 92)

$$F(x, \alpha) = \sqrt[5]{\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2).p} = L.$$

Daraus leitet man die Werthe der Perioden ab. So ist

$$5\eta_0 + 1 = L + \frac{L^2}{\psi(\alpha)} + \frac{L^3}{\psi(\alpha).\psi(\alpha^2)} + \frac{L^4}{\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2)}$$

und hieraus folgt das System

$$50) \quad \begin{cases} 5z_0 = \Sigma \quad \sqrt[5]{\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2).p}, \\ 5z_1 = \Sigma\alpha^4 \sqrt[5]{\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2).p}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 5z_4 = \Sigma\alpha \ \sqrt[5]{\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2).p}. \end{cases}$$

Das Summenzeichen umfasst vier Glieder, welche aus dem ersten durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$ hervorgehen. Bildet man mit Hilfe der Gleichung 6) das Product, so entsteht

$$51) \qquad n_5 = -p.\Sigma\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2).$$

Ist

$$\psi(\alpha) = A\alpha + B\alpha^2 + C\alpha^3 + D\alpha^4,$$

so ist

$$52) \quad \begin{aligned} \Sigma\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2) = 5A^2(D+2B) + 5B^2(C+2D) + 5C^2(B+2A) \\ + 5D^2(A+2C) - (A+B+C+D)^3. \end{aligned}$$

Also hat man das Endresultat

$$53) \quad \begin{aligned} z^5 - \frac{2p}{5}z^3 - \frac{p}{25}\Sigma\psi(\alpha).z^2 + \frac{p}{125}(p + \Sigma\psi(\alpha).\psi(\alpha^2)).z \\ - \frac{p}{3125}.\Sigma\psi^2(\alpha).\psi(\alpha^2) = 0. \end{aligned}$$

Hierzu die folgenden numerischen Beispiele:

$$\begin{aligned} p = 11, \quad & y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0, \\ & z^5 - 11\left(\tfrac{2}{5}z^3 + \tfrac{1}{25}z^2 - \tfrac{42}{125}z = \tfrac{89}{3125}\right) = 0, \\ p = 31, \quad & y^5 + y^4 - 12y^3 - 21y^2 + y + 5 = 0, \\ & z^5 - 31\left(\tfrac{2}{5}z^3 + \tfrac{11}{25}z^2 - \tfrac{32}{125}z - \tfrac{409}{3125}\right) = 0; \\ p = 41, \quad & y^5 + y^4 - 16y^3 + 5y^2 + 21y - 9 = 0, \\ & z^5 - 41\left(\tfrac{2}{5}z^3 - \tfrac{9}{25}z^2 - \tfrac{52}{125}z + \tfrac{981}{3125}\right) = 0. \end{aligned}$$

Der Coefficient $m_5$ ist *modp* immer fünfter Rest.

## § 5.

### Weitere Untersuchungen über die Wurzeln $\eta_0, \ldots, \eta_4$.

Sei irgend eine Function $\varphi(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ gegeben, so bezeichnen wir die Summe aus den fünf Summanden, welche aus $\varphi$ hervorgehen, indem wir die Indices der $\eta$ cyklisch vertauschen, kurz durch

$$\Sigma\varphi.$$

So ist z. B.

$$\Sigma\eta_0\eta_2 = \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_0 + \eta_4\eta_1.$$

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Hauptaufgabe, die Producte aus den Differenzen der Wurzeln

54) $$\begin{cases} P = (\eta_0-\eta_1)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_3)(\eta_3-\eta_4)(\eta_4-\eta_0), \\ Q = (\eta_0-\eta_2)(\eta_2-\eta_4)(\eta_4-\eta_1)(\eta_1-\eta_3)(\eta_3-\eta_0), \end{cases}$$

welche beide ganze Zahlen sein müssen, auszurechnen. Wie man bemerkt, geht $Q$ aus $P$ dadurch hervor, dass man $\eta_0$ unverändert lässt und die primitive Wurzel $g$, welche im System 15) angewandt worden ist, durch eine andere $\gamma \equiv g^{5k+2} \mod p$ ersetzt. Demnach darf man erwarten, dass $P$ und $Q$ für die schwierige Aufgabe der Unterscheidung der $\eta$ von einander die Hauptrolle spielen werden. Für jede Gleichung fünften Grades ist das Product $P^2 . Q^2$ eine symmetrische Function der Wurzeln, also rational durch die Coefficienten darstellbar.

Man findet

$$P = \Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_0^2 + \Sigma\eta_1\eta_2\eta_4\eta_0^2 - \Sigma\eta_1\eta_2\eta_3\eta_0^2 - \Sigma\eta_1\eta_3\eta_4\eta_0^2$$
55) $$+ \Sigma\eta_0\eta_2^2\eta_4^2 - \Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_3^2,$$

$$Q = \Sigma\eta_4\eta_1\eta_3\eta_0^2 + \Sigma\eta_2\eta_4\eta_3\eta_0^2 - \Sigma\eta_2\eta_4\eta_1\eta_0^2 - \Sigma\eta_2\eta_1\eta_3\eta_0^2$$
56) $$+ \Sigma\eta_0\eta_4^2\eta_3^2 - \Sigma\eta_0\eta_2^2\eta_1^2.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen ein

$$(0,0) = a_0, \quad (0,1) = a_1, \quad (0,2) = a_2, \quad (0,3) = a_3, \quad (0,4) = a_4,$$
$$(1,2) = b_2, \quad (1,3) = b_3,$$

so ergeben sich analog dem vorigen Paragraphen die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma\eta_0^2\eta_2\eta_3\eta_4 = \frac{p-1}{5} . \Sigma\eta_2\eta_3\eta_4 + (a_0+a_1)\,\Sigma\eta_0\eta_2\eta_3\eta_4 + a_2\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4$$
$$+ a_3\Sigma\eta_3^2\eta_2\eta_4 + a_4\Sigma\eta_4^2\eta_2\eta_3.$$

Derselben entsprechen vier andere ähnliche. Aus ihnen folgt

$$S = \Sigma\eta_0^2\eta_2\eta_3\eta_4 + \Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_2\eta_4 - \Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_2\eta_3 - \Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_3\eta_4$$
$$= (a_1-a_2-a_3-a_4)\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 + (a_2-a_1)\,\Sigma\eta_1^2\eta_2\eta_3 + (a_1-a_3)\,\Sigma\eta_1^2\eta_2\eta_4$$
$$+ (a_4-a_1)\,\Sigma\eta_1^2\eta_3\eta_4 + (a_2-a_4)\,\Sigma\eta_2^2\eta_1\eta_4$$
57) $$+ (a_3-a_2)\,\Sigma\eta_2^2\eta_1\eta_3 + (a_4-a_3)\,\Sigma\eta_3^2\eta_1\eta_2.$$

Und es ergiebt sich aus

$$\eta_2\eta_3 = a_1\eta_2 + a_4\eta_3 + b_2\eta_4 + b_3\eta_0 + b_2\eta_1 \quad \text{u. s. w.:}$$

$$\Sigma\eta_1^2\eta_2\eta_3 = p(a_1a_1 + a_2a_4 + a_3b_2 + a_4b_3 + a_0b_3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma\eta_1^2\eta_2\eta_4 = p(a_1a_2 + a_2b_2 + a_3a_3 + a_4b_3 + a_0b_3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma\eta_1^2\eta_3\eta_4 = p(a_1b_2 + a_2a_1 + a_3a_4 + a_4b_2 + a_0b_3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_2^2 \eta_1 \eta_4 = p(a_1 b_3 + a_2 a_2 + a_3 b_2 + a_4 a_3 + a_0 b_3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_2^2 \eta_1 \eta_3 = p(a_1 a_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_4 a_2 + a_0 b_2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_3^2 \eta_1 \eta_2 = p(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 a_1 + a_4 a_4 + a_0 b_2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3.$$

Die Ausrechnung ergiebt, dass $S$ durch $p$ theilbar ist. Der Ausdruck selbst ist der folgende:

$$\begin{aligned} S = p \,.\, a_0(-b_2 a_1 + b_2 a_4 + b_3 a_2 - b_3 a_3) + p \,.\, b_2^2(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \\ + p \,.\, b_3(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) + p(-a_1^3 + a_2^3 - a_3^3 + a_4^3 \\ + a_1^2 a_2 - a_2^2 a_4 + a_3^2 a_1 - a_4^2 a_3 + 2 a_2 a_3 a_4 - 2 a_1 a_2 a_3). \end{aligned} \tag{58}$$

Schreiten wir jetzt zur Bildung des Ausdrucks

$$T = \Sigma \eta_0 \eta_2^2 \eta_4^2 - \Sigma \eta_0 \eta_1^2 \eta_3^2.$$

Man hat

$$\eta_1^2 = \frac{p-1}{5} + a_0 \eta_1 + a_1 \eta_2 + a_2 \eta_3 + a_3 \eta_4 + a_4 \eta_0,$$

daher

$$\begin{aligned} \Sigma \eta_0 \eta_1^2 \eta_3^2 = \frac{p-1}{5} \Sigma \eta_0 \eta_3^2 + a_0 \Sigma \eta_0 \eta_1 \eta_3^2 + a_1 \Sigma \eta_0 \eta_2 \eta_3^2 + a_2 \Sigma \eta_0 \eta_3^3 \\ + a_3 \Sigma \eta_0 \eta_4 \eta_3^2 + a_4 \Sigma \eta_0^2 \eta_3^2. \end{aligned}$$

Analog eine zweite Gleichung.

Nun hat man aber

$$\Sigma \eta_0 \eta_3^3 = p(a_0 a_2 + a_1 b_2 + a_2 a_3 + a_3 b_3 + a_4 b_3) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_0 \eta_4^3 = p(a_0 a_1 + a_1 a_4 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_0^2 \eta_4^2 = p(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_0) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3 + p \,.\, \frac{p-1}{5},$$

$$\Sigma \eta_0^2 \eta_3^2 = p(a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_0 + a_4 a_1) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3 + p \,.\, \frac{p-1}{5},$$

$$\Sigma \eta_0 \eta_2^3 = p(a_0 a_3 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 a_2 + a_4 b_2) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3,$$

$$\Sigma \eta_0 \eta_1^3 = p(a_0 a_4 + a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 a_1) - \left(\frac{p-1}{5}\right)^3.$$

Die Ausrechnung liefert

$$\begin{aligned} T = p \,.\, \frac{p-1}{5}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) + p a_0 \{(a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \\ + b_2(a_2 - a_3) - b_3(a_1 - a_4)\} - p(a_1 - a_2 + a_3 - a_4)(a_2 + a_3) b_2 \\ + p(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4)(a_1 - a_4) b_3 + p(a_1^2 a_4 - a_2^2 a_1 - a_2^2 a_3 \\ + a_3^2 a_2 + a_3^2 a_4 - a_4^2 a_1 + 2 a_1 a_2 a_4 - 2 a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 - a_2 a_3 a_4). \end{aligned} \tag{59}$$

Die Addition von $T$ und $S$ giebt

$$P = p(a_1 - a_2 + a_3 - a_4)\left\{\frac{p-1}{5} + a_0(a_2 + a_3 - b_2 - b_3) + b_2(b_2 - a_2 - a_3)\right.$$
$$\left. + b_3(a_2 + a_3)\right\} + p(-a_1^3 + a_2^3 - a_3^3 + a_4^3 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_4 - a_2^2 a_1 - a_2^2 a_3$$
$$- a_2^2 a_4 + a_3^2 a_1 + a_3^2 a_2 + a_3^2 a_4 - a_4^2 a_3 - a_4^2 a_1 + 2 a_1 a_2 a_4 - 2 a_1 a_3 a_4$$
$$60)\quad + a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_3).$$

Hieraus erhält man alsbald den Werth für $Q$, indem man $a_0$ unverändert lässt und

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_2,\ b_3 \text{ durch } a_2,\ a_4,\ a_1,\ a_3,\ b_3,\ b_2$$

ersetzt. Also

$$Q = p(a_2 - a_4 + a_1 - a_3)\left\{\frac{p-1}{5} + a_0(a_4 + a_1 - b_2 - b_3) + b_3(b_3 - a_1 - a_4)\right.$$
$$\left. + b_2(a_1 + a_4)\right\} + p(-a_2^3 + a_4^3 - a_1^3 + a_3^3 + a_2^2 a_4 + a_2^2 a_3 - a_4^2 a_2 - a_4^2 a_1$$
$$- a_4^2 a_3 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_4 + a_1^2 a_3 - a_3^2 a_1 - a_3^2 a_2 + 2 a_2 a_4 a_3 - 2 a_2 a_1 a_3$$
$$61)\quad + a_4 a_1 a_3 - a_2 a_4 a_1).$$

**Beispiele.**

1. $p = 11,\ \ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$
$$P = 11,\quad Q = 11;$$
$$(\eta_0 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_0) = 11,$$
$$(\eta_0 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_0) = 11.$$

2. $p = 31,\ \ a_0 = 2,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 1;$
$$P = 31,\quad Q = -5.31.$$

Anm. zu S. 109. Die Zurückführung der $\psi$-Functionen auf eine geringere Zahl Stammformen hat schon Jacobi gelehrt, wie Herr Bachmann S. 92 bemerkt. Doch ist mir keine Veröffentlichung dieser Untersuchung Jacobi's bekannt geworden. Es ist nicht schwer, diese Reduction allgemein durchzuführen, wie ich vielleicht an anderer Stelle zeigen werde.

# Kleinere Mittheilungen.

---

### IV. Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung.

Das Problem der Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung durch neun gegebene Punkte gehört zu den vielfach bekannten Problemen, und mehrere Methoden können als bekannt vorausgesetzt werden. Zu erwähnen sind z. B. die Constructionen von Th. Reye (Geometrie der Lage, II, 153, 160) und von Chasles, letztere ausführlich auseinandergesetzt von Dr. H. Schröter (Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, § 53) und von Heger (Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys., 25. Jahrg. S. 98). Es ist die Absicht dieser Abhandlung, das Problem zu erweitern, auf ähnliche Weise, wie in der Lehre von den Kegelschnitten, wo bekanntlich auch die Annahme von conjugirt imaginären Punkten zu den gewöhnlichen Aufgaben gehört.

Es sei also die Aufgabe gestellt: Von einer Oberfläche zweiter Ordnung ($F^{(2)}$) seien gegeben neun Punkte, unter welchen jedoch acht vorkommen können, welche Doppelpunkte einer Punktinvolution sind; es wird gefragt, diese Oberfläche zu construiren.

Am allgemeinsten wird die Lösung sein, wenn die vier gegebenen Punktinvolutionen elliptisch sind, so dass nur ein Punkt gegeben ist, die anderen conjugirt-imaginär gedacht werden müssen. Demzufolge wird die Aufgabe formulirt:

Es seien gegeben: ein Punkt $E$, vier Gerade $a$, $b$, $c$, $d$, Träger von elliptischen Punktinvolutionen; es wird gefragt, eine Oberfläche zweiter Ordnung ($F^{(2)}$) zu construiren, die durch $E$ geht und zu der die Involutionen $a$, $b$, $c$, $d$ gehören.

Verbindet man die oben genannte Constructionsmethode von Chasles mit einigen bekannten Eigenschaften eines Kegelschnittbüschels, so gelangt man zur folgenden Lösung.

Man nehme auf $d$ drei Punkte $A$, $B$, $C$ und denke sich die Ebenen $Aa = \alpha$, $Bb = \beta$ und $Cc = \gamma$ construirt. Es folgt nun zuerst die Behandlung der Aufgabe:

Eine Oberfläche zweiter Ordnung $F_1^{(2)}$ zu construiren, die durch $A$, $B$, $C$ geht und zu der die Involutionen $a$, $b$, $c$ gehören.

1. Auf der Geraden $\alpha\beta$ wird ein Punkt $R$ angenommen. Ein Kegelschnittbüschel in der Ebene $\alpha$ ist bestimmt durch $R$, $A$ und die Involu-

tion auf $a$; das Büschel bestimmt auf der Geraden $\alpha\gamma$ eine Involution $Y_1 Y'_1$, $Y_2 Y'_2$, ... und auf $\alpha\beta$ eine Punktreihe $Z_1$, $Z_2$, .... Zu einem festen Punkte $Q$ auf $\alpha\gamma$ construirt man $Q_1$, $Q_2$, ... harmonisch conjugirt zu $QY_1 Y'_1$, $QY_2 Y'_2$, ...; die Punktreihen $Q_1$, $Q_2$, ... und $Z_1$, $Z_2$, ... werden projectivisch sein.

2. Ein neues Kegelschnittbüschel ist bestimmt in der Ebene $\beta$ durch $B$, die Involution auf $b$ und die Involution $Y_1 Y'_1$, $Y_2 Y'_2$, ...; es bestimmt auf $\beta\gamma$ eine Involution $X_1 X'_1$, $X_2 X'_2$, .... Zu einem festen Punkte $P$ construirt man $P_1$, $P_2$, ..., harmonisch conjugirt zu $PX_1 X'_1$, $PX_2 X'_2$; diese Punktreihe ist projectivisch zu $Q_1 Q_2$... und ebenfalls zu $Z_1 Z_2$....

3. Ein Kegelschnittbüschel ist wieder bestimmt in der Ebene $\gamma$ durch $R$, die Involution auf $c$ und die Involution $X_1 X'_1$, $X_2 X'_2$, ...; es bestimmt auf der Geraden $\alpha\beta$ eine Punktreihe $Z'_1$, $Z'_2$, ... projectivisch zu $Z_1$, $Z_2$, .... Die beiden projectivischen Punktreihen geben zwei Doppelpunkte, einer ist der Punkt $O = \alpha\beta\gamma$, der zweite kann linear construirt werden, er sei $O'$ genannt.

4. Man lege nun schliesslich den Kegelschnitt in $\alpha$ durch $R$, $O'$, $A$ und $a$, derselbe schneidet $\alpha\gamma$ in $Y_n$, $Y'_n$; der zweite wird gelegt durch $Y_n$, $Y'_n$, $B$ und $b$, er schneidet $\beta\gamma$ in $X_n$, $X'_n$; der Kegelschnitt, durch $X_n$, $X'_n$, $R$ und $c$ gelegt, wird $\alpha\beta$ in $O'$ schneiden.

Auf diese Weise sind construirt drei Kegelschnitte, welche auf $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ dieselbe Involution ausschneiden, also sind es die Kegelschnitte, die durch das Dreikant $\alpha\beta\gamma$ aus einer Oberfläche zweiter Ordnung ausgeschnitten werden. Diese Oberfläche geht durch $A$, $B$ und die Involutionen $a$, $b$, $c$ gehören ihr. Sie kann also betrachtet werden als eine Oberfläche durch acht Punkte.

Der Punkt $R$ war irgendwo auf $\alpha\beta$ angenommen; ein anderer Punkt auf dieser Geraden giebt abermals drei Kegelschnitte, aus einer Oberfläche durch dieselben acht Punkte durch $\alpha\beta\gamma$ geschnitten; die zwei Oberflächen bestimmen im Raume ein Flächenbüschel und in jeder der Ebenen ein Kegelschnittbüschel.

Wird in $\gamma$ der Kegelschnitt des Büschels, der durch $C$ geht, construirt, und bestimmt man in $\alpha$ und $\beta$ die correspondirenden Kegelschnitte, so sind endlich diejenigen construirt aus der Oberfläche zweiter Ordnung durch $A$, $B$, $C$, $a$, $b$, $c$ ausgeschnitten durch $\alpha\beta\gamma$.

Bis jetzt ist noch die Ausführung ganz dieselbe, wie die ursprünglich von Chasles angegebene, weiter durchgeführt von Schröter und Helmert, nur mit dem Unterschiede, dass nicht neun Punkte als direct gegebene angenommen werden, sondern nur drei, und die übrigen durch Involutionen vertreten sind. Wir ziehen jedoch aus dem Gefundenen eine wichtige Folgerung. Die construirte Oberfläche wird nothwendig eine Regelfläche sein, denn die drei Punkte $A$, $B$, $C$ liegen in einer Geraden. Die Regelfläche enthält die Gerade $d$, denn auf ihr sind $A$, $B$, $C$

angenommen, sie kann also betrachtet werden als eine Oberfläche zu dem Flächenbüschel gehörend, durch die Involutionen auf $a$, $b$, $c$, $d$ bestimmt. Von diesem Flächenbüschel kann eine zweite Oberfläche gefunden werden, wenn drei Punkte z. B. auf $c$ angenommen werden, und das Büschel ist durch diese zwei Regelflächen vollständig bestimmt.

Die Frage ist nun zurückgeführt zu der bekannten Aufgabe: Zwei Flächen eines Büschels sind gegeben, es wird verlangt, diejenige Fläche des Büschels zu finden, die durch einen gegebenen Punkt $E$ geht, ein Problem, das gelöst wird durch Benützung der Eigenschaft, dass jede Gerade durch den Punkt $E$ die Flächen des Büschels in einer Involution schneidet, so dass nur der zu $E$ conjugirte Punkt bestimmt zu werden braucht. Von der gefragten Oberfläche können beliebig viele Punkte construirt werden und man kann das Problem als gelöst betrachten.

Die oben behandelte Aufgabe, deren weitere constructive Durchführung zu keinen principiellen Schwierigkeiten Anlass giebt, gestattet einige Ausdehnungen, die hier weiter angegeben werden sollen.

Erstens kann als reciproke Aufgabe gestellt werden: Es seien gegeben eine Ebene $E$, vier Gerade $a$, $b$, $c$, $d$, Träger von elliptischen Ebeneninvolutionen; es wird gefragt, ein Ebenenbündel zweiter Ordnung zu construiren, zu dem $E$ und die Ebeneninvolutionen $a$, $b$, $c$, $d$ gehören.

Die Lösung kann ganz gefunden werden durch das Princip der Reciprocität. Folgende Parallele ist zu ziehen:

| | |
|---|---|
| die Punkte $A$, $B$, $C$ auf $d$; | die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch $d$; |
| die Ebenen $Aa = \alpha$, $Bb = \beta$, $Cc = \gamma$; | die Punkte $\alpha a = A$, $\beta b = B$, $\gamma c = C$; |
| der Punkt $R$ auf $\alpha\beta$; | die Ebene $\varrho$ durch $AB$; |
| ein Kegelschnittbüschel in $\alpha$; | eine Kegelflächenschaar durch $A$; |
| eine Involution $Y_1 Y'_1$, $Y_2 Y'_2 \ldots$; | eine Involution $\eta_1 \eta'_1$, $\eta_2 \eta'_2 \ldots$ |

u. s. w.

Die weiter durchgeführte Parallele führt zu dem Resultate.

Zweitens kann das Problem noch auf eine andere Weise aufgefasst werden; es kann verlangt werden, eine Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, die durch acht Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt; setzt man wieder conjugirt imaginäre Punkte voraus, so lautet sie, wie folgt:

Es sind gegeben eine Gerade $e$, vier Gerade $a$, $b$, $c$, $d$, Träger von elliptischen Punktinvolutionen; eine Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, die $e$ berührt und zu der die Involutionen $a$, $b$, $c$, $d$ gehören.

Man construire, ganz wie in der vorigen Aufgabe, zwei Regelflächen des Flächenbüschels durch $a$, $b$, $c$, $d$ bestimmt; dadurch ist auch die auf $e$ ausgeschnittene Involution bekannt. Damit die Fläche des Büschels die Gerade $e$ berühre, muss sie durch einen der Doppelpunkte der

Involution gehen; man bestimme diese, jeder ist der neunte bestimmende Punkt der Oberfläche, das Problem lässt also zwei Lösungen zu, die conjugirt imaginär werden können.

Es bedarf wohl kaum der Erwägung, dass nun auch die Lösung gefunden ist des hier folgenden reciproken Problems:

Es wird gegeben eine Gerade $e$, vier Gerade $a$, $b$, $c$, $d$, Träger von elliptischen Ebeneninvolutionen; ein Ebenenbündel zweiter Ordnung zu construiren, das durch $e$ geht und zu dem die Ebeneninvolutionen $a$, $b$, $c$, $d$ gehören.

Endlich kann, anstatt einer Geraden, eine Ebene gegeben sein, welche die Fläche berühren soll, d. h., die Aufgabe kann lauten:

Es sind gegeben eine Ebene $\varepsilon$, vier Gerade $a$, $b$, $c$, $d$, Träger von elliptischen Punktinvolutionen; eine Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, welche die Ebene $\varepsilon$ berührt und zu der die Involutionen $a$, $b$, $c$, $d$ gehören.

Man construire wieder zuerst zwei Flächen des Flächenbüschels, das durch die Involutionen $a$, $b$, $c$, $d$ bestimmt ist. Dieses Flächenbüschel bestimmt in $\varepsilon$ ein Kegelschnittbüschel, das durch zwei Kegelschnitte bestimmt ist.

Zu diesem Kegelschnittbüschel gehören im Allgemeinen drei Nullkegelschnitte (Diagonalpunkte des eingeschriebenen vollständigen Vierecks des Büschels). Jeder dieser drei Punkte ist der Berührungspunkt einer Fläche zweiter Ordnung mit der Ebene; sind diese bekannt, so ist die Aufgabe auf die erste zurückgeführt. Die Construction dieser Punkte kann als bekannt angenommen werden; das Problem lässt drei Lösungen zu, von welchen zwei conjugirt imaginär werden können.

Schliesslich findet auch bei dieser Aufgabe das Princip der Reciprocität Anwendung; die Lösung in diesem Falle wird, wie in den vorigen, leicht gefunden.

Tilburg (Holland). J. Cardinaal,
Lehrer a. d. höh. Bürgerschule Willem II.

---

### V. Bemerkung zur Kegelschnitt-Theorie.

In Crelle's Journal, Bd. 5 S. 11, hat Plücker den Satz bewiesen: Sind die Dreiecke $abc$ und $a'b'c'$ in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt, so treffen sich die Geraden $aa'$, $bb'$, $cc'$ in einem Punkte $d$, und die Punkte $\alpha = (bc, bc')$, $\beta = (ca, c'a')$, $\gamma = (ab, a'b')$ liegen auf einer Geraden $D$, der Polare des Punktes $d$. Später gab Hesse ebendaselbst, Bd. 20 S. 301, den Satz: Sind $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ die drei Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits und sind $a\alpha$, $b\beta$ Paare conjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt, so sind in Bezug auf diesen

auch die Punkte $c\gamma$ einander conjugirt. Als gemeinschaftlichen Ausdruck beider Theoreme kann man das folgende betrachten: **Sucht man auf den Seiten eines Dreiecks $abc$ diejenigen Punkte $\alpha\beta\gamma$, welche in Bezug auf einen Kegelschnitt jedesmal der gegenüberliegenden Ecke conjugirt sind, so liegen $\alpha\beta\gamma$ auf einer Geraden $D$; zieht man durch die Ecken des Dreiecks diejenigen Strahlen, welche jedesmal der gegenüberliegenden Seite conjugirt sind, so erhält man drei Strahlen durch einen Punkt $d$, den Pol der Geraden $D$** (diese drei Strahlen sind die Polaren von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$). Vergl. Schröter, Kegelschnitte, II. Aufl. § 31, Reye, Geometrie der Lage, II. Aufl. I. Abth. S. 191 f.

Vielleicht ist es nicht ganz überflüssig, zu erwähnen, dass die Gleichung der Geraden $D$ leicht aufgestellt werden kann mit Hilfe der Identität

1) $$(abc)\,f(xy) = (bcx)\,f(ay) + (cax)\,f(by) + (abx)\,f(cy),$$

in welcher

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x_i y_k \text{ mit } a_{ik} = a_{ki} \text{ und } i, k = 1, 2, 3,$$
$$(abc) = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3, \quad (bcx) = \Sigma \pm b_1 c_2 x_3 \text{ u. s. w.}$$

Aus der obigen Identität folgt nämlich, indem man $y_1 y_2 y_3$ mit $a_1 a_2 a_3$ zusammenfallen lässt:

$$(abc)\,f(ax) = (bcx)\,f(aa) + (cax)\,f(ab) + (abx)\,f(ac).$$

Ist nun $f(xx) = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes und sind $a_1\, a_2\, a_3$ die Coordinaten des Punktes $a$ u. s. w., so erfüllt der Punkt $\alpha$ die Gleichungen $f(ax) = 0$ und $(bcx) = 0$, folglich auch $(cax)\,f(ab) + (abx)\,f(ac) = 0$ und schliesslich die folgende:

2) $$\frac{(bcx)}{f(bc)} + \frac{(cax)}{f(ca)} + \frac{(abx)}{f(ab)} = 0.$$

Da diese wegen ihrer Symmetrie auch für $\beta$ und $\gamma$ gelten muss, so wird erkannt, dass $\alpha\beta\gamma$ auf einer Geraden $D$ liegen, welche durch die Gleichung 2) repräsentirt wird.

Ohne die Identität 1) erhält man die Gleichung von $D$ in der Form

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0$$

sofort, wenn man $a$, $b$, $c$ zu Fundamentalpunkten macht; denn dann ist $x_1 = 0$ und $a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ für $\alpha$ u. s. w. — Nach der von Herrn Reye (a. a. O. und vorher in Crelle's Journal, Bd. 77 S. 272) eingeführten Ausdrucksweise bildet $d$ mit den Punkten $a$, $b$, $c$ ein Polviereck, ebenso $D$ mit den Geraden $bc$, $ca$, $ab$ ein Polvierseit. In der That lässt sich $f(xx)$ folgendermassen als Aggregat von vier Quadraten schreiben:

$$f(xx) = a_{23} a_{31} a_{12} \left(\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}}\right)^2 - \frac{\alpha_{23}}{a_{23}} x_1^2 - \frac{\alpha_{31}}{a_{31}} x_2^2 - \frac{\alpha_{12}}{a_{12}} x_3^2,$$

wobei $\alpha_{23} = a_{31} a_{12} - a_{11} a_{23}$, $\alpha_{31} = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{31}$, $\alpha_{12} = a_{23} a_{31} - a_{33} a_{12}$.

Werden $a$, $b$, $c$ als Fundamentalpunkte beibehalten, so ist $u_1 u_2 u_3 = 0$ die Gleichung des Dreiecks $abc$ als Ort dritter Classe (in Liniencoordinaten $u_1, u_2, u_3$), folglich

$$a_{23} u_1 + a_{31} u_2 + a_{12} u_3 = 0$$

die Gleichung des Poles $\delta$ der Geraden $D$ in Bezug auf das Dreieck, $D$ die Polare oder Harmonikale von $\delta$. Im Anschluss an Herrn Reye (Crelle's Journal, Bd. 78 S. 97) kann man aber denselben Punkt auch den Pol (die Polare erster Classe) des Kegelschnittes $f(xx) = 0$ in Bezug auf das Dreieck $abc$ (die Linie dritter Classe $u_1 u_2 u_3 = 0$) nennen. Die Linie $D$, welche die Seiten des Dreiecks $abc$ zu einem Polvierseit ergänzt, hat in Bezug auf dieses Dreieck denselben Pol $\delta$, wie der Kegelschnitt. Der Punkt $d$, welcher mit $a, b, c$ ein Polviereck bildet, hat in Bezug auf das Dreieck $abc$ (als Linie dritter Ordnung) dieselbe Polare, wie der Kegelschnitt (als Ort zweiter Classe). Ist das Dreieck $abc$ ein Tripel des Kegelschnittes, so werden $D$ und $\delta$ unbestimmt, der Kegelschnitt wird nach Reye (am eben a. O.) apolar zu dem Dreieck zu nennen sein (vergl. auch Thaer, Mathem. Ann., Bd. 14 S. 556).

Giessen, September 1881. M. Pasch.

## VI. Bemerkung über projective Punktreihen.

Liegen zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen auf einer Geraden, so kann man zu einem beliebigen Punkte $t$ dieser Geraden (welcher nicht sich selbst zugeordnet sein soll) den zugeordneten Punkt $u$, zu $u$ den zugeordneten Punkt $v$, zu $v$ den zugeordneten Punkt $w$ construiren; die Punkte $t, u, v$ sind von einander verschieden. Zu $tvu$ construire man noch den vierten harmonischen Punkt $r$, zu $rvu$ den vierten harmonischen Punkt $s$. Werden alsdann $us$ durch $vw$ getrennt, so sind die Doppelpunkte der Projectivität imaginär; werden $us$ durch $vw$ nicht getrennt, so sind die Doppelpunkte reell. Bezeichnet man nämlich das Doppelverhältniss $(tuvw)$ mit $\sigma$, so hat man:

$$(tvur) = -1, \ (rvus) = -1, \ (uvtr) = \tfrac{1}{2}, \ (uvrs) = \tfrac{1}{2},$$
$$(uvts) = (uvtr)\,(uvrs) = \tfrac{1}{4}, \ (vtus) = -3, \ (tuvs) = \tfrac{4}{3},$$
$$(vwus) = (vtus)\,(twus) = -3(1 - (tuws)) = 3\,(tuwv)\,(tuvs) - 3$$
$$= 4\,(tuwv) - 3 = \frac{4}{\sigma} - 3,$$
$$\sigma(4 - 3\sigma) = \sigma^2 . (vwus);$$

folglich ist $\sigma(4 - 3\sigma)$ im ersten Falle negativ, im zweiten positiv. Soll nun $x$ ein Doppelpunkt sein, und setzt man $(tuvx) = \xi$, so ergiebt sich für $\xi$ die quadratische Gleichung

$$\xi = (uvwx) = (uvwt)(uvtx) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\,\frac{\xi - 1}{\xi},\quad (\sigma - 1)\xi^2 - \sigma\xi + \sigma = 0$$

mit der Discriminante $\sigma(4 - 3\sigma)$.

Nennt man $\varrho$ den vierten harmonischen Punkt zu $uwv$, so ist $(uwv\varrho) = (vrus)$, also liegen die Paare $uv$, $wr$, $s\varrho$ in Involution, die Punktreihen $vwus$ und $urv\varrho$ sind projectiv:

$$(vwus) = (urv\varrho) = \frac{4}{\sigma} - 3.$$

Die Punktpaare $ur$ und $v\varrho$ bestimmen eine Involution, welche nach einem Satze von Herrn Schröter (Crelle's Journal, Bd. 77 S. 120) dieselben Doppelpunkte hat, wie die gegebene Projectivität. Folglich sind die Doppelpunkte imaginär oder reell, je nachdem $ur$ durch $v\varrho$ (und mithin $vw$ durch $us$) getrennt werden oder nicht. Dadurch wird das obige Criterium bestätigt, welches sich auf die Lage von $w$ bei gegebenen $t$, $u$, $v$ bezieht.

Giessen, September 1881. M. Pasch.

---

### VII. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppelt periodischen Functionen betreffend.

Wenn $f(z)$ eine doppelt periodische Function ist mit den Perioden $\omega$ und $\omega'$, so leitet man bekanntlich aus dem Integral $\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$, welches man über die Umgrenzung eines elementaren Periodenparallelogramms ausdehnt, den Satz her, dass die Anzahl der Pole mit der Anzahl der Nullpunkte in einem Elementarparallelogramm übereinstimmt. In ähnlicher Form lässt sich das Theorem von Liouville, dass sich die Summe der Pole von der Summe der Nullpunkte in einem Elementarparallelogramm um eine vollständige Periode unterscheidet, aus dem Integral $\int z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$, ausgedehnt über die Umgrenzung eines solchen Parallelogramms, deduciren. Man erkennt sofort, indem man das Integral auf die Elementarintegrale um die Pole der Function $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ zusammenzieht, dass dasselbe den Werth $2\pi i(\Sigma a - \Sigma b)$ erhält, worin $\Sigma a$ die Summe der Nullpunkte und $\Sigma b$ die der Pole bezeichnet. Werthet man dasselbe in anderer Art aus, so wird man auf einen Ausdruck von der Form $2\pi i(n\omega + n'\omega')$ geführt, woraus das Liouville'sche Theorem hervorgeht.

In der That, fasst man als Ecken eines elementaren Periodenparallelogramms die Werthe $z_0$, $z_0 + \omega$, $z_0 + \omega + \omega'$, $z_0 + \omega'$ auf und führt die Integration nach der Umlaufsrichtung aus, welche jene Folge der Ecken kennzeichnet, so zerlegt sich die Integration in eine Summe von vier

Integralen, von denen die Summe über die parallelen Gegenseiten bezüglich zu einem Vielfachen von $2\pi i\omega$ und $2\pi i\omega'$ leiten. Denn es ist

$$\int\limits_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'} \frac{z.f'(z)}{f(z)}\,dz = -\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega} (z+\omega')\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$$= -\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega} z.\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \omega'\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega} d\,lg f(z).$$

Der erste dieser Terme zerstört sich gegen das von $z_0$ bis $z_0+\omega$ zu erstreckende Integral, der zweite ergiebt in Rücksicht darauf, dass $\omega$ eine Periode für $f(z)$ ist, ein Vielfaches von $2\pi i\omega'$. In derselben Weise folgert man

$$\int\limits_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'} z.\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega'} (z+\omega)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$$= \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega'} z.\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \omega\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega'} d\,lg f(z).$$

Das erste dieser beiden Integrale vernichtet sich mit dem von $z_0+\omega'$ bis $z_0$ auszudehnenden Integral, das zweite aber führt, da $\omega'$ eine Periode für $f(z)$ bedeutet, zu einem Vielfachen von $2\pi i\omega$. Es ist mithin das Integral über die Umgrenzung eines Elementarparallelogramms in der Form $2\pi i(n\omega + n'\omega')$ darstellbar, und man schliesst

$$\Sigma a - \Sigma b = n\omega + n'\omega'.$$

Ad. Schumann.

---

### VIII. Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks.

In dem sphärischen Dreieck $ABC$, dessen Seiten und Winkel 180° nicht übersteigen, trage man auf den Schenkeln von $\gamma$ die halbe Summe der einschliessenden Seiten ab: $CE = CF = \frac{a+b}{2}$, so dass $C$ auf $BC$ und $F$ auf $AC$ liegt. Dann lege man durch $E$ und $F$ den Hauptkreis, welcher $AB$ in $D$ schneidet, so ist $AF = BE = \frac{a-b}{2}$, $\angle CFD = CED$, $\angle ADF = BDE$ und

$$\frac{\sin AD}{\sin AF} = \frac{\sin AFD}{\sin ADF}, \quad \frac{\sin DB}{\sin BE} = \frac{\sin BED}{\sin BDE}.$$

Daher ist

$$\sin AD = \sin DB \text{ und folglich } AD = DB, \text{ da } AB < \pi \text{ ist.}$$

Der Hauptkreis $EF$, auf welchem die Mitte von $AB$ liegt, ist allein durch $a+b$ und $\gamma$ bestimmt. Daher wird der Satz gewonnen:

Wenn in einem sphärischen Dreieck die Summe zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel constant bleibt, so liegt die Mitte der dritten Seite auf einem bestimmten Hauptkreise, nämlich auf der Basis des gleichschenkligen Dreiecks mit dem Schenkel $\frac{a+b}{2}$ und dem Winkel $\gamma$ an der Spitze.

Der analoge Satz für das plane Dreieck lautet bekanntlich ebenso, nur tritt das Wort „Gerade" an die Stelle von „Hauptkreis".*

Man lege den Hauptkreis durch $C$ und $D$, so ist $CD = t_c$ die zur Seite $AB$ gehörige Transversale. Man verlängere $CD$ bis $G$, so dass $CG = 2t_c$ wird, und lege den Hauptkreis durch $B$ und $G$, so ist $BG = AC = b$, $\angle DBG = \alpha$, also $\angle CBG = \alpha + \beta$, ferner $\angle CGB = ACD$, also $\angle BCG + CGB = \gamma$. Daher folgt aus den Dreiecken $BCG$ und $ABC$ nach der ersten der Gauss'schen Formeln

$$cos\, t_c = \frac{cos \frac{1}{2}(a+b) . sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{cos \frac{1}{2}\gamma}, \quad cos \tfrac{1}{2} c = \frac{cos \frac{1}{2}(a+b) . sin \frac{1}{2}\gamma}{cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen

$$\frac{cos\, t_c}{cos \frac{1}{2} c} = \frac{sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) . cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{sin \frac{1}{2}\gamma . cos \frac{1}{2}\gamma} \quad \text{oder} \quad cos\, t_c = cos \tfrac{1}{2} c . \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\, \gamma}.$$

Aus dieser Formel gewinnt man sofort den Satz:

In allen Dreiecken, in welchen $\alpha + \beta = \gamma$ ist, ist $t_c = \frac{1}{2} c$;

und umgekehrt:

Beschreibt man um die Mitte von $c$ den Kreis mit dem Durchmesser $c$, so nimmt derselbe die Spitzen aller Dreiecke auf mit der Basis $c$, in welchen $\alpha + \beta = \gamma$ ist.**

Beide Sätze gelten wörtlich auch für das plane Dreieck. Interessant ist, dass das plane rechtwinklige Dreieck nicht dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck entspricht, sondern dem sphärischen Dreieck, in welchem $\alpha + \beta = \gamma$ ist.

Ausserdem folgen aus den für die Transversalen gewonnenen Formeln

$$cos\, t_a = cos \tfrac{1}{2} a . \frac{sin(\beta+\gamma)}{sin\, \alpha}, \quad cos\, t_b = cos \tfrac{1}{2} b . \frac{sin(\alpha+\gamma)}{sin\, \beta},$$
$$cos\, t_c = cos \tfrac{1}{2} c . \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\, \gamma}$$

ohne jede Rechnung die beiden Sätze:

In allen sphärischen Dreiecken, in welchen $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ist, ist jede Transversale das Supplement der halben zugehörigen Seite;

und umgekehrt:

Wenn in einem sphärischen Dreieck eine Transversale das Supplement der halben zugehörigen Seite ist, so ist die Winkelsumme gleich

---

* Steiner, Crelle's Journ. XXIV, S. 191.

** Steiner, Crelle's Journ. II, S. 47.

$2\pi$ und auch die anderen beiden Transversalen ergänzen ihre halben zugehörigen Seiten zu $\pi$.

Nicht minder einfach ist der rein geometrische Beweis dieser letzten Sätze. Zeichnet man zu dem Hauptdreieck $ABC$, in welchem $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ ist, das Nebendreieck $ABC'$, indem man $AC$ und $BC$ verlängert, bis sie sich in $C'$ schneiden, so ist in demselben der Winkel an der Spitze $C'$ gleich der Summe der Basiswinkel. Daher $C'D=\frac{1}{2}c$ und folglich $CD=\pi-\frac{1}{2}c$. Dasselbe gilt von den anderen beiden Nebendreiecken und den anderen beiden Transversalen des Hauptdreiecks $ABC$. Ebenso beweist man die Umkehrung mit Hilfe der Nebendreiecke.

Bemerkenswerth dürfte ferner die Eigenschaft dieser Dreiecke sein, dass der sphärische Abstand je zweier Seitenmitten den constanten Werth $\frac{1}{2}\pi$ hat. Auch die Umkehrung gilt:

Wenn die Mittelpunkte zweier Seiten um einen Quadranten von einander entfernt sind, so beträgt die Winkelsumme $2\pi$ und jede Transversale ist das Supplement der halben zugehörigen Seite.

Eine Specialisirung für die Ebene gestatten diese Sätze natürlich nicht.

Vorstehend wurde die Transversale durch die zugehörige Seite, die Summe der anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel in einer zur logarithmischen Rechnung geeigneten Form gegeben. Sonst findet man die Transversalen durch die drei Seiten ausgedrückt.* Auch diese Formeln erhält man aus den Dreiecken $BCG$ und $ABC$. Die Gauss'schen Formeln geben

$$\cos t_c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b).\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},\quad \cos\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b).\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

und durch Multiplication dieser beiden Gleichungen

$$\cos t_c.\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b).\cos\frac{1}{2}(a-b).$$

Das planimetrische Analogon ist bekanntlich

$$t^2_c+(\tfrac{1}{2}c)^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

---

* Vergl. Günther, Hoffm. Ztschr. XI, S. 422.

Saarbrücken, 16. October 1881. P. v. Schaewen.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate.

Von

FRIEDRICH HULTSCH

in Dresden.

Hierzu Taf. I Fig. 13.

In der ganzen griechischen Literatur giebt es wohl kaum eine zweite Stelle, die so räthselhaft und vieldeutig uns entgegentritt, als die Darstellung des die Heirathen regelnden *ἀριθμὸς γεωμετρικός* in Platon's VIII. Buche vom Staate (p. 546 B. C).

Eine Anregung, dieser Frage von Neuem näher zu treten, während sie mir früher als unlösbar erschienen war[1]), bot eine jüngst erschienene Schrift des Herrn Prof. J. Dupuis in St. Germain-en-Laye[2]), welche der Verfasser nebst freundlichem Geleitschreiben mir zusendete.

Da diese Schrift, was zunächst hervorzuheben ist, eine sorgfältige und übersichtliche Darstellung der bisher versuchten Lösungen enthält[3]), so wird im Folgenden, soweit die Meinungen anderer Forscher zu berücksichtigen sind, meist auf diese treffliche Vorarbeit Bezug genommen und dadurch die Untersuchung möglichst abgekürzt werden.

Mit Recht weisen einige der früheren Erklärer, unter ihnen besonders Schleiermacher und Cousin, darauf hin, dass es vor Allem einer genauen

---

1) Jahrbücher für classische Philologie, herausgeg. von A. Fleckeisen (I. Abth. der Neuen Jahrb. f. Philologie und Pädagogik), 1873 S. 498.

2) *Le nombre géometrique de Platon, interprétation nouvelle par J. Dupuis,* Paris 1881.

3) Zu der Literatur, welche H. Martin, *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon,* in *Revue archéologique, XIII<sup></sup>e année, première partie,* 1856, p. 257 flgg. nachgewiesen hat, sind seitdem noch gekommen: E. Zeller, Die Philosophie der Griechen, 2. Aufl., II, 1 S. 545 flgg.; J. Hunziker in *Platonis opera, Parisiis, editore Firmin-Didot,* 1873, vol. III p. 109; P. Tannery, *Le nombre nuptial dans Platon* in *Revue philosophique de la France et de l'étranger par Ribot, première année* (1876), I p. 170—188; B. Rothlauf, Die Mathematik zu Platon's Zeiten, Jena 1878, S. 29 flg.

Kenntniss des mathematischen Sprachgebrauchs, soweit er zu Platon's Zeit ausgebildet war, bedürfe, um die durch den Schriftsteller selbst mit einem geheimnissvollen Dunkel umhüllte Stelle verstehen zu lernen.

In dieser Hinsicht sind in den jüngsten Zeiten grosse Fortschritte gemacht und dadurch die Lösung vorbereitet worden.

Wie der Text Platon's schon auf den ersten Blick zeigt, ist seine geometrische Zahl eine vielfältig zusammengesetzte. Fragen wir, ob die Gesammtzahl als Summe oder als Product aufzufassen sei, so ergiebt wiederum der Wortlaut, so dunkel auch Einzelnes bleiben mag, im Ganzen deutlich, dass der Schriftsteller ein Product vieler Factoren gemeint hat.

Dieses Product muss ein numerisch bedeutendes sein, da mehrere Male der Factor 100 vorkommt.

Aus vielen verschiedenen Factoren besteht die Gesammtzahl; es wird also zu suchen sein, welche von diesen Factoren zunächst mit Wahrscheinlichkeit sich ermitteln lassen.

Nun hat es ein günstiges Geschick gefügt, dass gerade der Anfang des Platonischen Textes, der ebenso viele Räthsel, als Worte zu bieten schien, auch zuerst mit voller Evidenz hat gedeutet werden können.

*Ἀνθρωπείῳ (γένει περίοδός ἐστιν ἀριθμός) ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις, δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποστάσεις τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν*, sagt Platon und meint damit die nebenstehende zwiefache Zahlengruppirung, deren jede eine geometrische Reihe darstellt[4]).

1
2 3
4 9
8 27

Die kleinste Zahl, in welcher alle diese Einzelzahlen als Factoren enthalten sind, ist $2^3.3^3 = 216$. Die Factoren sind die Primzahlen 2 und 3 und ausserdem Potenzen dieser Zahlen; die zweiten, bez. dritten Wurzeln der letzteren sind also rational (*ῥητά*); in beiden Reihen ist je eine mittlere Zahl der Factor der nächstfolgenden, dergestalt, dass die Verhältnisszahl der ganzen Reihe den andern Factor abgiebt, und ebendieselbe mittlere Zahl ist das Product der Verhältnisszahl mit der in der Reihe vorhergehenden Zahl (*δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι*). Beide Reihen können sowohl als steigende, wie als fallende betrachtet werden (*αὐξόντων καὶ φθινόντων*); endlich zwischen je zwei Gliedern sind die Intervalle, mag man in der Reihe hinauf- oder hinabsteigen, gleich, die Verhältnisse aber ungleich (*ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων*), nämlich beispielsweise das Intervall von 4 zu 8 (aufsteigend) und von 8 zu 4 (absteigend) $= 4$, aber das Verhältniss $4:8 = \frac{1}{2}$ und $8:4 = 2$.

4) Vergl. Dupuis S. 23 flgg.

Alle diese Beziehungen werden von Herrn Dupuis, zum Theil nach dem Vorgange Früherer, so zweifellos dargestellt, dass ich darüber nur zu referiren hatte. Ausserdem möge aber noch eine Uebersetzung dieses ersten Textabschnittes folgen, welche ebenso der jetzt üblichen mathematischen Ausdrücke sich bedient, wie Platon dem mathematischen Sprachgebrauche seiner Zeit folgte. Zwischen Uebersetzung und Original findet nur der Unterschied statt, dass Platon seine *termini technici* in kunstvoll verschlungener Construction und in grösster Kürze, deshalb aber auch schwer verständlich giebt, während die moderne Uebersetzung die Verschlingungen auflösen und die Kürze, soweit sie bis zur Undeutlichkeit geht, beseitigen muss.

„Für das menschlich Erzeugte ist als Periode eine Zahl massgebend, in welcher zunächst als Factoren enthalten sind die Glieder der beiden (geometrischen) Reihen 1 2 4 8 und 1 3 9 27, welche Glieder (gemäss der Natur der geometrischen Reihe) derartig aufsteigen, dass jedes (innere) Glied sowohl das Product des vorhergehenden Gliedes mit der Verhältnisszahl der Reihe, als den Quotient des nächstfolgenden Gliedes, dividirt durch dieselbe Verhältnisszahl, darstellt. Jede dieser beiden Reihen, bestehend aus vier Gliedern und drei Differenzen, kann sowohl als zunehmende, wie als abnehmende betrachtet werden, so zwar, dass in beiden Fällen die Differenzen zwischen je zwei benachbarten Gliedern gleich sind, während die Proportionen, je nachdem die Reihe steigt oder fällt, ungleich (nämlich reciprok zu einander) sind. Die erwähnten Factoren sind sämmtlich rational und, soweit nicht Primzahlen, ihrerseits aus gleichen Factoren zusammengesetzt, so dass ihre zweite, bez. dritte Wurzel ebenfalls eine rationale Zahl ist."

Platon sagt ἀριθμός, ἐν ᾧ u. s. w.; die erwähnten Factoren sind also in der Gesammtzahl (περίοδος) jedenfalls enthalten, aber es ist nicht gesagt, ob die Gesammtzahl nur diese Factoren oder ausserdem noch andere umfasst. Würde Platon auf die oben angeführten Worte sich beschränkt haben, so läge gewiss die Vermuthung am nächsten, dass die gesuchte Zahl nur die erwähnten Factoren und ausserdem keine anderen enthalte, mithin = 216 sei. Allein aus den weiter folgenden Worten haben alle neueren Erklärer übereinstimmend geschlossen[5]), dass die Zahl grösser, als 216 sein muss. Wir haben also die noch übrigen in der Gesammtzahl enthaltenen Factoren gemäss den Worten Platon's zu suchen.

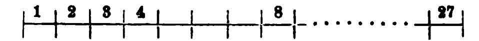
Die beiden jüngsten Erklärer, die Herren Tannery und Dupuis, stimmen darin überein, dass sie 100 als Factor anerkennen, und zwar nimmt ersterer als Gesammtzahl 2700, letzterer 21600 an. Allein wenn wir die im Texte folgenden Worte

5) Vergl. die Uebersicht bei Dupuis S. 47.

ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκη δέ[6]), ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυεῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. ξύμπας δὲ οὗτος ἀριθμός u. s. w.,

betrachten, mag auch Einzelnes noch so dunkel sein, soviel ist doch zunächst klar, dass keine der beiden ebengenannten Zahlen **allen** von **Platon** ausgesprochenen Bedingungen entspricht. Die Gesammtzahl soll quadratisch sein, was weder 2700, noch 21600 ist; sie soll auch zur Zahl 7 in einer gewissen, vor der Hand noch geheimnissvollen Beziehung stehen. Ferner erkennen wir, dass **Platon** eine Zahl gemeint haben muss, welche sowohl als Quadrat, d. i. als Product gleicher Factoren, wie als Rectangel, d. i. als Product ungleicher Factoren, aufgefasst werden kann. Verfolgen wir diese Spur weiter, so finden wir vielleicht auch die ursprüngliche Fassung der Worte τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκη δέ, in welchen offenbar ein Fehler, sei es auch nur ein geringer, enthalten ist. Doch verschieben wir diese Verbesserung auf später und versuchen es zunächst mit der Deutung, welche sowohl der Gegensatz zu ἴσην ἰσάκις, als der Ausdruck προμήκης, *oblongus*, an die Hand geben, indem wir zunächst die von **Platon** angedeutete Quadratzahl, sodann die ihr gleiche Rechteckzahl ermitteln.

Es ist zunächst nöthig, Wort für Wort zu verfolgen, was **Platon** sagt. Das einleitende ὧν ist partitiver Genitiv in dem Sinne, dass unter den vorhergenannten αὐξήσεις, d. i. Gliedern zweier geometrischen Reihen, auch diejenigen Zahlen sich befinden, welche durch ἐπίτριτος πυθμήν bezeichnet sind. Was dies bedeute, ist bereits von Früheren ermittelt und dann durch **Pappos'** Zeugniss[7]) ausser allen Zweifel gesetzt worden. Die πυθμένες sind die kleinsten ganzen Zahlen, welche ein gegebenes Verhältniss ausdrücken. Im ἐπίτριτος λόγος oder, wie zu **Platon's** Zeit noch gesagt wurde, in der ἐπίτριτος ἁρμονία stehen zu einander die Zahlen $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, 3:4, 6:8, 9:12 u. s. w., die πυθμένες aller dieser Verhältnisse sind aber nur 3 und 4, von **Platon** zusammengefasst als ἐπίτριτος πυθμήν. Die Ableitung aus den vorhergenannten geometrischen Reihen ergab sich von selbst, wenn man beide Reihen zusammen auf einer Strecke etwa folgendermassen eintrug:




6) Die Mehrzahl der Handschriften bieten προμήκει. Der Accusativ προμήκη, welcher dem vorhergehenden ἰσομήκη passend entspricht, der aber auch das vorhergehende τῇ in eine vereinzelte und schwer erklärliche Stellung drängt, steht in der besten Handschrift *A* (nach der Bezeichnung J. **Becker's**), ausserdem noch in *Π*.

7) III p. 80, 10 nebst Anm. zu p. 81 und Index unter πυθμήν.

Was nun weiter zu thun ist, lehren die nächsten Worte πεμπάδι συζυγείς, welche nichts Anderes bedeuten können, als „zur Zahl 5 hinzugefügt". Es sind 3 4 5 zu addiren und die Zahl mit 3 zu multipliciren (τρὶς αὐξηθείς). So sind wir ganz sicher bis zur Zahl 36 vorgeschritten.

Einzuschieben ist der Hinweis, dass die Zahlen 3 4 5 das sogenannte Pythagoräische Dreieck darstellen, welches rechtwinklig ist und nur rationale Seiten hat, da $3^2+4^2=5^2$ ist[8]).

Die Zahl 36, sagt Platon nun weiter, stellt aus sich heraus zwei Verhältnisse dar (δύο ἁρμονίας παρέχεται), ein quadratisches und ein oblonges. Wenn nun blos diese Worte, die wir eben angedeutet haben, bei Platon ständen, so läge die Auffassung nahe, dass die Zahl 36 es sei, welche sowohl als Quadrat $=6^2$, wie als Product ungleicher Factoren, z. B. 4.9, genommen werden könnte. Allein da Platon bei Erklärung derjenigen Zahl, welche, nach besonderen Verhältnissen, aus 36 zu entwickeln ist, mehrmals die Zahl 100 bringt, ja zuletzt ganz sicher $3^3.100$ als Element der darzustellenden Zahl setzt, so muss er einen weit grösseren Betrag als 36 meinen.

Die Zahl 36, heisst es im Text, entwickelt aus sich heraus zunächst das Verhältniss „gleich mal gleich, hundert ebensovielemal". Offenbar ein dunkler und mehrdeutiger Ausdruck; aber wir werden vielleicht der richtigen Erklärung uns nähern, wenn wir zunächst feststellen, wieviele Deutungen in Betracht kommen können. Schwerlich mehr, als folgende fünf: Die zu entwickelnde Zahl ist entweder $6^2.100$ oder $36^2.100$ oder $36^2.100^2$ oder (was jedoch von vornherein minder wahrscheinlich ist) $6^2+100^2$ oder $36^2+100^2$.

Nun soll dieselbe noch zu suchende Zahl, wie der folgende Text lehrt, auch als Product ungleicher Factoren aufgefasst werden. Unter diesen Factoren steht sicher, wie noch gezeigt werden wird, einerseits 700, andererseits 2700, dergestalt, dass die zu suchende Zahl grösser, als das Product dieser beiden Zahlen sein muss. Wir erkennen also sofort, dass unter den vorhingesetzten möglichen Zahlen nur das Quadrat $36^2.100^2=3600^2=12\,960\,000$ von Platon gemeint sein kann.

Es bedeuten also die griechischen Worte ἁρμονίας παρέχεται ... τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, zu denen als Subject die Zahl 36 zu denken ist, dasselbe, was wir $\alpha^2 100^2$ schreiben würden, wobei $\alpha$ die vorher berechnete Zahl (36) bezeichnet, oder mit anderen Worten, Platon hat sich die Zahlen 36 36 100 100 neben einander geschrieben gedacht und aus diesen als Factoren das Product gebildet.

8) Vergl. H. Martin, *Le nombre nuptial* (oben Anm. 3), S. 281; Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, S. 80; Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I S. 153 vergl. mit S. 135.

Dass nun ein Product, und insbesondere ein Quadrat, als *ἁρμονία* bezeichnet wird, darf nicht auffallen. Die Quadratzahl wird, wie Platon von vornherein ausspricht, aufgefasst unter dem Gesichtspunkte des gegenseitigen Verhältnisses der Seiten. Diese Seiten stehen, wie die späteren Mathematiker sagen, in dem *λόγος ἴσου πρὸς ἴσον* oder *ἰσότητος λόγος*, wofür Platon in diesem besondern Falle die Formel *ἁρμονία ἴση ἰσάκις ἑκατὸν τοσαυτάκις* hat, d. i. die Seiten der aus der Grundzahl 36 entwickelten grösseren Quadratzahl sind jede $=3600$ und verhalten sich wie $1:1$. Weiter ist zu beachten, dass auch der eigentlichen Bedeutung von *ἁρμονία, scil. γεωμετρική*, von Platon selbst Rechnung getragen wird. Denn das ebenbezeichnete Quadrat wird gleichgesetzt einem Rectangel. Nennen wir nun die Seite des Quadrates $a$, die Basis und Höhe des Rectangels $b$ und $c$, so erhalten wir, genau im Sinne Platon's, die Gleichung $a^2=bc$, und mithin die geometrische Harmonie $a:b=c:a$ (oder $a:c=b:a$).

Sind wir aber einmal so weit gekommen, so ist auch der Schluss der Stelle, welcher ersichtlich die grössten Schwierigkeiten enthält, der Deutung zugänglich. Vorbehalten müssen wir uns einstweilen noch die Erklärung, vielleicht auch Verbesserung der Worte *ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκη δέ*, aus denen wir, wie schon bemerkt, zunächst nur das Eine entnehmen, dass im Folgenden eine der vorhergehenden Zahl gleiche Rechteckszahl gemeint sein müsse, dargestellt als Verhältniss, beziehungsweise als Product der Seiten.

Diese *ἁρμονία προμήκης* muss also aus zwei einander ungleichen Factoren bestehen[9]). Im Texte sind diese Factoren bezeichnet durch die Worte: *ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυεῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος.*

Beginnen wir mit dem Letzten, weil es das Deutlichste ist. Hundert Würfel der *τριάς* bezeichnen doch wohl nichts Anderes, als die Zahl $100 . 3^3$. So verstehen es die meisten Erklärer. Anderer Meinung ist Herr Dupuis, und zwar sind seine Argumente so beachtlich, dass wir sie nicht übergehen dürfen. *Τριάς*, so sagt er, ist hier nicht die Zahl 3, sondern eine Gruppe von drei Zahlen. Zunächst ist dagegen einzuwenden, dass an der vorliegenden Stelle zweimal *πεμπάς* für die Zahl 5 gesetzt ist, also wohl auch *τριάς* die entsprechende Bedeutung haben muss. Will man aber doch annehmen, Platon habe in einem und demselben Satze *τριάς* in anderem Sinne gebraucht, als die mit gleicher Ableitungssilbe gebildete Form *πεμπάς*, so ist der Beleg für *τριάς* in dem

9) Es ist hier der Ort, auf den Unterschied von *ἁρμονία ἑτερομήκης* und *προμήκης* hinzuweisen, welchen Tannery S. 180 flg. (vergl. oben Anm. 3) annimmt. Nach meiner Erklärung der geometrischen Zahl reducirt sich die *ἁρμονία προμήκης* derselben auf das Verhältniss $7:27=1:\frac{27}{7}$, entspricht also der von Tannery aufgestellten Voraussetzung.

Sinne von „Gruppe dreier Zahlen oder dreier Elemente" bei Pappos VII p. 646 (vergl. auch vol. III p. 1257) zu finden. Nun deutet Herr Dupuis die Formel κύβος τριάδος als Summe der Kuben einer Dreizahl, nämlich $3^3+4^3+5^3$, welche Summe gleich $6^3=216$ ist. Platon habe also damit diese merkwürdige Gleichung bezeichnet, welche, gemäss der natürlichen Zahlenreihe, im Gebiete der Kuben das Analogon darstellt zur Gleichung des Pythagoräischen Dreiecks $3^2+4^2=5^2$. Auch liess sich noch ein anderes Argument für diese bestechende Combination anführen. Wenn man nämlich, wie Platon vorschreibt, die gefundene Zahl mit 100 multiplicirt und ferner, wie Herr Dupuis meint, dieses Product für die gesuchte geometrische Zahl hält und endlich, wie ich als Hypothese hinzufüge, 21600 Tage ansetzt, so liesse dieser Betrag, welcher in abgerundeter Zahl gleich 60 Jahren ist (unten Anm. 18), vielleicht sich ansehen als das Maximum, und seine Hälfte als das Minimum des Alters der zu Verheirathenden, insofern man die Jahre des männlichen und des weiblichen Theiles summirte. Anfangend also von dem Minimum von etwa 18 Jahren für den Jüngling und 12 Jahren für die Jungfrau[10]), konnte man sich denken einen Zeitraum bis zu der Gruppe $a+b=60$ (z. B. $35+25$), innerhalb welcher Altersstufen die Heirathen passend geschlossen werden. Ja, man konnte weiter combiniren, dass innerhalb dieser Grenzen in jedem einzelnen Falle wiederum diejenigen Tage für die Vermählung ausgewählt werden sollten, an welchen das Alter von Jüngling und Jungfrau in einer Summe von Tagen sich bezifferte, welche keine anderen Factoren, als die der Zahl 21600, also nur Vielfache von 2, 3 und 5 enthielt.

Allein allen diesen Vermuthungen steht zunächst der bereits oben (S. 44) erhobene Einwand entgegen, dass die Zahl $6^3.10^2$ durchaus nicht allen von Platon angedeuteten Bestimmungen entspricht, besonders auch, dass sie keine Quadratzahl ist. Hierzu kommt ein gewichtiges Bedenken gegen die von Herrn Dupuis vorgeschlagene Deutung von κύβος τριάδος. Denn etwas Anderes ist es, τριάς als Gruppe von drei Zahlen zu fassen, was, wie gesagt, der Sprachgebrauch gestattet; etwas Anderes wieder, zu sagen: der κύβος τριάδος sei die Summe der Kuben der Zahlen 3, 4 und 5. Das ist nach dem Sprachgebrauche griechischer Mathematiker, soweit er bis jetzt bekannt ist, wohl nicht zulässig.

Es möge also dabei sein Bewenden haben, dass der κύβος τριάδος, wie der schlichte Wortlaut besagt, als $3^3$ gedeutet werde. Das Hundertfache hiervon (ἑκατὸν κύβοι τριάδος) stellt einen Factor oder, sagen wir

10) Dieses durch Zahlencombination gesetzte Minimum würde wohl zu unterscheiden sein von dem üblichen Alter der Verheiratheten, gerade wie das Minimum der 216 Tage für die lebensfähige Entwickelung des Fötus (unten S. 54) merklich abweicht von der thatsächlichen und gewöhnlichen Zeit zwischen Empfängniss und Geburt.

vorsichtiger, ein Element der Rechteckszahl dar, welche wir suchen. Ein anderes Element ist zu Anfang der zuletzt citirten Stelle deutlich genug bezeichnet, so verschlungen und dunkel auch der Wortlaut erscheinen mag. „Hundert Zahlen von den rationalen Diametern der Fünf, jeder weniger eins“ sind aufzubauen aus dem Quadrat, dessen Seite fünf Längeneinheiten hat. Die Diagonale dieses Quadrats (das bedeutet *διάμετρος*) ist $=\sqrt{50}$, d. i. die Seite eines Quadrats von 50 Flächeneinheiten. Bildet man aber statt des Quadrats von 50 ein solches von $50-1$ Flächeneinheiten, so ist die Seite dieses letzteren Quadrats $=7$, also rational, und zugleich um ein Unmerkliches kleiner, als die Diagonale des Quadrats über fünf[11]).

Wir haben also einerseits die Zahl 700, andererseits 2700 als die Elemente ermittelt, aus denen die gesuchte Zahl gebildet werden söll. Zwischen 700 und 2700 steht im Text noch *ἀρρήτων δὲ δυεῖν*, welche Worte sicherlich von *ἀπό* abhängen. Also ausser 700 und 2700 sind noch zwei irrationale Zahlen massgebend für den gesuchten Werth. Sind diese beiden unbekannten Zahlen, die wir $x$ und $y$ nennen wollen, auch Factoren, oder soll etwa die eine zu 700, die andere zu 2700 als Summand hinzutreten? An sich wäre ja der letztere Fall nicht unwahrscheinlich; allein dann würde $(700+x)(2700+y)$, d. i. die gesuchte Gesammtzahl irrational sein, was der Voraussetzung Platon's offenbar widerspricht. Es bleibt also nur übrig, dass die irrationalen $x$ und $y$ nur als Factoren, und zwar als solche, welche eine Rationalzahl ergeben, anzusehen sind.

Wir kehren nun zum Ueberblicke über die ganze Stelle zurück. Aus 36 heraus war die Quadratzahl $3600^2$ gebildet worden. Diese selbige Zahl sollte anderweit angesehen werden als Rechteckszahl, mithin in zwei ungleiche Factoren zerlegt werden. Ermittelt haben wir bisher die Factoren 700 und 2700 und dazwischen die irrationalen $x$ und $y$, welche letztere multiplicirt eine Rationalzahl ergeben sollen. Nach den Regeln

11) Vergl. H. Martin, *Le nombre nuptial* (oben Anm. 3), p. 275, 281 flg.; Rothlauf, Die Mathematik zu Platon's Zeiten, S. 30; Cantor, Vorlesungen I, S. 191. Nach der Anschauung der Alten ist erforderlich, dass alle Darstellungen der Art, wie die oben angegebene, auch leicht construirbar seien. Errichten wir (Fig. 18) über der Geraden $AB=5$ Längeneinheiten sowohl das rechtwinklige Dreieck $ABC$ mit der Kathete $CB=AB$, als auch den Halbkreis $ADB$, und ziehen von $D$, dem Schnittpunkte des Halbkreises und der Geraden $AC$, die Gerade $DB$, so ist $AD+DB=AC$, d. i. gleich der Diagonale des Quadrats über $5=\sqrt{50}$. Trägt man ferner von $A$ aus in den Halbkreis die Sehne $AE=\frac{4}{5}AB$ ein und zieht $EB$, so ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze $AE+EB=7$. Verlängert man endlich $AE$ und macht $EF=EB$, so ist $AF$ die Seite des Quadrats, welches um eine Flächeneinheit kleiner ist, als das Quadrat über $AC$. Dass 5 und 7 diejenigen Zahlen sind, aus welchen unter den obigen Voraussetzungen der kleinste Werth der Differenz $AC-AF$, der möglich ist, sich ableitet, wird von Martin p. 275, 282 nachgewiesen.

elementarster Arithmetik ist nun $xy = \frac{48}{7}$. Also ist wohl $x = y$, mithin $= \sqrt{\frac{48}{7}}$ zu setzen, und die Gesammtzahl $3600^2$ ist zerlegt in die ungleichen Factoren $700\sqrt{\frac{48}{7}}$ und $2700\sqrt{\frac{48}{7}}$.

Das wäre also das theilweise auf „unsagbaren" Zahlen beruhende Rechteck, welches dem Quadrat $3600^2$ gleich ist. Zunächst sind diese Zahlen noch vom geometrischen Standpunkte aus, und zwar nach der Weise der alten Mathematik zu betrachten. Ein Product aus irgendwelchen zwei Factoren ist, sowie es als Product gesprochen oder geschrieben wird, anzusehen als ein Rechteck. Natürlich aber entging es den Pythagoräern nicht, dass dieselbe Zahl, welche eben als Product oder Rechteck ausgesprochen war, auch als Längenzahl gelten könne. 4 bezeichnet sowohl das Quadrat über 2, als die Längenzahl, welche die eine Kathete des Pythagoräischen Dreiecks bildet. Aber will ich die letztere Zahl bezeichnen, so muss ich stets 4 und darf niemals $2^2$ sagen. Wenn also Platon an unserer Stelle, ohne Zweifel nach Pythagoräischer Lehre, die eine Seite seines Rechtecks bezeichnen musste mit einer Formel, die wir kurz als $700\sqrt{\frac{48}{7}}$ darstellen, und entsprechend die andere Seite mit der Formel $2700\sqrt{\frac{48}{7}}$, so war dies ein ἄῤῥητον, d. i. etwas Unaussprechbares, weil weder die eine, noch die andere Seite als Längenzahl sich ausdrücken liess[12]).

Hiermit sind wir also eingetreten in das Gebiet des Geheimnissvollen, aber wir brauchen nicht zu fürchten, in einem Labyrinth uns zu verlieren. Halten wir doch den sichern Faden bereits in unserer Hand, dem wir nur zu folgen brauchen, um zu erkennen, dass Alles, was die Pythagoräer noch weiter nach dieser Richtung hin aufbauten, nicht mehr Wissenschaft, sondern nur Deutelei und Geheimnisskrämerei war.

Wir haben bisher unterlassen, die nun ermittelte Gesammtzahl $3600^2$ auf ihre einfachsten Factoren zurückzuführen. Es sind $2^8 . 3^4 . 5^4$; diese aber haben wir noch etwas anders zu gruppiren, nämlich $3^4 . 4^4 . 5^4$. Es war also zunächst ein Gedankengang fortgesetzt, zu welchem das Pythagoräische Dreieck den Anlass gab. Gehen wir aus von den Zahlen 3 4 5, so können wir geometrisch darstellen nicht nur die Summe der einfachen Zahlen, sondern auch die Summe der Quadrate von 3 und 4, d. i. $5^2$. Weiter hatte sich gefunden, dass auch die Summe der Kuben von 3, 4 und 5 eine darstellbare geometrische Grösse, nämlich der Kubus von 6 ist. Sollten vielleicht auch die Biquadrate von 3, 4 und 5 in ihrer Summe, oder etwa in einer Differenz, eine andere biquadratische Zahl ergeben? Es war durch Probiren leicht zu finden, dass dies nicht der Fall sei[13]).

12) Vergl. Cantor, Vorlesungen I, S. 231.

13) Die einzige vielleicht in Betracht zu ziehende Combination $4^4 + 5^4 - 3^4 = 2^5 . 5^2$ ist an geometrischer Evidenz nicht zu vergleichen mit der Formel $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Also trat man mit der Zahl $3600^2$ in ein höheres Gebiet ein, in welches das Geheimnissvolle, wenn man es einmal suchte, leichter zu verlegen, in welchem es auch leichter zu verhüllen war, als in einer mindern Potenzirung der Zahlen 3 4 5. Für den Unbefangenen jedoch liegt das Geheimniss auch heute noch offen da. Potenzen der ersten drei Primzahlen sind mit einander multiplicirt zu der grossen „geometrischen Zahl“. Aber es schien erwünscht, auch 7 als Factor in die grosse Zahl aufzunehmen. Denn zunächst war 7 die vierte und letzte Primzahl der ersten Dekade; auch stellte diese Zahl die Summe der Katheten des Pythagoräischen Dreiecks dar, und wenn man die Hypotenuse desselben Dreiecks zur Seite eines gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecks machte, so war der Werth der Hypotenuse fast genau gleich 7 (oben Anm. 11). Ferner zählte der Kosmos 7 Planeten, und noch in manchen anderen Beziehungen erschien 7 als bedeutungsvolle und heilige Zahl[14]). Nun brauchen wir $\frac{48}{7}$ nur als Näherungswerth von 7, und zwar in der charakteristischen Formel $7-\frac{1}{7}$, aufzufassen, um die vorher entwickelte Platonische Rechteckszahl zu verstehen. Die eine Seite des Rechtecks ist $=100.7\sqrt{7-\frac{1}{7}}$, die andere $=100.3^3\sqrt{7-\frac{1}{7}}$[15]). Sowohl der Näherungswerth $\sqrt{7}$, als der genaue Werth $\sqrt{7-\frac{1}{7}}$ sind irrational oder nach Pythagoräischer Bezeichnung „unaussprechbar“.

Nun waren die nothwendigen Elemente für genealogische Combinationen, ähnlich wie auf dem naheverwandten Gebiete der Astrologie, in schönster Fülle und Mannichfaltigkeit vorhanden. Zu der Zählung der Tage nach Potenzen von 2, 3 und 5 trat die heilige Zahl 7 und überdies noch die der Wurzel aus 7 nahestehende unaussprechliche Zahl. Summirte man die vier ersten ungeraden Zahlen (bis 7) und zählte dazu die ersten vier geraden (bis 8), so hatte man in der Summe 36 die gepriesene Vierzahl, τετρακτύς, aus welcher dann Platon durch weitere Zahlenspeculation die Zahl 40 entwickelte, mithin 10 als Factor einfügte[16]).

---

14) Vergl. *Theo Smyrn. ed. Hiller,* p. 103 flg.; *Censorin. de die nat.* 14; Ideler, Handbuch der Chronologie I, S. 87 flgg.; Martin a. a. O. p. 275; A. Zeising in der Deutschen Vierteljahrsschrift 1868, IV, S. 271 flgg.; Tannery, p. 175; Dupuis, p. 44 flg; Cantor, Vorlesungen I, S. 78, 82.

15) Es ist hier noch der Nachweis zu geben, dass $\sqrt{7-\frac{1}{7}}$ mit den Mitteln Pythagoräischer Geometrie darstellbar war. Von dem oben in Anm. 11 entwickelten Quadrat über $AF$ wurde das Siebentel-Rechteck $=Z$ abgeschnitten, ferner das Quadrat $\frac{1}{7}Z$ gebildet und von diesem wieder das Siebentel-Rechteck $=z$ abgeschnitten. Jedes der Rechtecke $Z$ und $z$ konnte nach dem Pythagoräischen Satze in ein gleichgrosses Quadrat verwandelt werden. Construirte man nun die Seite des dem Rechteck $z$ gleichen Quadrats als Hypotenuse, und die Seite des kleineren Quadrates als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, so stellte die andere Kathete den Werth $\sqrt{7-\frac{1}{7}}$ dar.

16) Die Genesis der Pythagoräischen Tetraktys giebt Plutarch περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας cap. 30; die Platonische Vierzahl, welche die vollkommenere sei,

Weiter liessen sich aus diesen Elementen unendlich viele geheimnissvolle Formeln aufstellen, nach denen die Zeiten und Tage als günstig oder ungünstig für die Geburt oder, worauf Platon den Nachdruck legt, für die Paarung berechnet wurden. Alle aber im Einzelnen berechneten Zahlen mussten sich einfügen in den einen Rahmen der grossen geometrischen Zahl $3600^2$. Damit ist schliesslich auch vom genealogischen Standpunkte aus diese Zahl gerechtfertigt. Denn anfänglich konnte sie wegen ihrer Grösse Bedenken erregen, weil die Paarungszeiten doch nach Tagen berechnet werden, eine Paarungszeit von $3600^2$ Tagen aber über alle menschliche Zeitrechnung, geschweige denn über ein einzelnes Menschenleben hinausgeht. Nach unserer Auffassung nun bilden die $3600^2$ Tage, d. i. nach runder Schätzung 36000 Jahre die grosse Periode, welche Platon mit ebendiesem Worte bezeichnet.

In dieser Periodenzahl müssen alle Lebensabschnitte der Einzelwesen enthalten sein, und der Lebenslauf des Neugeborenen wird ein glücklicher und erspriesslicher sein, wenn die Vereinigung der Eltern zu einer Zeit stattgefunden hat, welche von den Eingeweihten aus den Elementen der grossen, Alles umfassenden Zahl berechnet worden ist.

Zunächst haben wir nun diese Gesammtzahl noch in einer andern Beziehung zu betrachten. Wir bezeichneten sie nach der Anweisung Platon's mit $3600^2$, und indem wir sie ausserdem in ihre Elemente auflösten, fanden wir ihren Ursprung im Pythagoräischen Dreieck. Sie giebt sich aber endlich auch als reine Sexagesimalzahl zu erkennen. Dies ist kein Zufall, denn die Zahlen 3 4 5 ergeben, mit einander multiplicirt, 60, und die Platonische Zahl ist $= 60^4$. Es kann hier nicht der Ort sein, die Berührung dieser Zahl mit dem babylonischen Sexagesimalsystem zu verfolgen[17]); wir begnügen uns daher mit dem Hinweis, dass behufs Bildung grosser Zeitperioden die sexagesimale Rechnung sehr nahe lag, da das Jahr in runder Zahl 360 Tage enthält[18]).

In der That finden wir, wie mir scheint, eine solche grosse Sexagesimalzahl von Tagen von einem andern Schriftsteller des Alterthums

---

entwickelt derselbe cap. 11 und 14. Vergl. Cantor, Vorles. I, S. 86 (doch ist an der dort ebenfalls angeführten Stelle *de Iside et Osiride* cap. 75 keine Beziehung zur *τετρακτύς* zu finden).

17) Vergl. Brandis, Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien, S. 7 flgg., insbesondere über die 3600 jährige Periode des Berossos derselben S. 11, 15, über die Schaltperioden von 60, 600 und 3600 Jahren S. 11 flg., ferner Martin, *Le nombre nuptial* (oben Anm. 3), p. 286 flg. Auch die Perioden des Orpheus und Cassander bei Censorin, *De die nat.* 18, 11 gehören hierher. Nach Plutarch *περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος* cap. 75 ist die Zahl 60 *τῶν μέτρων πρῶτον τοῖς περὶ τὰ οὐράνια πραγματευομένοις*.

18) Dieses ideelle, sexagesimale Jahr von $6^2.10$ oder 6.60 Tagen erscheint vielfach neben dem wirklichen Jahre von nahezu 365¼ Tagen. Vergl. Martin p. 278, 284 flg., Tannery p. 179 mit Anm. 1.

bezeugt. In seinem *dialogus de oratoribus* kommt Tacitus, indem er Cicero im Hortensius als Gewährsmann anführt, auf das „grosse und wahre Jahr“ zu sprechen, im Laufe dessen dieselbe Stellung des Himmels und der Gestirne wiederkehre. Dem Wortlaute nach scheint damit die grosse Periode bezeichnet zu sein, in welcher die Pole des Aequators einen Umlauf um die Pole der Ekliptik vollenden. Dieser Zeitraum, welchen einige Chronologen das Platonische Jahr genannt haben, ist von neueren Astronomen annähernd auf 25800 Jahre bestimmt worden[19]. Die Handschriften des Tacitus schwanken zwischen 12754 und 12854 Jahren, wozu als Ueberlieferung des Grammatikers Servius, welche ebenfalls auf Cicero's Hortensius zurückgeht, die Zahl 12954 kommt[20]. Alle diese Beträge stellen sehr nahe die Hälfte des sogenannten Platonischen Jahres dar, was schwerlich als ein Zufall betrachtet werden kann. Aber noch eine andere Spur haben wir zu verfolgen. Ebendieselben Beträge kommen auch dem tausendsten Theile der geometrischen Zahl Platon's = 12960 (oben S. 45) so nahe, dass die Frage nach einem innerlichen Zusammenhange von selbst sich aufdrängt. Nennen wir nun die aus Cicero's Hortensius zweifelhaft überlieferte Zahl vorläufig $x$, so werden wir versuchsweise sagen können: Wie die geometrische Zahl Platon's das Tausendfache von 12960 beträgt, so stellen die $x$ Jahre der Ciceronischen Zahl eine Periode von $(360+a)x$ Tagen dar, wobei $a$ das Plus von Tagen und Theilen des Tages bezeichnet, welches hinzukommen muss, um das tropische Jahr genau zu erfüllen. Dann wird die Lösung wahrscheinlich $360.12960 = 6^4.60^2 = 2^8.3^6.5^2$ sein, d. h. die Ciceronische Zahl ist reducirt aus einer grossen sexagesimalen Zahl von Tagen. Der Betrag $a$ war den Alten in der Annäherung $5\frac{1}{4}$ allgemein

19) Vergl. J. J. v. Littrow, Die Wunder des Himmels, 5. Aufl., S. 250 flg., der zugleich nachweist, dass die Grösse der Präcession veränderlich und überdies auch noch nicht mit der Genauigkeit bekannt ist, um die volle Periode mit Sicherheit bestimmen zu können. Nach Lagrange unterscheidet derselbe in Gehler's Physikalischem Wörterbuch Bd. IX, 2 S. 2182 flg. seit dem Maximum der Schiefe der Ekliptik im Jahre 29400 v. Chr. zunächst eine 15000jährige Periode der Abnahme bis zum Minimum im Jahre 14400 v. Chr., von da an wieder eine Zunahme während eines Zeitraumes von 12400 Jahren, eine Abnahme während 8600 Jahren (bis zum Jahre 6600 n. Chr.), endlich wieder eine Zunahme auf einen Zeitraum von 12700 Jahren. Diese Einzeldata, deren Nachweis ich meinem Collegen Dr. Amthor verdanke, waren freilich den Alten nicht einmal annähernd bekannt, wohl aber konnte, trotz der unvollkommenen Beobachtungen, ein charakteristischer Abschnitt der Periode, nämlich die Abnahme der Schiefe der Ekliptik seit 2000 vor Chr., geahnt und so die Ciceronische Zahl aufgestellt werden. Ptolemäos schätzte die Präcession der Tag- und Nachtgleichen für 100 Jahre gleich 1 Grad, woraus sich eine Periode von 36000 Jahren ergiebt. Vergl. Ideler, Handbuch der Chronologie I, S. 27, 192.

20) Tacit., *Dial. de orat.* 16 (p. 25 der Ausgabe von Ad. Michaelis), H. Usener im Rhein. Museum XXVIII, 1873, S. 394 flgg.

bekannt[21]), und es wird darnach vielleicht auch das $x$ des obigen Ansatzes sich finden lassen. Unter den verschiedenen bereits angeführten handschriftlichen Lesarten bietet den relativ wahrscheinlichsten Zahlenwerth der Codex Vaticanus, der von den Herausgebern des Tacitus mit $A$ bezeichnet wird. Denn $360 . 12960 = 4665600$, dividirt durch 12754, ergiebt nahezu $365\frac{9}{11}$ Tag für das Jahr. Entweder rührt nun diese handschriftliche Lesart wirklich aus Cicero's Schrift her, und dann hat der Gewährsmann Cicero's die Jahresdauer etwas höher gesetzt, als sie in Wirklichkeit ist, oder selbst die von der besten Handschrift gebotene Lesart leidet an einem geringen Verderbniss und die richtige Lesart stimmt mit der wirklichen Jahresdauer besser überein.

Verfolgt man rechnungsmässig die letztere Alternative, so findet sich leicht, dass eine Zahl von 12774 Jahren denjenigen Werth von $a$ ergeben würde, der der Wirklichkeit am nächsten kommt, nämlich 5 Tage 5 Stunden 48 Minuten und nahezu 20 Secunden; dies zu 360 Tagen hinzugezählt, würde einen erstaunlich genäherten Werth des tropischen Jahres ergeben[22]), und es ist gerade aus diesem Grunde, mit Rücksicht auf die mangelhaften Beobachtungen der Alten, auf diese Hypothese kein allzugrosses Gewicht zu legen. Doch durfte sie wenigstens ausgesprochen werden, weil die vorgeschlagene Vergleichung von Jahresperioden und sexagesimal gruppirten Zahlen weiterer Erwägung werth zu sein scheint.

Mag nun Cicero sein „grosses und wahres Jahr" zu 12774 oder 12754 oder zu einer andern handschriftlich überlieferten Zahl von tropischen Jahren bestimmt haben, immer bleibt der Vergleich mit einer Periode von $360 . 12960$ Tagen wahrscheinlich und wir sind demnach wohl berechtigt, zu sagen, dass das Ciceronische grosse Jahr zur geometrischen Zahl Platon's sich wie $9 : 25 = 3^2 : 5^2$ verhält.

Zu der letzteren kehren wir nun zurück und suchen, anknüpfend an die frühere Darstellung (S. 50), einige der kürzeren Zeitperioden herauszufinden, welche bedeutungsvoll für das Einzelwesen sein mögen. Bereits früher wurde die Zahl 216 als diejenige ermittelt, welche sämmtliche Glieder der beiden aufgestellten geometrischen Reihen als Factoren

21) Ideler, Handbuch der Chronologie I, S. 261, 273 und öfters im Folgenden; Brandes in Gehler's Physik. Wörterbuch V, S. 667 flgg.; R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 159; Heiberg in seiner Ausgabe des Archimedes, vol. II p. 468.

22) Nach Littrow in Gehler's Physik. Wörterb. IX, 2 S. 2160 flg., beträgt das tropische Jahr gegenwärtig 365 Tage 5 St. 48 Min. 50,83 Sec.; die Bestimmungen anderer Astronomen (vergl. Brandes ebenda V, S. 664 flg.) schwanken — *ceteris paribus* — zwischen 48 und 51,39 Sec. Zu Hipparch's Zeit hat die Jahreslänge nach Littrow (a. a. O. S. 2161) 14 Sec. weniger als gegenwärtig betragen. Aus zwei Beobachtungen Hipparch's und Cassini's berechnet L. Ideler, Handbuch der Chronologie I, S. 34, für den Zeitraum von 146 v. Chr. bis 1785 n. Chr. ein mittleres Jahr von 365 Tagen 5 St. 49 Min. $3\frac{1}{4}$ Sec. Es würde also die oben berechnete Jahreslänge einen verhältnissmässig sehr genauen Betrag darstellen.

enthält. Diese Zahl von Tagen, gleich 7 Monaten und 6 Tagen, gilt als Minimum für die Entwickelung eines lebensfähigen Fötus[23]). Das volle menschliche Leben bemisst sich nach Platon[24]) auf 81 Jahre. Hier haben wir, wie Platon selbst bemerkt hat, die Quadratzahl von 9, oder $3^4$, also ersichtlich ein Element der grossen geometrischen Zahl. Setzen wir die 81 Jahre zu Tagen um, wobei es unbedenklich erscheint, das Jahr rund zu 360 Tagen zu rechnen (oben Anm. 18), da ja nur approximativ ein Grenzpunkt bezeichnet wird, so lautet die Zahl $2^3 . 3^6 . 5 = 29160$ und verhält sich zur geometrischen Zahl wie $3^2 : 2^5 . 5^3 = 9 : 4000$. Noch bedeutungsvoller treten aber die Gruppirungen mit 7 auf. Die Vermittelung mochte Platon mit seiner zuletzt gesetzten Einzelzahl 2700 (oben S. 48) bieten. So viele Tage sind rund gleich $7\frac{1}{2}$ Jahren. Rein erhalten ist diese Zahl in der Varronischen Theilung der Lebensalter von 15 zu 15 Jahren (Censorin. 14, 2). Die allgemeinere Theilung war bekanntlich die nach Jahreswochen, über welche Censorinus (14, 3 flgg.) das Nähere mittheilt. Wie nun nach demselben Schriftsteller (14, 10) die *genethliaci*, d. i. die der Geburtszeiten Kundigen, genau die besonders kritischen Perioden des Lebens festzustellen wussten — in welchen Beträgen überall die Zahl 7 enthalten ist —, so haben sie gewiss auch die Zeiten der Geburt selbst und weiter rückwärts die Zeiten der Paarung mit Hilfe der Siebenzahl genau ausgerechnet und glückliche und unheilvolle Tage unterschieden.

Noch ist Antwort auf die Frage zu geben, warum wohl Platon jene Gesammtzahl die „geometrische" genannt habe. Sicherlich dachte er dabei sowohl an ihren Ursprung aus zwei geometrischen Reihen, als an die Darstellbarkeit nicht nur der Gesammtzahl, sondern auch möglichst vieler Theile derselben durch geometrische Construction, dergestalt, dass diese Einzelconstructionen zu einander in leichte und anschauliche Beziehungen gesetzt werden können. Das Beiwort „geometrisch" soll also nicht einen Unterschied von anderen, ähnlich gebildeten grossen Zahlen ausdrücken, sondern nur hervorheben, dass die erwähnte Eigenschaft, wenigstens nach Pythagoräischer Ansicht, in besonders hohem Grade dieser Zahl zukommt.

Es ist nun noch übrig, den Text der Platonischen Stelle, welche im Ganzen trefflich überliefert und besonders von fremdartigen Zusätzen frei geblieben ist, von zwei unbedeutenden Schreibfehlern zu reinigen.

Im Anfang scheint der Gedankenzusammenhang *ἐν ᾧ πρῶτον* statt *ἐν ᾧ πρώτῳ* zu verlangen, denn an der fraglichen Zahl treten zuerst (*πρῶτον*) die und die Merkmale hervor, worauf die weiteren Eigenschaften der Zahl mit etwas veränderter Construction in den Worten *ὧν ἐπίτριτος πυθμήν* u. s. w. hinzugefügt werden. Die Verwechselungen des

23) Martin p. 272, Dupuis p. 53.

24) Bei Censorin, *De die nat.* 14, 12; 15, 1.

adverbialen πρῶτον mit Casusformen von πρῶτος sind in den Handschriften ungemein häufig. Zieht man es übrigens vor, πρώτῳ beizubehalten, so wird der Sinn der Stelle im Wesentlichen dadurch nicht berührt.

Die eigentliche, schon mehrmals angedeutete Schwierigkeit findet sich in der Mitte der Stelle: δύο ἁρμονίας παρέχεται, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις ... τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκη δέ. Man beachte die zwiefache Gegenüberstellung durch μέν und δέ. Das erste μέν unterscheidet, wie wir bereits festgestellt haben, die Quadratzahl von der gleichgrossen Rechteckszahl; letztere ihrerseits wird wieder durch μέν und δέ geschieden zu den Bezeichnungen ἰσομήκης und προμήκης. Denn προμήκη, nämlich ἁρμονίαν, ist jedenfalls nach der besten Ueberlieferung zu lesen, nicht προμήκει, wie die Mehrzahl der Handschriften giebt, ein Fehler, der leicht entstand, wenn einmal das Verderbniss τῇ sich eingeschlichen hatte. Die in zwei ungleiche Factoren zerlegte Zahl hat, geometrisch betrachtet, die Form eines Rechtecks und ist demnach selbst oblong, ἀριθμὸς προμήκης, und das gegenseitige Verhältniss der beiden Factoren (oder Basis und Höhe im Rechteck) ist eine ἁρμονία προμήκης. Bleiben im Text noch unerklärt die Worte ἰσομήκη μὲν τῇ. Nun liesse sich, wenn man ganz oberflächlich verfahren wollte, leicht sagen: da die Zahl, um die es sich handelt, προμήκης ist, so ist sie nicht ἰσομήκης; Platon muss also geschrieben haben ἰσομήκη μὲν οὔ (statt τῇ). Oder vielleicht könnte man auch die weit geringere Aenderung ἰσομήκη μὲν μή vorziehen und sich darauf berufen, dass der mathematische Sprachgebrauch auch sonst das abwehrende μή zulässt, wo nach den allgemeinen Regeln οὐ zu erwarten wäre. Allein ein nochmaliges Ueberlesen der ganzen Stelle zeigt, dass Platon nicht so geschrieben haben kann. Es lag kein Anlass vor, das ἰσομήκης besonders zu negiren; er würde es also einfach weggelassen haben, wenn es hier nicht statthaben sollte. Um den Gedankengang des Schriftstellers uns völlig zu verdeutlichen, müssen wir uns versetzen in die Pythagoräische Epoche, wo es noch darauf ankam, die allerersten Grundbegriffe der Geometrie und Arithmetik festzustellen. Die aus zwei gleichen Factoren bestehende Zahl entspricht einem Quadrat, und dieses ist ἰσόμηκες πάντῃ. Dem Quadrat am nächsten steht das Rechteck, welches „in einer gewissen Beziehung" auch noch gleichseitig ist, nämlich je in den gegenüberliegenden Seiten; allein die sich schneidenden Seiten sind ungleich und insofern ist es πρόμηκες. Nur dadurch, dass diese Figur zugleich ἰσομήκης und προμήκης ist, wird die arithmetische Formel eines Productes aus ungleichen Factoren möglich; denn wollte man anstatt des Rechtecks ein Trapez oder einen Rhombus oder ein unregelmässiges Viereck wählen, so würde das Product zweier sich schneidenden Seiten nimmermehr die Fläche der Figur darstellen[25]). Das

25) Es hat einer langen culturgeschichtlichen Entwickelung bedurft, bis dieser für uns selbstverständliche Satz ins allgemeine Bewusstsein gedrungen ist. Can-

Rechteck ist also nach Pythagoräischer Auffassung abzuleiten aus dem Quadrat; es behält die rechten Winkel und die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten bei, wird aber länglich, und so ist auch das gegenseitige Verhältniss seiner Seiten in einer gewissen Beziehung noch eine *ἁρμονία ἰσομήκης*, ausserdem aber eine *ἁρμονία προμήκης*. In diesem Sinne hat Platon geschrieben *τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν πη, προμήκη δέ*. Das seltene Indefinitum *πῄ*[26]) wurde leicht zu *τῇ* verschrieben, wozu in der Mehrzahl der Handschriften dann noch der weitere Fehler *προμήκει* kam.

So ist denn auch diejenige Textesstelle, welche in der vorhergehenden Untersuchung nur ihrem Sinne, nicht aber ihrem Wortlaute nach benutzt werden konnte, in vollkommenen Einklang gebracht mit der gesammten Erklärung der geometrischen Zahl Platon's. Ob es dem Schreiber dieses gelungen ist, allerwärts das Richtige zu treffen, muss dem Spruche anderer sachverständiger Beurtheiler überlassen bleiben. Pflegt doch der Urheber einer Hypothese in seinem eigenen Gedankenkreise so gefangen zu sein, dass er unmöglich, während er den verschlungenen Weg zur Lösung verfolgt, zugleich alle Seiten der Frage und alle etwa noch möglichen anderen Auffassungen überschauen kann. Ist also das Richtige, wie es schon seit länger als zwei Jahrtausenden im Dunkel geblieben, auch jetzt noch nicht gefunden, so haben sich vielleicht doch einige neue Gesichtspunkte dargeboten, welche geeignet scheinen, eine künftige Lösung zu fördern.

Es war anfangs beabsichtigt, zum Schluss auch eine kurze Erörterung über die „vollkommene Zahl" anzufügen, welche Platon an derselben Stelle, und zwar als eigenthümlich dem göttlich Erzeugten[27]), anführt; doch stellte sich im Laufe der Untersuchung heraus, dass man hier nicht weiter kommen kann, ehe nicht einigermassen festgestellt ist, wie weit die Kunst astronomischer Beobachtungen und die Kenntniss des gestirnten Himmels bei den Griechen zu Platon's Zeit fortgeschritten oder, richtiger gesagt, wieviel von solcher Wissenschaft aus den älteren ägyptischen und babylonischen Culturkreisen zu ihnen damals schon durchgedrungen war.

Bis ich bei diesem Hinderniss anhalten musste, hatte ich mir etwa folgenden Weg der Untersuchung gedacht. Das „grosse und wahre Jahr"

---

tor, Vorles. I, S. 146 flg., stellte eine lehrreiche, von Thukydides bis in das Mittelalter herabgehende Reihe von Beispielen zusammen für den falschen Schluss vom Umfange einer Figur auf deren Fläche Es war also die obige umständliche Definition des Rechtecks weder zu Pythagoras' noch auch später zu Platon's Zeit überflüssig.

26) Vergl. Pappos III, p. 84, 25: (*μεσότητες*) *πῄ μὲν συμφερόμεναι*. Andere Beispiele finden sich im Dindorf'schen *Thesaurus Graecae linguae* aufgeführt.

27) *Περὶ πολιτ.* 8 p. 546 B: *ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος.*

Cicero's war nach dem Wortlaute bei Tacitus[28]) aufgefasst worden als die Wiederkehr des gleichen Anblicks des Fixsternhimmels, etwa beim Eintritt der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche, nach einem einmaligen Umlaufe der Pole des Aequators um die Pole der Ekliptik. Diese Periode konnte von den Alten nur ungefähr abgeschätzt werden. Zwei Jahrhunderte nach Cicero ist sie von Ptolemäos auf 36000 Jahre angesetzt worden (oben Anm. 19). Vielleicht knüpfte der grosse Astronom an die oben ermittelte geometrische Zahl Platon's an, deren Betrag ihm wohl bekannt sein konnte. Cicero seinerseits hat aus Aristoteles geschöpft[29]); aber Aristoteles hat noch von einer andern Periode gehandelt, als derjenigen, welche durch die Präcession der Tag- und Nachtgleichen bedingt ist. Er hat, wie Censorinus (*de die nat.* 18, 11) berichtet, ein grosses und ein grösstes Jahr unterschieden: *est praeterea annus quem Aristoteles maximum potius quam magnum appellat, quem solis et lunae vagarumque quinque stellarum orbes conficiunt, cum ad idem signum, ubi quondam simul fuerunt, una referuntur*, und die Periode des grössten Jahres in Verbindung gebracht mit der Theorie eines Weltenwinters, der mit einer allgemeinen Fluth, und eines Sommers, der mit einem Weltenbrande endigt.

Die Perioden, in welchen die fünf im Alterthum bekannten Planeten ihre scheinbaren Bahnen vollendeten, waren schon vor Ptolemäos annähernd berechnet[30]). Durch eine einfache Multiplication dieser fünf Perioden mit einer möglichst genäherten Periode des Ausgleichs von Mondmonaten und Sonnenjahren konnte man nun leicht die grosse Periode berechnen, nach deren Ablauf alle Einzelperioden zu einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte zurückkehren würden. Es ist klar, dass der Betrag der Gesammtperiode um so höher ausfallen musste, je genauer die Einzelperioden bestimmt wurden. In der That finden wir bei Censorin eine ganze Reihe von Angaben über die Grösse dieses Weltenjahres. Welchen Betrag Aristoteles selbst gesetzt haben mag, wissen wir nicht; vielleicht verzichtete er auf jede Zahlenangabe, gerade wie es Platon sowohl im VIII. Buche über den Staat, als bei der bekannten Schilderung des Weltganzen im Timäos (p. 39 C. D) thut. Die letztere Stelle lässt sich nun mit Aristoteles' Zeugniss in einen charakteristischen Zusammenhang bringen. Platon sagt, dass die vollkommene Zahl das vollkommene Jahr dann erfülle, wenn sämmtliche acht Perioden soviele

28) *Dial. de orat. 16: is est magnus et verus annus, quo eadem positio caeli siderumque, quae cum maxime est, rursum existet.*

29) S. den näheren Nachweis bei Usener im Rheinischen Museum XXVIII, 1873, S. 394 flgg.

30) Vergl. die Zusammenstellung bei Cicero, *De divin.* 2, 20. Derselbe bezeichnet die Gesammtperiode des Mondes, der Sonne und der fünf Planeten als *magnus annus.*

Mal abgelaufen sind, dass sie zu dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte zurückkehren. Als erste dieser Perioden hat er selbst vorher die Zeit von Tag und Nacht genannt, die zweite ist der Mondmonat, die dritte das Jahr, die übrigen sind die der fünf Planeten. Aristoteles hat, soweit wir aus dem kurzen Berichte bei Censorin ersehen, nur von sieben Perioden gesprochen; allein was bei Platon die erste von seinen acht Perioden ist, das lautet bei Aristoteles: *cum ad idem signum* (nämlich *zodiaci*), *ubi quondam simul fuerunt, una referuntur.* Höchst wahrscheinlich hat also Aristoteles die Periode der Präcession mit in den Bereich seiner Berechnung gezogen. Nun bieten sich weiter zwei Möglichkeiten dar. Entweder hat Aristoteles gemeint, dass in der Zeitdauer einer Präcessionsperiode die Zeiten der sieben Planetenperioden ohne Rest aufgehen, so dass nach Ablauf einer solchen grossen Periode auch die sieben kleineren Perioden zu einem gleichen Anfang zurückkehren, oder er hat, was einen weit grösseren Fortschritt in der astronomischen Theorie bezeichnen würde, bereits erkannt, dass jene erste Periode, trotz ihrer langen Dauer, die anderen Perioden nicht ohne Rest in sich enthält, mithin als „grösstes Jahr" eine noch weit umfänglichere Gesammtperiode, welche alle Einzelperioden in sich aufnimmt, zu bilden sei. Kann man die letztere Alternative dem Aristoteles nicht mit Sicherheit zusprechen, so scheint sie noch weit weniger auf Platon's Stelle Bezug zu haben, und doch finden wir hier einen Begriff, der das Wagniss einer solchen Hypothese vielleicht entschuldigt. Den Zeitbetrag einer Gesammtperiode, sagt Platon, kennen die Menschen nicht, so unfassbar ist die Zahl der Einzelperioden und so wunderbar verschlungen sind die Einzelbahnen der Gestirne.

Der Begriff des Unendlichen erscheint also hier, wie auch an einer Stelle des Gesprächs über den Staatsmann[31]), als das Product einer unbestimmbaren Zahl von Einzelperioden. Ist das eigentlich nicht der gleiche Gedanke, wie ihn Archimedes in seiner Sandzählung mit eminentem Scharfsinne und nach streng wissenschaftlicher Methode definirt? Und wenn wir fragen wollten, wie Archimedes wohl darauf gekommen

---

31) *Πολιτικός* cap. 13, besonders p. 270 A: *ὥστε (τὸν οὐρανὸν καὶ κόσμον) ἀνάπαλιν πορεύεσθαι πολλὰς περιόδων μυριάδας.* Tannery, *Le nombre nuptial*, p. 173 (vergl. oben Anm. 3) weist darauf hin, dass die Astronomie zu Platon's Zeiten weit genug fortgeschritten war, um zu erkennen, dass die Planetenumläufe nicht commensurabel sind zu dem Sternentage, mithin das grosse Jahr, nur als Ausgleich zwischen jenen Umläufen und dem Umschwung des Himmels gedacht, einen Zahlenwerth ausdrücken musste, welcher die für Griechen leicht verständlichen Beträge überstieg. Was die Präcession der Tag- und Nachtgleichen anlangt, welche nach Martin p. 277 flg. dem Platon unbekannt gewesen sein soll, so ist es wohl gestattet, eine dunkle Kunde davon aus der oben angeführten Stelle zu entnehmen. Als ein Vor- und Rückschreiten hat ja auch Aristoteles (oben S. 57) sein grösstes Jahr aufgefasst.

sei, die erste über die gewöhnlichen Zahlwörter hinausgehende Stufe seines Zahlengebäudes[32]) περίοδος, d. i. einen Umlauf zu nennen, so finden wir bei ihm selber keine Erklärung dafür; wohl aber bietet sich eine zutreffende Analogie ungezwungen dar, sowie wir die angeführten Stellen Platon's vergleichen. Dieser geht aus von den Bewegungen der Gestirne, und indem er die Zahl der Einzelperioden als unfassbar darstellt, gelangt er zu einer ungekannten Gesammtzahl: für Archimedes bildet die Unendlichkeit den in fernste Ferne hinausgeschobenen Hintergrund, nach welchem man zählend und messend so weit vordringen kann, dass man im einzelnen Falle nie zu sagen vermag, die äusserste bereits erreichte Zahl sei auch die letzte, die überhaupt erreicht werden könne.

Nur eine Bemerkung sei zuletzt noch gestattet. Dürfen wir in Archimedes' Zahlenperioden einen Anklang an Platon's περίοδοι finden, so können wir wohl auch umgekehrt die Vermuthung aufstellen, dass es eine decimale Zahlengruppirung, wie später bei Apollonios[33]) und Archimedes war, aus welcher Platon seine „vollkommene Zahl" aufgebaut sich dachte[34]). Mithin stand diese dem Göttlichen gewidmete Zahl nicht in unmittelbarer Beziehung zu der sexagesimal construirten geometrischen Zahl. Das Menschliche, Hinfällige und vielfach Bedingte ist gebunden an die vielen Factoren der Sechzigzahl, einschliesslich der 7 und des letzten unsagbaren Factors; das Göttliche und Vollendete dagegen ist einfach aufgebaut und schliesst deshalb wohl der Zehnzahl sich an, auf welcher das ganze Zahlensystem beruht und welche in den grossartigen Systemen späterer griechischer Mathematiker zu wissenschaftlicher Geltung gelangte[35]).

---

32) Ueber das Archimedische System eines unbegrenzten Aufbaues der Zahlenreihe in stets noch verständlichen Benennungen vergl. J. L. Heiberg, *Quaest. Archim.*, p. 59 flg., neuerdings auch dessen Ausgabe des Archimedes, vol. II p. 266 bis 271.

33) Bei Pappos in den Resten des II. Buches, vol. I p. 2 flgg., vol. III p. 1212 flgg. meiner Ausgabe.

34) Zeller, Hunziker und Rothlauf (oben Anm. 3) nehmen 10000 als die vollkommene Zahl Platon's an, d. i. die Epoche, welche im Phaedros p. 248 E für die Seelenwanderung gesetzt wird. Dass die Zahl jedenfalls als eine decimale zu denken ist, lehrt deutlich die Stelle im Staatsmann (Anm. 13); dieselbe zeigt aber auch, dass wir eine weit grössere Zahl, als die einfache Myriade anzunehmen haben.

35) Bei Apollonios werden die Potenzen der Myriaden genau so gruppirt, wie die Potenzen der Grundzahl 60 im Sexagesimalsystem. Archimedes wählt anstatt der Myriade diejenige äusserste Zahl, für welche die griechische Sprache noch einen unmittelbaren Ausdruck hatte, nämlich $10000^2$. Das ist der Rahmen seiner Octaden, und er lässt nun durch Multiplicationen eine beliebige Zahl in ganz analoger Weise aus einer Octade in die andere aufrücken, wie in der Sexagesimalrechnung beispielsweise 54 vierte Sechzigstel, mit 10 multiplicirt, zu 9 drit-

ten Sechzigsteln, oder 55 vierte Sechzigstel, ebenfalls mit 10 multiplicirt, zu 9 dritten und 10 vierten Sechzigsteln werden. Beide, Apollonios und Archimedes, haben also das decimale System, und zwar mit Zugrundelegung höherer Einheiten, bewusster Weise so ausgebildet, wie vor ihnen das sexagesimale System, freilich von einer weit kleinern Einheit aus und auch in der Potenzirung beschränkter, geschaffen worden war. Bemerkenswerth bleibt es jedenfalls, dass die Methode der Zahlenvermehrung durch Potenziren im griechischen Culturkreise zuerst an der sexagesimalen Grundzahl geübt und erst dann wissenschaftlich fortgeschritten ist zu einer decimalen Grundzahl, so dass erst von da an Grundzahl und Zahlenbezeichnung demselben System angehörten. Auch die sprachlichen Ausdrücke zu vergleichen lohnt der Mühe. Die Sexagesimalrechnung erhielt sich in der griechischen Praxis nur nach der Seite der Theilung hin. So wurden gebildet die *ἑξηκοστὰ πρῶτα, δεύτερα* u. s. w. Entsprechend nennt Archimedes die Zahlen seiner ersten Octade *ἀριθμοὶ πρῶτοι*, die der zweiten *δεύτεροι* u. s. w. Apollonios bezeichnete seine Potenzen der Myriaden durch die Zahlwörter *ἁπλοῦς, διπλοῦς* u. s. w. und konnte auf diesem Wege in bequemen sprachlichen Ausdrücken bis zu so hohen Zahlen fortschreiten, dass jedem vorauszusehenden Bedarf dadurch genügt zu sein schien. Ueberdies konnte durch die Wendung *μυριὰς ὁμώνυμος τῷ* Z *ἀριθμῷ*, wobei Z einen beliebigen Exponenten des Dignandus 10000 bezeichnet (Pappos, vol. I p. 4, 15 u. s w.; vol. III Index unter *ὁμώνυμος*) noch weiter, als durch die auf *-πλοῦς* endigenden Zahlwörter vorgeschritten werden. Ist es doch nach dieser Formel, also im Sinne des Apollonios, sogar möglich, die ungeheure Zahl, welche Amthor in dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abth. XXV S. 170, als Resultat des Rinderproblems ausrechnet, in griechischer Sprache auszudrücken. Dass ein sprachlicher Ausdruck derselben Zahl auch nach dem System des Archimedes leicht aufzufinden ist, bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung.

---

# Recensionen.

**Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkarten-Projection.** Ein Handbuch für Jeden, der ohne Kenntniss der höheren Mathematik sich unterrichten will, insbesondere für Lehramtscandidaten der Mittel- und Volksschulen, von ANTON STEINHAUSER, k. k. Regierungsrath. Zweite völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 177 Holzschnitten. Wien 1880. Verlag von Friedrich Beck. IV, 143 S.

Das Büchlein hält treulich, was es verspricht. Wer, ohne vorher tiefere Studien gemacht zu haben, eine ausreichende Kenntniss der mathematisch-geographischen Lehren und ihrer wichtigsten Anwendungen sich erwerben will, mag dasselbe getrost zu seinem Führer wählen. Es ist zwar die früher beliebte Sitte, populären Schriften über angewandte Mathematik einen kurzen Inbegriff der wichtigsten Vorkenntnisse vorauszuschicken, in neuerer Zeit fast gänzlich abgekommen und es mag deshalb Wunder nehmen, dieselbe hier wieder aufgefrischt zu finden, indess ist die hier getroffene Auswahl eine so gute und zweckentsprechende, dass man sich gleichwohl mit der ersten Abtheilung bald befreunden wird. Nachdem die wichtigsten Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie, Trigonometrie und Kegelschnittslehre kurz vorgeführt sind, lehrt der Verfasser die Orientirung nach den Weltgegenden mittelst Sonnenuhr und Compass, giebt dann in seiner bekannten gründlichen Weise eine Anleitung zur Zeichnung von Landkarten, so lange die bezüglichen Theile der Erdoberfläche als eben betrachtet werden dürfen, und erörtert die Grundsätze des topographischen Zeichnens. Auch die Compasskarten, die bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts bei den Seefahrern fast allein im Gebrauche waren, finden ihre Stelle; so ist (S. 43) der nördliche Theil des adriatischen Meeres nach diesem Systeme verzeichnet. — Es folgt die eigentliche mathematische Geographie, bei deren Darstellung von der Rechnung natürlich ganz abgesehen, dafür aber auf Veranschaulichung der himmlischen Erscheinungen um so mehr Bedacht genommen wird. Die Figuren (meistentheils auf schwarzem Grunde) sind denn in der That auch ganz vorzüglich ausgeführt; wir nennen, als besonders hervorragende Leistungen auf diesem Gebiete, die graphische Bestimmung der Tag- und Nachtlängen (S. 70) und die Construction der Sichtbarkeitszone (S. 83) einer totalen Sonnenfinsterniss. Natürlich wer-

den auch die Modelle besprochen, Globen, Tellurien, Lunarien und Armillarsphären*, die ja an sich vom höchsten didaktischen Werthe sind, ganz besonders aber solchen Lesern, wie sie der Verfasser im Auge hat, empfohlen werden müssen. — Den Schwerpunkt des Werkchens bildet, wie von dem berühmten Kartographen nicht anders zu erwarten war, die Projectionslehre. Alle nur geschichtlich interessanten Abbildungsmethoden sind in dieser zweiten Auflage ausgeschlossen worden, indess ist die Auswahl noch immer eine sehr reiche. Manche Unterarten der so überaus vielseitigen stereographischen Projection, wie die externe Horizontalprojection von James, die schiefe Kegelprojection von Braun werden auch dem Kenner merkwürdig sein. Die äquivalenten Abbildungen werden gleichfalls nicht vergessen. Einen vortrefflichen Eindruck macht die Darstellung des Projectionsverfahrens von Mercator (S. 117), denn durch dieselbe muss auch dem unbefangensten Beschauer auf den ersten Blick klar werden, wie sich die loxodromische Curve in eine gerade Linie verwandelt. Zum Schlusse begegnen wir einer Anweisung, die Netze zu sphärischen Zweiecken herzustellen, mit denen alsdann die Oberfläche eines Globus überspannt werden soll, und einer Zusammenstellung der wichtigsten Flächenverhältnisse auf dem Erdsphäroid, sowie endlich einem sehr genauen Sachregister.

Lediglich zu dem, was über die Berechnung der sogenannten „Küstenentwickelung" (S. 135) gesagt ist, möchten wir uns eine Bemerkung gestatten. Herr Steinhauser hat allerdings die bekannten verbesserten Formeln angegeben, welche vor den von Carl Ritter gebrauchten wenigstens das Eine voraus haben, dass sie kein mathematisches Unding repräsentiren (Peschel-Ruge, Geschichte der Erdkunde, S. 812 flgg.). Unbrauchbar zu dem Zwecke, zu welchem sie eigentlich ins Leben gerufen wurden, sind sie deswegen doch, denn gerade für die Beurtheilung dessen, was man in der vergleichenden Geographie als „Gliederung" der Küsten zu bezeichnen pflegt, versagen sie völlig den Dienst. Eine sternförmige Hypocykloide ist doch gewiss eine Figur, die eine tüchtige Gliederung hat, während letztere einem mathematischen Ovale vollständig abgesprochen werden muss. Und doch kann man nach einem Theorem von Durège leicht eine Ellipse angeben, die mit der erwähnten Sternfigur gleichen Inhalt und Umfang hat, so dass nach der Bothe'schen Formel beide Gebilde die nämliche Küstenentwickelung besässen. Will man auf diesem Gebiete zu wirklich verwendbaren Ergebnissen gelangen, so wird man wohl zu einem ähnlichen Gedanken seine Zuflucht nehmen müssen, wie ihm der Berichterstatter im 57. Theile des Grunert'schen Archivs Ausdruck gegeben hat. —

* Zu erwähnen wäre noch das von dem Münchner Reallehrer Goetz erfundene, patentirte „Ekliptikon", ein Lehrmittel, das Manches vor den gewöhnlichen Apparaten voraus hat.

Möge das Steinhauser'sche Buch in den Händen recht vieler Privatstudirender zu finden sein und insbesondere auch in den Lehrerseminarien sich Eingang verschaffen!

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

**Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen,** von A. Radicke. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert. 1880. IV, 35 S.

Die kleine Schrift des durch mehrere analytische Abhandlungen wohlbekannten Bromberger Mathematikers verfolgt das Ziel, eine Reihe von Untersuchungen über gewisse für die gesammte Analysis fundamentale Zahlwerthe zu einem übersichtlichen Gesammtbilde zu vereinigen. In sachlicher Beziehung schliesst sie sich hauptsächlich an die Arbeiten von Seidel und Stern, in formaler an jene von Eduard Lucas an, von welch' Letzterem insbesondere die überall zur Verwendung gelangende operative Symbolik entlehnt ist. Bedienen wir uns, abweichend von Herrn Radicke, der hier schon aus äusseren Gründen besonders bequemen Hyperbelfunctionen, so können wir den drei Relationen, deren Studium den Inhalt des kleinen Buches bildet, die folgende Gestalt ertheilen:

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{2e^{\frac{1}{2}x}\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}x}=1-\frac{x}{2}+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\mathfrak{Sec}\,x=1-E_1\frac{x^2}{2!}+E_2\frac{x^4}{4!}-E_3\frac{x^6}{6!}+\ldots,$$

$$\mathfrak{Tang}\,x=T_1\frac{x}{1!}-T_2\frac{x^3}{3!}+T_3\frac{x^5}{5!}-T_4\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$B_n$, $E_n$ und $T_n$ werden bezüglich als $n^{\text{te}}$ Bernoulli'sche oder Euler'sche Zahl (Secantencoefficient) und als $n^{\text{ter}}$ Tangentencoefficient bezeichnet. Die Aufgabe des Verfassers war es, Formeln anzugeben, mittelst deren diese Zahlen, wenn für eine gewisse Anzahl von Indices die Berechnung bereits stattgefunden hat, für ein beliebig grosses $n$ bestimmt werden können.

Der Verfasser entwickelt demzufolge zunächst ein System vollständiger Recursionsformeln sowohl für die $B$, als auch für die $E$, alsdann aber zeigt er, wie man mittelst des Lucas'schen Operationscalculs von diesen allgemeinen Formeln zu den abgekürzten Recursionsformeln von Seidel und Stern gelangen könne. Seine Ergebnisse setzen ihn in den Stand, eine Reihe von Beziehungen zwischen den Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen auszumitteln, wie sie theilweise bereits früher von Scherk und Stern angegeben waren. Schliesslich werden auch die Tangentencoefficienten in ähnlicher Weise behandelt. Den Schluss bildet ein neuer und sehr eleganter Lehrsatz, durch welchen gezeigt

wird, dass die eine Gleichung $(x-1)^p=0$, symbolisch interpretirt, sowohl die Secantencoefficienten, als auch die Tangentencoefficienten liefert.

Die recurrente Berechnung dieser wichtigen Constanten ist durch die Radicke'sche Broschüre in der That zum wünschenswerthen Abschlusse gebracht. Indess verdient es gerade diese Theorie, auch noch von einer andern Seite her beleuchtet zu werden. Bedenkt man, dass, sei es unter der Form des bestimmten Integrals, sei es unter jener der Determinante, neuerdings auch die geschlossene Darstellung jener merkwürdigen Zahlen mehrfach erbracht worden ist, so wird man eine Fortsetzung unserer Vorlage für wünschenswerth erklären, auf deren Titel das Wort „Recursionsformeln" durch „independente Formeln" zu ersetzen wäre.

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

**Elementares Handbuch der Quaternionen.** Von P. G. Tait, *M. A.*, Professor an der Universität zu Edinburg. Autorisirte Uebersetzung von Dr. G. v. Scherff. Leipzig, Teubner. 1880. 332 S.

Ehe Hankel's vortreffliches kleines Buch „Ueber complexe Zahlen" 1867 erschienen war, fehlte es der mathematischen Literatur in Deutschland an einem Werke über Quaternionen in dem Sinne, wie dieser Wissenszweig in England seit den vierziger Jahren schon gepflegt wird. Damit ist nicht gesagt, dass diese Seite mathematischer Untersuchung bei uns überhaupt keine Beachtung gefunden hätte, denn die „Ausdehnungslehre" des gelehrten Grassmann war schon 1844, resp. 1862 erschienen und auch die Arbeiten Scheffler's über die Verwendung des Imaginären in der Geometrie und sein „Situationscalcul" datiren aus 1846 und 1852. Die Untersuchungen dieser Männer streifen aber alle das Gebiet des Quaternionencalculs. Wenn Scheffler selbst sich jetzt ganz ablehnend gegen die Theorien der Engländer verhält, so haben auf Hankel's Anregung hin doch Andere diesem Gebiete ihre Anerkennung gezollt. Fiedler hat seiner analytischen Geometrie des Raumes ein kurzes Capitel über Quaternionen einverleibt; der Berichterstatter selbst hat in seiner „Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen" (1876) das Wesentlichste der Lehren Hamilton's mitgetheilt und u. A. versucht, durch die longimetrischen Quaternionen die Theorie der Rechnung mit Vectoren zu einer Art Abschluss auf geometrischem Gebiete zu führen. Odstrycil hat (1878) in einem kleinen Werkchen über „Quaternionen" die Theorie und Anwendung dieser Rechnungsart kurz vorgeführt, und in der jüngsten Zeit haben die Elements of Quaternions, das Hauptwerk des scharfsinnigen Begründers dieser Rechnungsweise, durch Herrn Paul Glan eine Veröffentlichung in deutscher Uebersetzung gefunden. Doch ist von diesem umfangreichen Werke erst eine Lieferung erschienen, während uns schon seit Jahresfrist in glänzender Ausstattung die deutsche Ausgabe von Tait's Elementary

treatise on Quaternions vorliegt. Tait ist durch Arbeiten auf physikalischem Gebiete auch bei uns wohlbekannt; in England wird er als der Nachfolger des im Jahre 1865 gestorbenen R. Hamilton auf dem Gebiete der Quaternionen betrachtet. Das Buch Tait's giebt in seiner guten deutschen Bearbeitung auf 382 Seiten eine vollständige Theorie und eine Reihe höchst interessanter Anwendungen der Quaternionen. Die Darstellung ist kurz und knapp, für den Anfänger vielleicht an manchen Stellen zu kurz. Freilich sagt Tait selbst, er halte nichts von dem Wissen, welches zu leicht errungen würde; doch dürfte uns zuweilen der Führer etwas mehr Hilfe angedeihen lassen. Wie z. B. aus den Gleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

nicht die Folgerung zulässig sein soll, dass dann $i$, $j$ und $k$ gleich $\sqrt{-1}$ und mithin unter einander gleich seien, ist wenigstens nicht sofort selbstverständlich und hat zum Theil auch als Grundlage für Herrn Scheffler gedient in den Angriffen, die der gelehrte Baurath gegen die Werke über diese Materie richtete. Dass durch obige nicht falschen, aber durch eine bequeme Schreibweise ungenau ausgedrückten Gleichungen keine Fehler in den Rechnungen mit Quaternionen veranlasst wurden, liegt daran, dass einiges Ueberlegen zeigt, Drehungen um zwei Rechte seien nicht identisch, wenn ihre Axen unter rechten Winkeln einander schneiden. Es ist daher ungenau, den Werth von Quaternionen, die um zwei Rechte drehen, aber um verschiedene Axen, durch das einzige Zeichen $-1$ zu bezeichnen, woraus dann aber sofort die Unzulässigkeit der Gleichung von $i$, $j$ und $k$ folgt.

Wenn wir nun versuchen, eine kurze Inhaltsangabe des Buches vorzulegen, so sind wir in der üblen Lage, dem Kundigen auf dem Gebiete der Quaternionen Bekanntes und daher vielfach Ueberflüssiges vorzutragen, dem Unkundigen aber Unklares, weil nicht Ausreichendes unterbreiten zu müssen.

Nach einer historischen kurzen Notiz über die älteren Versuche geometrischer Interpretirung imaginärer Ausdrücke giebt das erste Capitel die Addition und Subtraction von Strecken in der Weise, wie dies von Argand im Anfang dieses Jahrhunderts zuerst versucht wurde, nämlich in derselben Art, wie Kräfte summirt werden, die an demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen angreifen. (Um ihrem Landsmanne die Priorität zu wahren, haben die Franzosen jüngst das Schriftchen Argand's bei Gauthier-Villars neu erscheinen lassen.) Es ist darnach eine räumliche Strecke $\varrho$ nach Grösse und Richtung ausgedrückt durch

$$\varrho = x\alpha + y\beta + \gamma z,$$

wenn $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ Einheitsstrecken in den Richtungen dreier Axen sind, während $x$, $y$ und $z$ die Masszahlen der in diesen Richtungen genommenen Coordinaten des Endpunktes von $\varrho$ sind. Die Verwendbarkeit dieser

geometrischen Addition und Subtraction wird an einer Reihe interessanter Aufgaben nachgewiesen.

Das eigentliche Gebiet der Quaternionen betritt Tait im zweiten Capitel. Dort wird eine Quaternion definirt als der Quotient zweier räumlichen Vectoren $\beta$ und $\alpha$, wenn bei dieser Messung von $\beta$ durch $\alpha$ zugleich berücksichtigt werden nicht nur die absoluten Längen der Vectoren, sondern auch der Winkel, den die Vectoren mit einander bilden, und die Stellung der Ebene dieses Winkels, letztere etwa bestimmt durch das Fallen und Streichen dieser Ebene. Die Abhängigkeit des geometrischen Quotienten $q = \beta : \alpha$ von den genannten vier Elementen ist denn auch der Grund des Namens der Quaternionen. Dem Nachweis, dass jede der vier Grundrechnungen mit Quaternionen wieder auf eine Quaternion führt, ist der übrige Theil des Capitels gewidmet. Hierbei wird auch der Stein des Anstosses dieser Theorie für Viele erörtert, wonach das Product $q_1 q_2$ zweier Quaternionen nicht allgemein gleich $q_2 q_1$ ist, ein Satz, der aber leicht zum Verständniss gebracht wird, wenn man nur festhält, dass Quaternionen neue Zahlwerthe sind, durch deren Multiplication mit einer Strecke diese letztere nicht blos verlängert oder verkürzt, sondern auch in der Ebene der Quaternion selbst gedreht wird. — Gilt so das commutative Princip bei der Multiplication von Quaternionen nicht, so wird doch gezeigt, dass das distributive und associative Princip auch hier richtig bleiben, wonach

$$q_1 (q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3 \quad \text{und} \quad (q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Eine für die Rechnung höchst wichtige Vereinfachung ergiebt sich aus dem Nachweis, dass die Quaternion zweier zu einander rechtwinkligen Einheitsvectoren dargestellt werden kann durch einen dritten Vector, der senkrecht zur Ebene der beiden ersten ist. So ist z. B., wenn $i$, $j$ und $k$ drei Einheitsvectoren in den Richtungen dreier zu einander rechtwinkligen räumlichen Axen sind,

$$\frac{j}{i} = k, \quad \frac{k}{j} = i \quad \text{und} \quad \frac{i}{k} = j,$$

so dass

$$i = jk, \quad j = ki, \quad k = ij$$

oder auch $ijk = -1$ ist, Gleichungen, die in dem Werke des Herrn Dr. Scheffler über polydimensionale Grössen unverdiente — weil auf falschen Voraussetzungen beruhende — Angriffe erlitten. (Vergl. des Referenten „Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen".)

Indem nun umgekehrt jeder Vector als Vertreter einer Quaternion aufgefasst werden kann, ist es leicht,

$$\beta : \alpha = w + xi + yj + zk$$

nachzuweisen, d. h. die Darstellung jeder Quaternion in Form eines viergliedrigen Ausdrucks, worin $w$, $x$, $y$ und $z$ gemeine Zahlen, $i$, $j$ und $k$

aber Einheitsvectoren oder rechtwinklige Quaternionen darstellen. Die Herleitung einer Reihe von Fundamentalformeln bildet den Rest des Capitels.

In Capitel III wird die leichte geometrische Deutung vieler Formeln gezeigt, zugleich aber auch die Mannichfaltigkeit von Umformungen, deren diese Formeln fähig sind. So stellen

$$T\varrho = T\alpha; \quad T\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right) = 1, \quad \left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = 1$$

etc. etc. lauter Quaternionengleichungen der Kugelfläche dar, wobei jede ein Ausdruck einer charakteristischen Eigenschaft dieses geometrischen Gebildes ist.

Die Grundgleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie finden ebenfalls ihre Ableitung. — Zum Schlusse des Capitels ist nachgewiesen, wie auch $\sqrt{-1}$, das Imaginäre der Algebra, bei Rechnungen mit Quaternionen dann wieder eintritt, wenn z. B. die Schnittpunkte geometrischer Gebilde gesucht werden, die nicht zu reellen Schnitten gelangen. Jetzt ist aber $\sqrt{-1}$ kein Vector, sondern eine richtungslose Zahl.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Differentiation von Quaternionen. Wegen der Nichtvertauschbarkeit der Factoren bietet diese Rechnung Schwierigkeiten, die sich nach Hamilton's Ansicht nicht anders lösen lassen, als durch Zurückgreifen auf die Definition des Differentials, wie sie Newton gegeben hat und von welcher die jetzt in der Analysis übliche nur ein besonderer Fall ist. Ist nämlich $r = F(q)$, so ist nach Newton

$$dr = dF(q) = \lim n\left(F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - F(q)\right)$$

für $n$ gleich $\infty$. Nach dieser Definition brauchen $dr$ und $dq$ nicht unendlich klein zu sein, eine Annahme, die daher auch bei Functionen von Quaternionen nicht gemacht wird. Unter Voraussetzung gewöhnlicher Functionen, d. h. solcher, worin die variabelen Grössen keine Quaternionen sind, führt übrigens die obige Definition des Differentials, wie man leicht sieht, zu denselben Ergebnissen, wie die gewöhnliche Differentialrechnung. Die Engländer erwähnen mit einer gewissen Genugthuung, dass bei dieser Erweiterung der allgemeinen Arithmetik auf die vielfach etwas verächtlich behandelte Methode Newton's zurückgegriffen werden musste.

Doch nicht blos die Differentiation der Quaternionfunctionen bietet Schwierigkeiten wegen der Nichtcommutativität der Producte, auch die Lösung von Gleichungen, selbst ersten Grades, wird dadurch erheblich erschwert. So ist z. B. aus

$$aq + qb = c,$$

worin alle Grössen Quaternionen sind, durchaus nicht gestattet,

$$(a + b)q = c \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a + b}$$

zu setzen, sondern nur auf Umwegen gelangt man zu einem Werthe von $q$. — Hamilton hat eine „bewundernswerthe" Methode gegeben, eine jede Quaternionengleichung ersten Grades zu lösen; dieselbe ist in Capitel V von Tait abgekürzt reproducirt.

Die Capitel VI bis XI sind den Anwendungen der Quaternionen gewidmet. So werden in dem VI. Capitel Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Geraden und der Ebene gelöst, in Capitel VII solche über die Kugel- und Kreiskegelfläche. Hier und in Capitel VIII, der Untersuchung der Flächen zweiten Grades, zeigt sich erst die Mächtigkeit des neuen Werkzeuges. Den krummen Linien und Flächen überhaupt ist das IX., Untersuchungen aus der Mechanik und Physik sind das X. und XI. Capitel gewidmet. Dass diese Untersuchungen mit zu den interessantesten gehören, ist bei der wissenschaftlichen Stellung Tait's und bei dem Charakter der Methode, die ja den Vector nicht als todte Linie, sondern als Vertreter von Translationen und Rotationen einführt, nicht anders zu erwarten; kann man ja aus Symbolen nichts herauslesen, was nicht durch Definition hineingelegt ist.

Das Buch ist ganz besonders Denen zu empfehlen, die rasch in die Methode und deren Anwendungen in der Physik eingeführt sein wollen. und wir dürfen hoffen, dass, trotz unmotivirter Nörgelei an der Methode, mit dem Erscheinen der Werke von Tait und Hamilton in deutscher Sprache auch die Sprödigkeit etwas nachlässt, mit der bis jetzt deutsche Mathematiker einem Gebiete gegenübergestanden haben, dem doch auch schon Gauss und Cauchy vor mehr denn 25 Jahren einen Theil ihrer Aufmerksamkeit zuwendeten — Letzterer wahrscheinlich angeregt durch unsern Landsmann Grassmann.

W. Unverzagt.

---

Scheffler, Dr. H., **Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.** Braunschweig, bei Vieweg und Sohn.

Das vorliegende Werk steht in engster Verbindung mit zwei anderen Werken desselben Verfassers, mit dem „Situationscalcul" und den „Naturgesetzen", indem es im Ganzen eine Erweiterung des erstern und eine Einleitung in letzteres bezweckt; es bietet eine vollständige Theorie des Situationscalculs, Anwendungen desselben auf Zahlentheorie und Geometrie, namentlich auf den vierdimensionalen Raum, und verbindet damit eine scharfe Polemik.

Der Situationscalcul bezweckt, das Rechnen mit complexen Zahlen auf ein aus beliebig vielen Einheiten gebildetes Grössengebiet zu übertragen. Wir wissen durch Weierstrass, dass hierfür die gewöhnlichen Multiplications- und Divisionsgesetze nicht bestehen bleiben können. Der Versuch des Verfassers hat den Vorzug, dass er für $n=2$ mit den gewöhnlichen complexen Zahlen identisch wird und für $n=3$ in engste

Beziehung zum Euklidischen Raume tritt. Es sei gestattet, mit einigen Worten darauf einzugehen. Um die Strecke $OA$ zu bestimmen, welche vom Scheitel $O$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems nach einem beliebigen Punkt $A$ gezogen ist, wählt Herr Scheffler die Projectionen von $OA$ auf die Axen zu cartesischen, und zu Polarcoordinaten ausser der Länge $a$ den Winkel $XOA = \alpha$ und den Neigungswinkel $\beta$ von $XOA$ zu $XOF$; dann erscheint $OA$ in den drei Formen

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} = a(\cos\alpha + i \sin\alpha \cos\beta + i i_1 \sin\alpha \sin\beta) = x + yi + zii_1.$$

Die Multiplicationsgesetze ergeben sich dann aus der Gleichung

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} . a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1} = a a_1 e^{(\alpha + \alpha_1) i} e^{(\beta + \beta_1) i_1}.$$

Die Anwendung der dritten Form würde schon bei der Multiplication zu irrationalen Ausdrücken von geringer Uebersichtlichkeit führen. Ganz ähnlich wird die Rechnung mit Ausdrücken von der Form $a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} \ldots$ Für diese allgemeinen Grössen hat nun der Verfasser die Theorie der Primzahlen untersucht und ist dabei durch eine einfache Deduction zu folgenden allgemeinen Sätzen gelangt: Jede reelle Zahl kann als Product von mehreren Zahlen des polydimensionalen Gebietes dargestellt werden, und zwar bedarf eine Primzahl von der Form $2^{r-1}(2n+1)-1$ zu ihrer Zerlegung $r$-dimensionale Grössen; wenn sich dagegen eine Zahl aus einem $n$-dimensionalen Gebiete nicht in Factoren desselben Gebietes zerlegen lässt, so ist es auch unmöglich, sie in $(n+m)$-dimensionale Factoren zu zerlegen, sie ist nach dem Ausdruck des Verfassers eine vollkommene Primzahl.

Auch für manche geometrische Probleme ist der Calcul, wie das Werk zeigt, mit Vortheil zu benutzen. Es sind dies die Sätze über das sphärische Dreieck, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Raumpolygons und einer körperlichen Ecke. Alle diese und einige ähnliche Sätze ergeben sich mit überraschender Einfachheit und erscheinen zum Theil in einem ganz neuen Lichte. Wir bedauern daher, dass der Situationscalcul so wenig bekannt und seine Anwendung für schwierigere Probleme noch gar nicht versucht ist.

Von höherer Bedeutung, als die Anwendungen, sind für Herrn Scheffler die Principien des Calculs, da sie nach seiner Ansicht von ganz genereller arithmetischer Natur sind, sich aus den Entwickelungen der allgemeinen Begriffe von Grössen und Grössenveränderungen ergeben und auf jedes wirkliche Grössengebiet Anwendung erleiden. Wenn diese Ansicht berechtigt wäre, so würde neben der principiellen Wichtigkeit die Frage nach den Anwendungen kaum in Betracht kommen; aber die ganze Herleitung der Operationsgesetze wird sicherlich nur wenig Freunde finden. Die gebräuchliche Herleitung wird vollständig verworfen; vielmehr soll zwischen der Numeration als Zählung, der Addition als Ver-

einigung und der Multiplication ein wesentlicher Unterschied bestehen. Additionen und Multiplicationen werden als primäre, secundäre etc. unterschieden; die secundäre Addition von Linien soll z. B. ihre Länge ungeändert lassen, dagegen auf die unendlich kleine Breite einwirken. Die primäre Multiplication soll eine Verhältnissänderung des Multiplicands sein, d. h. eine Veränderung aller seiner Theile nach einem und demselben Verhältniss, ohne irgend eine Aenderung der Anzahl, noch des relativen Ortes dieser Theile. Dagegen ist die secundäre Multiplication, die Declination, eine Veränderung des Verhältnisses zur Grundrichtung; die tertiäre, die Inclination, eine relative Bewegung um die Grundaxe im Grundraume u. s. w. Das ist in Kürze die Grundlage, auf welcher der Verfasser sein System aufbaut. Nach unserer Ansicht sind diese Definitionen ganz willkürlich; sie sind ferner höchstens für den Euklidischen Raum berechtigt, und zwar kann die Berechtigung nicht von vorn herein bewiesen werden; schliesslich aber müssen wir hervorheben, dass die Gesetze nicht direct aus diesen Definitionen hergebildet werden können, sondern sich entweder nur auf die Anschauung oder die Analogie stützen.

So ist es nach unserer Ansicht nur die Analogie, welche den Verfasser zu seinen Gesetzen über den vierdimensionalen Raum führt. Während für Linien und Flächen die Gesetze der secundären Multiplication mit der Anschauung der Drehung übereinstimmen, soll ein Körper $r$ (etwa ein rechtwinkliges Parallelepipedon), weil $r$ durch die secundäre Multiplication die Form $r \cos\alpha + ir \sin\alpha$ annimmt, bei der Drehung in zwei Körper verwandelt werden, von denen der eine, $r \cos\alpha$, aus dem ursprünglichen durch Compression der Höhe entsteht, während der andere als eine Verdichtung der Grundfläche zu denken ist. Entsprechende Festsetzungen werden für die Inclination und für die quaternäre Multiplication getroffen. So gelangt der Verfasser zu dem Resultate, dass der vierdimensionale Raum begrifflich aus dem dreidimensionalen erhalten werde, indem man die demselben anschaulich zukommende Dichtigkeit Null jeden beliebigen, positiven oder negativen Werth annehmen lässt. Aus dieser, unseres Erachtens gestatteten, aber nicht nothwendigen Vorstellung leitet der Verfasser eine Reihe schöner Folgerungen her, z. B. dass mindestens fünf Körper erforderlich seien, um einen Raum von vier Dimensionen vollständig zu begrenzen; dass Körper des Anschauungsraumes durch den vierdimensionalen hindurch in ihre symmetrische Lage übergeführt werden können. Dennoch müssen wir hervorheben, dass das Gebotene keineswegs ausreicht, die betreffende Raumform, namentlich ihre Bewegungen vollständig zu charakterisiren.

Diese Theorie giebt dem Verfasser Anlass zu einer äusserst heftigen Kritik fremder Leistungen. Alles im Einzelnen zu widerlegen, gestattet der Raum nicht; einige Punkte müssen jedoch erwähnt werden.

Hamilton's Quaternionen sind nach Herrn Scheffler eine Verirrung, ein Zaubereinmaleins, gehören einem Zauberlande an; die Quaternionen mit complexen Argumenten bilden für ihn den Gipfel der Begriffsverwirrung. Die Gründe, womit er solche Aussprüche glaubt begründen zu können, sind grösstentheils seiner oben skizzirten Theorie entnommen: so soll $\sqrt{-1}$ nur einen einzigen Werth haben können, und nach philosophischen Principien soll ein Product von der Reihenfolge der Factoren unabhängig sein. Er fügt noch einige Rechnungen bei, um Widersprüche im Calcul selbst nachzuweisen; aber diese stützen sich wesentlich darauf, dass er den Factoren eine andere Reihenfolge beilegt, als Hamilton, und dass er die Gesetze über das Kürzen von Brüchen auch im Quaternionencalcul allgemein als giltig annimmt. Eine Widerlegung im Einzelnen ist um so weniger nothwendig, als nach einer Bemerkung des Herrn Frobenius (Borchardt's Journal, Bd. 84 S. 62) das Rechnen mit Quaternionen auf gewisse Transformationen hinauskommt und schon deshalb keinen innern Widerspruch enthalten kann. Wenn aber Herr Scheffler glaubt, sein Situationscalcul führe bei geometrischen Problemen leichter zum Ziele und die Quaternionen müssten fortwährend die Anschauung zu Hilfe nehmen, so dürfte ihn wohl ein Einblick in die Werke von Hamilton und von Tait vom Gegentheil überzeugen.

Wäre dem Verfasser die erste „Ausdehnungslehre" Grassmann's vom Jahre 1844 bekannt geworden, so würde er schwerlich seine Angriffe gegen Grassmann aufgestellt haben.

Auf die Kritik der Dissertation Riemann's und seiner philosophischen Studien gehen wir nicht ein, dagegen müssen wir die Angriffe auf dessen Habilitationsvorlesung kurz erwähnen. Dass dieselben in der Verwerfung der nicht-euklidischen Geometrie gipfeln, ist selbstverständlich. Hätte der Verfasser statt dieser nur für den mündlichen Vortrag bestimmten Abhandlung andere Arbeiten seinem Angriffe zu Grunde gelegt, so würde er gefunden haben, dass seine Bedenken schon öfters widerlegt sind. Da Riemann den Weg nicht angiebt, auf dem er zu seinen Resultaten gelangt ist, so nimmt Herr Scheffler an, die Definitionen und Formeln seien willkürlich aufgestellt, und glaubt weitläufig gegen ein solches Verfahren polemisiren zu sollen. Er verwirft den Ausdruck „mehrfach ausgedehnte Mannichfaltigkeit"; dem Worte „Krümmung", welches bei Riemann eine rein analytische Bedeutung hat, legt er die betreffende geometrische Anschauung bei und gründet darauf seine Polemik.

Wenn der Herr Verfasser seinem Situationscalcul nur eine innere Berechtigung zuschreiben wollte, ohne ihn als die einzig mögliche Rechnungsart mit $n$-fach complexen Grössen aufzustellen, so würden wir ihm gern beistimmen. Aber eine philosophische Begründung, mit welcher die

Quaternionen und die nicht-euklidischen Raumformen nicht bestehen können, trägt trotz mancher interessanter Seiten den Beweis der Unrichtigkeit in sich.

Brilon. Dr. Killing.

---

Unverzagt, Prof., **Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen.** Osterprogramm der städtischen Realschule zweiter Ordnung zu Wiesbaden. 1881.

Vorstehende Anzeige war bereits geschrieben, als mir das vorliegende Programm zugesandt wurde. Da die Abhandlung besondere Rücksicht auf das Werk des Herrn Scheffler nimmt, so scheint es angemessen, sie im Anschluss an das vorangehende Referat kurz zu besprechen. Die Arbeit verdient schon deshalb weitere Beachtung, da sie eine äusserst klare elementare Entwickelung der Principien des Quaternionencalculs bietet, wobei längere Rechnungen unterdrückt sind, wenn ihre Mittheilung den Ueberblick erschwert hätte. Die an sich schon interessante Darlegung wird angenehm belebt durch zahlreiche geschichtliche Notizen über Quaternionen und verwandte Rechnungsarten. (Dabei muss jedoch bemerkt werden, dass Grassmann's „Ausdehnungslehre vom Jahre 1862" nicht die zweite Auflage des 1844 erschienenen Werkes, sondern ein neuer Aufbau der Theorie ist.) An passenden Stellen werden die Angriffe des Herrn Scheffler vollständig widerlegt. Diese Vertheidigung sticht schon in ihrem ruhigen und sichern Tone vortheilhaft gegen dieses Werk ab, lässt aber an Klarheit und Gründlichkeit nichts zu wünschen übrig. Vielleicht hätte der Verfasser gut gethan, an einzelnen Stellen mehr die innere Nothwendigkeit der getroffenen Festsetzungen zu betonen, statt sich, was freilich hinreichend ist, mit dem Beweise der Erlaubtheit zu begnügen. Einige, zum Theil ungenaue Bemerkungen auf Seite 4, 15 und 16, welche mit dem Gegenstande nur in loser Verbindung stehen, nöthigen zu folgender literarischen Notiz. Herr Weierstrass liefert in seinen Vorlesungen den Beweis des Satzes, dass für Zahlen, welche aus mehr als zwei Grundeinheiten gebildet sind, die Regeln des gewöhnlichen Rechnens nicht bestehen können. Eine ältere Form dieses Beweises hat Herr Kossak 1871 veröffentlicht. Her Hazzidakis hat diese Theorie weiter verfolgt und ist zu einer Reihe von Sätzen für solche Grössengebiete gelangt, für welche die Additions- und Multiplicationsregeln gelten, aber ein Product verschwinden kann, ohne dass ein Factor Null ist. Wie Herr Frobenius (Borchardt's Journal, Bd. 84) erwähnt, kann man durch Verbindung von linearen Transformationen eine Rechnungsart schaffen, in welcher nur das commutative Gesetz der Multiplication wegfällt. Am Ende seiner Abhandlung legt er sich die Frage vor, welches geschlossene System von Transformationen

so beschaffen sei, dass die Multiplication nicht verschwindender Factoren niemals Null ergebe, und findet, dass nur die reellen, die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quaternionen dieser Bedingung genügen. Dadurch dürfte auch die Vermuthung des Verfassers (S. 19) ihre Bestätigung finden, dass die Elemente der Kinematik die Substrate dieser Untersuchungen sind.

Brilon. Dr. KILLING.

---

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Von Dr. J. WORPITZKY, Professor an der königl. Kriegs-Akademie und am Friedrichs-Werder'schen Gymnasium zu Berlin. Mit 81 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1880, Weidmann'sche Buchhandlung. XX, 784 S.

Ein eigenartiges Buch, nach Inhalt, Anordnung und Beweisführung vielfach abweichend von Werken gleichen Titels, so viele es deren in verschiedenen Sprachen giebt. Dem Inhalte nach begegnen wir neben der Ableitung von Differentialquotienten und Integralen, neben den bekannten Anwendungen auf Reihenentwickelungen von Functionen, auf Maximal- und Minimalwerthe, auf Ermittelung des Sinnes unbestimmter Functionalformen, neben der Erörterung geometrischer Sätze noch einer ziemlich beträchtlichen Anzahl von Reihen- und Productenfolgen mit Einschluss ihrer Convergenzbedingungen, welche insgemein in der sogenannten algebraischen Analysis als einer besondern Abtheilung der Mathematik behandelt zu werden pflegen, begegnen wir wichtigen Sätzen aus der Theorie der Gleichungen und den Anfängen der Functionentheorie, vermissen wir dagegen Alles, was auf Integration von Differentialgleichungen sich bezieht. Die Anordnung betreffend, heben wir nur fast auf's Gerathewohl hervor, in welcher Reihenfolge gewisse Hauptmaterien abgehandelt sind.

S. 42 ist das bestimmte Integral als Reihensumme definirt; S. 82 ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial x}$ bewiesen; S. 102 ist der Taylor'sche Satz abgeleitet, S. 164 ist von dem sogenannten Cauchy'schen Hauptwerthe divergenter Integrale die Rede; S. 202 kommen Aequivalente von infinitären Functionen in Frage, insofern $\varphi(x)$, $f(x)$ als äquivalent gelten, vorausgesetzt, dass $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, die Grenze auf ein $x$ bezogen, welches beide Functionen unendlich gross oder unendlich klein werden lässt; S. 303 erscheint der Definitionslehrsatz von der Differenzirbarkeit monogener Functionen nach $x + iy$; S. 378 beginnt die Auswerthung unbestimmter Formen, an welche die Lehre von den Partialbrüchen sich anschliesst; S. 459 ist das Euler'sche Integral erster Gattung, S. 501 die Gamma-

function als unendliches Product dargestellt; S. 551 hebt das Capitel über Maxima und Minima stetiger Functionen an; von S. 581 bis zum Schlusse finden wir endlich einen Anhang über die wichtigsten geometrischen Anwendungen. Dass bei solcher Anordnung, die wohl in keinem einzigen Werke verwandten Inhalts in gleicher Weise getroffen werden wird, fast sämmtliche Beweisführungen wenigstens der ersten Hälfte des Bandes wesentlich anders sein müssen, als man es gewöhnt ist, versteht sich von selbst.

Es fällt uns nicht ein, dem Verfasser dieses Systems, worunter wir sowohl den Inhalt, als besonders die Anordnung verstehen, welcher sein Buch einen grossen Theil des ihm anhaftenden Interesses verdankt, dasselbe verübeln zu wollen. Es fällt uns noch weniger ein, es für das allein richtige zu erklären, dem zu Liebe alle abweichenden Anordnungen verlassen werden müssten. Vielleicht wird das frühzeitige Vermengen von Differential- und Integralrechnung, welches seit einigen Jahrzehnten in Vorlesungen und Büchern sich Bahn bricht, mehr und mehr in vorwiegende Uebung treten, allein im Uebrigen dürfte es dem Mathematiker der Zukunft, wie der Vergangenheit gestattet bleiben, auf eigene Façon selig zu werden. Gewiss soll und muss jeder gewissenhafte Lehrer von der vorwiegenden Trefflickkeit seines eigenen Ganges auf's Tiefste überzeugt sein, denn sonst würde er ihn nicht wählen; aber ein wenig Nachsicht gegen Andersdenkende ist doch wohl am Platze. Insbesondere dürfte eine Vorrede, welche weniger streitsüchtig gehalten wäre, dem Leser jedenfalls ein günstigeres Vorurtheil erwecken. Wir verhehlen es nicht, dass Herrn Worpitzky's Vorrede den entgegengesetzten Eindruck bei uns hervorgerufen hat und dass es in unseren Augen ein grosses Lob des Werkes enthält, wenn wir ferner bekennen, dass wir im Weiterlesen die Vorrede vergessen haben.

Für die Beweisführungen ist es kennzeichnend, dass Herr Worpitzky sich nirgends, am Anfange so wenig, wie am Schlusse des Werkes, scheut, die Schwierigkeiten deutlich hervortreten zu lassen. Ob ein Schüler, der zum ersten Male mit der Analysis bekannt wird, diesen Feinheiten folgen kann, wissen wir nicht, das ist Sache einer Erfahrung, welche wohl nur dem Verfasser selbst zur Verfügung steht; aber das wissen wir, dass der Schüler, welcher im Stande war, einen so gegebenen Unterricht zu geniessen, vortrefflich vorbereitet sein muss, jeden noch so schwierigen Gegenstand höherer Mathematik in sich aufzunehmen und die in jenen Gebieten so nothwendige Zweifelsucht an der Strenge der Entwickelungen vollauf erworben hat. Um an einigen Beispielen kenntlich zu machen, von welchen Schwierigkeiten wir reden, bemerken wir, dass schon S. 8 die Function $y=\frac{1}{3+10^{\frac{1}{1-x}}}$ auftritt, die an der Stelle

$x=1$ eine Unstetigkeit in Gestalt eines Sprunges von endlicher Grösse darbietet; S. 88 ist nachgewiesen, dass das Integral $\int\limits_c^y \left(x+\frac{1}{\mu+\nu^{\frac{1}{y}}}\right)^n dy$ nicht ohne Weiteres nach seiner oberen Grenze differentiirt werden darf, weil der Differentialquotient bei $y=0$ einen Sprung von der Grösse $x^n-\left(x+\frac{1}{\mu}\right)^n$ macht; S. 217 ist an der Entwickelung $\frac{1}{1+x}=(1-x)x^0+(1-x)x^2+(1-x)x^4+\ldots+(1-x)x^{2r}+\ldots$, welche für $-1<x<1$ giltig ist, gezeigt, dass bei $x=1$ die bis dahin continuirliche Reihe rechts vom Gleichheitszeichen aufhört, dem Substitutionswerthe $\frac{1}{2}$ zu entsprechen, der bei $x=1$ aus dem geschlossenen Ausdrucke links hervorgeht, so dass Grenzwerth und Substitutionswerth als wohl zu unterscheidende Begriffe erscheinen; S. 582 ist an der Curve $y=\int\limits^x \sin\frac{1}{x}\,dx$ gezeigt, dass dieselbe an dem Punkte, dessen Abscisse Null ist, keine Tangente besitzt u. s. w. Dass bei dieser Neigung zur Strenge die Convergenz von bestimmten Integralen und von unendlichen Reihen besonders genau untersucht wird, bedarf kaum der Erwähnung. Die Convergenz der Reihen wird auf die von Integralen zurückgeführt, und bei dieser spielt neben und mit Cauchy's singulären bestimmten Integralen (S. 51 flgg.) namentlich die Function $l^0x.l^1x.l^2x\ldots l^{n-1}x.(l^nx)^{1+p}$ eine Hauptrolle, deren Graduirung (d. h. Untersuchung des Ordnungsgrades, in welchem sie unendlich wird) S. 148 erörtert ist, und welche dann S. 202 flgg. als Aequivalent verwerthet wird.

An verschiedenen Stellen sind die Erfinder der betreffenden Sätze namhaft gemacht. Vermuthlich durch einen Druckfehler ist S. 108 von der Legendre'schen Form des Restes der Taylor'schen Reihe die Rede, wo es die Lagrange'sche Form heissen soll. Etwas zweifelhafter sind wir, ob S. 81 die sogenannte Bernoulli'sche Schlussweise von $n$ auf $n+1$ nur durch einen Druckfehler für Johann Bernoulli beansprucht ist. Thatsächlich hat nicht Johann, sondern Jacob Bernoulli in den Acta eruditorum vom September 1686 p. 360 die Methode bekannt gemacht, welche übrigens richtiger die Pascal'sche Methode genannt würde, da auch dieser Mathematiker sich ihrer bereits mit dem vollen Bewusstsein ihrer Brauchbarkeit bediente. Die Verweisungen hätten übrigens vielfach vermehrt werden können. So hätte die bedingte Convergenz die passendste Gelegenheit geboten, den Namen Dirichlet's zu nennen; so wäre der Integralsinus und Integralcosinus Schlömilch's, welche S. 481 vorkommen, ihrem Bearbeiter zuzuweisen; so hätte Euler's Satz von den homogenen Functionen S. 665 als solcher besonders genannt werden sollen. Dagegen würden viele Leser auf Neubezeichnungen, wie

Tieffunctionen statt Binomialcoefficienten (S. 76), oder das neue Logarithmenzeichen (S. 23, 126 und mehr), oder *M* statt *C* für die Euler'sche Constante (S. 490) muthmasslich gern verzichten.

Wir haben einige wenige Ausstellungen uns gestattet; wir könnten sie vermehren. Ist es doch fast selbstverständlich, dass bei so mannichfaltigen Neuerungen, wie das vor uns liegende Werk sie darbietet, nicht eine jede jeden Leser befriedigt, auch nicht immer befriedigen kann. Aber die Thatsache, dass in einem so vielbehandelten Gegenstande Neuerungen überhaupt auftreten, und gar in solcher Anzahl, ist unter allen Umständen anzuerkennen und wird gewiss dem Worpitzky'schen Buche die Gefahr ersparen, todtgeschwiegen zu werden.

CANTOR.

---

**Darstellende Geometrie**, bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER, Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden. Breslau 1880, bei Eduard Trewendt. 118 S. XII lithogr. Tafeln.

Mit dieser Schrift schliesst der I. Band des mathematischen Handbuches der Encyklopädie der Naturwissenschaften, welcher dadurch die Stärke von 41 Druckbogen erreicht hat. Gehört die darstellende Geometrie zur elementaren Mathematik oder gehört sie bereits den einigermassen höheren Theilen an? Der Verfasser hat die Frage im ersteren Sinne entschieden, indem er seine Bearbeitung noch im ersten Bande erscheinen liess. Der Leiter des mathematischen Theiles der Encyklopädie neigte vielleicht der zweiten Meinung zu und übertrug deshalb die Bearbeitung der darstellenden Geometrie dem Verfasser des II. Bandes. Jedenfalls gereicht es dem Handbuche zum Vortheil, dass darstellende und analytische Geometrie von derselben Feder geschrieben sind. Nur so liess eine gewisse Vollständigkeit sich erreichen, nur so überflüssige Wiederholung sich vermeiden. In der darstellenden Geometrie wird der Leser mit den Begriffen der Projection und der Spur eines Raumgebildes bekannt. Die Projection des Kreises verschafft ihm die Kenntniss der Ellipse, deren Haupteigenschaften von dieser Entstehungsweise aus abgeleitet werden. Gebilde aus mehreren Ebenen zusammengesetzt folgen sodann; die drei- und mehrseitige Ecke wird projicirt; auch der Fall, dass Vielflächner sich gegenseitig durchdringen, wird berücksichtigt. Rotationscylinder, Kugel und Rotationskegel geben sodann Gelegenheit, auch die Projection von Körpern mit gekrümmter Oberfläche zu zeichnen und wieder Durchdringungsaufgaben zu lösen. Die Durchdringung des Kegels durch eine Ebene führt dabei zu den Kegelschnitten. Die angewandten Projectionen sind fortwährend Normalprojectionen, und diese bleiben auch Untersuchungsgegenstand in dem kurzen der Axonometrie gewidmeten

Capitel, bis hier (auf S. 651) der Uebergang zur Centralprojection erfolgt. Die auf sechs Seiten zusammengedrängte Besprechung der Schattenconstruction bildet den Schluss des Abschnittes und mit ihm des Bandes.

CANTOR.

---

**Untersuchung des Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind.** Inaugural-Dissertation von F. KROES.

Das Interesse, welches in den Kreisen der Geometer jeder Untersuchung entgegengebracht zu werden pflegt, die Steiner'sche Aufgaben behandelt, mag den hiermit beabsichtigten Hinweis auf die vorliegende kleine Arbeit rechtfertigen. Dieselbe verdient in der That um so mehr Beachtung, als man schon vom zweiten Paragraphen an die Ueberzeugung gewinnt, dass man es nicht blos mit Steiner'schen Resultaten, sondern auch mit Steiner'schen Methoden zu thun hat.

Möge der Herr Verfasser bald auch den letzten Theil der von ihm so fleissig, wie erfolgreich angefangenen Untersuchung beenden und, wie hier die Enveloppe und die Mittelpunktscurve des betreffenden Kegelschnittbüschels, so auch den Ort der Brennpunkte desselben kennen lehren.

Coesfeld, den 18. April 1881. K. SCHWERING.

# Bibliographie

vom 16. December 1881 bis 15. Februar 1882.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften 1882. 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 8, 2. Bd. 4. Stück. (Vogel, Beobachtungen d. gr. Cometen v. 1881.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. II. Abth. 83. Bd. 5. Heft u. 84. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. 13 Mk. 90 Pf.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. 2. Jahrg. 1882. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 10 Mk. 80 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. C. Ohrtmann. 11. Bd., 1879. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fortschritte der Physik. 33. Jahrg., redig. v. B. Schwalbe. 2. Thl. (Optik, Wärme und Elektricität im Jahre 1877). Berlin, G. Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. Wiedemann. Jahrg. 1882, 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

——, Beiblätter hierzu. Jahrg. 1882, Heft 1. Ebendas. pro compl. 16 Mk.

Repertorium für Meteorologie, herausgegeben v. d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften, redigirt v. H. Wild. 7. Bd. 2. Heft. Petersburg und Leipzig, Voss. 9 Mk.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Weissenborn, H., Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti. Halle, Schmidt. 1 Mk.

### Reine Mathematik.

Schlaefli, L., Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. Bern, Huber & Comp. 4 Mk.

LÜHN, O., Ueber Functionen zweier Variabelen, die sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. (Dissert.) Heidelberg, Winter. 1 Mk. 20 Pf.

HAMILTON, W., Elemente der Quaternionen; deutsch v. P. GLAN. Bd. I, Thl. 2 (Schluss v. Bd. I). Leipzig, Barth. 4 Mk.

GREVE, Lehrbuch der Mathematik. 2. Curs., 2. Theil (Arithm.). Berlin, Stubenrauch. 1 Mk.

MATTHIESSEN, L., Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Cöln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk. 50 Pf.

HOHL, A., Elementare geometrisch-algebraische Uebungen. Tübingen, Fues. 4 Mk.

FUSS, K., Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie u. Stereometrie. 2. Thl.: Stereometr. Aufg. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

HOHL, A., Die Lehre von den Polyedern, rein geometrisch dargestellt. Neue Ausg. Tübingen, Fues. 3 Mk.

GERKE, R., Aufgaben aus d. darstellend. Geometrie. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 6 Mk.

——, Die Linearperspective nebst Schattenconstructionen. Ebendas. 2 Mk.

SCHLÖMILCH, REIDT & HEGER, Handbuch der Mathematik. (I. Thl. d. Encyklopädie d. Naturwissenschaften.) Breslau, Trewendt. 39 Mk.

ABEL, N. H., Oeuvres complètes. Nouvelle édition, publiée par L. SYLOW et S. LIE. 2 tomes. Christiania und Leipzig, Teubner. 24 Mk.

## Angewandte Mathematik.

BÖKLEN, O., Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Reutlingen, Kocher. 2 Mk.

ISRAEL, C., Astronomische Anwendungen eines Satzes der sphärischen Transversalenlehre. Halle, Schmidt. 50 Pf.

HILFIKER, J., Die astronomischen Längenbestimmungen mit bes. Rücksicht auf neuere Methoden. Aarau, Sauerländer. 1 Mk. 20 Pf.

ISRAEL, C., Ueber gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit und der Schiefe der Ekliptik. Halle, Schmidt. 50 Pf.

HILDEBRANDT, C., Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugelfläche. (Dissert.) Göttingen, akad. Buchhdlg. 1 Mk. 50 Pf.

COLLET, A., Traité théorique et pratique de la régulation et compensation du compas. Paris, Challamel (Leipzig, Brockhaus). 10 Fr.

## Physik und Meteorologie.

GOLDSTEIN, E., Ueber das Bandenspectrum der Luft. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

SUCHSLAND, E., Das Zodiakallicht, eine Folge des Baues unseres Planetensystems. Stolp, Schrader. 50 Pf.

Dvorak, V., Ueber einige akustische Bewegungserscheinungen, insbes. über das Schallradiometer. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Scheffler, H., Das Wesen der Elektricität, des Galvanismus u. Magnetismus. 2. Supplem. zum 2. Thl. d. „Naturgesetze etc.“ Leipzig, Förster. 3 Mk.

Hankel, W., Elektrische Untersuchungen. 15. Abhdlg.: Ueber die aktino- und piezoelektr. Eigensch. d. Bergkrystalls und ihre Beziehungen z. d. thermoelektr. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Doubrava, S., Versuch einer neuen Darstellung der elektrischen Grunderscheinungen. 1. Thl. Prag, Slavik & Borovy. 2 Mk. 20 Pf.

Schellen, H., Die magneto- und dynamoelektrischen Maschinen, ihre Construction und Anwendung zur Beleuchtung und Kraftübertragung. 2. Aufl. Cöln, Du Mont-Schauberg. 16 Mk.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8. Aufl., bearb. v. L. Pfaundler. 3. Bd. 2. Abth. (Schluss). Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

Fig. 1.

Fig. 4.

In meinem Verlage ist soeben erschienen:

Die

# Fortschritte der Physik

**im Jahre 1877.**

Dargestellt

von

## der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

**XXXIII. Jahrgang.**

Redigirt von

**Prof. Dr. B. Schwalbe.**

**II. Abtheilung:** enthaltend Optik, Wärmelehre, Electricitätslehre.

Preis: 10 Mark 50 Pf.

---

**Jahrbuch**

über die

# Fortschritte der Mathematik.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren

**Felix Müller** und **Albert Wangerin**

herausgegeben von

**Carl Ohrtmann.**

Elfter Band.

**Jahrgang 1879.**

(In 3 Heften.)

**Drittes Heft.** Preis: 6 Mark.

Preis des hiermit vollständigen XI. Bandes: 16 Mark 80 Pf.

Berlin, den 4. Februar 1882. **G. Reimer.**

---

## Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1882.

Soeben sind erschienen:

**Dronke**, Dr. **Adolf**, Direktor der Realschule I. O. zu Trier, **Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung.** Unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

**Günther**, Dr. **Siegmund**, Professor am Königl. Gymnasium zu Ansbach, **parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie.** Eine vergleichende Untersuchung. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 2. 80.

**Klein, Felix**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, **über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale.** Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. gr. 8. geh. n. ℳ 2. 40.

**Milinowski, A.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. Elsaſs, **elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte.** Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 8. 80.

Leipzig, im Februar 1882. **B. G. Teubner.**

# INHALT.


III. Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel. Von Ferd. M[illegible], Lehrer an der Bauschule in Deutsch-Krone (Taf. I Fig. 1–12) . . . [illegible]

IV. Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s)=\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. Von Dr. Ad. Hurwitz in Hildesheim (Taf. I Fig. 14 und 15) . . . [illegible]

V. Untersuchungen über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen. Von K. Schwering in Coesfeld [illegible]

## Kleinere Mittheilungen.

IV. Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung. Von J. Cardinaal in Tilburg (Holland) . . . [illegible]

V. Bemerkung zur Kegelschnitt-Theorie. Von M. Pasch in Giessen . . . [illegible]

VI. Bemerkung über projective Punktreihen. Von M. Pasch in Giessen . . . [illegible]

VII. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppelt periodischen Functionen betreffend. Von Ad. Schumann . . . [illegible]

VIII. Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks. Von P. v. Schaewen in Saarbrücken . . . [illegible]

## Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate. Von Friedrich Hultsch in Dresden (Taf. I Fig. 13) . . . [illegible]

**Recensionen:**

Steinhauser, Anton, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkarten-Projection. Von Dr. S. Günther . . . [illegible]

Radicke, A., Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Von Dr. S. Günther [illegible]

Tait, P. G., Elementares Handbuch der Quaternionen. Autorisirte Uebersetzung von Dr. G. v. Scherff. Von W. Unverzagt [illegible]

Scheffler, Dr. H., Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Von Dr. Killing . . . [illegible]

Unverzagt, Prof., Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen. Von Dr. Killing . . . [illegible]

Worpitzky, Dr. J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Von Cantor . . . [illegible]

Hegen, Dr. Richard, Darstellende Geometrie. Von Cantor . . . [illegible]

Krohs, F., Untersuchung des Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind. Von K. Schwering . . . [illegible]

**Bibliographie vom 16. December 1881 bis 15. Februar 1882:**

Periodische Schriften . . . [illegible]

Geschichte der Mathematik und Physik . . . [illegible]

Reine Mathematik . . . [illegible]

Angewandte Mathematik . . . [illegible]

Physik und Meteorologie . . . [illegible]


---

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

JUN 30 1882

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**

**27. Jahrgang. 3. Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 7. Juni 1882.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

Bei **S. Hirzel** in **Leipzig** ist soeben erschienen:

# Analytische Geometrie

von

**Dr. Richard Baltzer,**

Professor an der Universität Giessen, Mitglied der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Mit 65 Holzschnitten. gr. 8. Preis geheftet ℳ 8. —

---

In meinem Verlage ist soeben erschienen:

# Jacob Steiner's gesammelte Werke.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften.

**Zweiter (letzter) Band.**

Mit 23 Figurentafeln.

Herausgegeben von **K. Weierstrass.**

Preis: 18 Mark.

---

# Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.

Festschrift

zu

Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum,

10. September 1881,

von

**L. Kronecker.**

Angefügt ist eine neue Ausgabe der am 10. Sept. 1845 erschienenen Inaugural-Dissertation:
**De unitatibus complexis.**

Preis: 6 Mark.

Berlin, den 15. April 1882. **G. Reimer.**

---

Soeben wurde fertig und steht Interessenten gratis und franco zu Diensten:

**Catalog XVII unseres antiquarischen Bücherlagers,** enthaltend u. A. die hinterlassene Bibliothek des Herrn geh. Rath Prof. Dr. Bruhns (Astronomie, Geodäsie, Mathematik und verwandte Wissenschaften).

Leipzig, Mai 1882. **Weiss & Schack.**

---

# Sechsstellige logarith.-trigonom. Tafeln.

Von **Dr. C. BREMIKER.** 7. revidirte Auflage. 4 ℳ 20 ₰.

Diese **6stelligen** Tafeln gewähren bei **grösserer Sicherheit** und **geringerem Zeitaufwand** eine ganz wesentliche Erleichterung beim Rechnen; sie sind deshalb von Männern der Wissenschaft **allen höheren Lehranstalten, technischen Instituten, Ingenieuren, Baumeistern etc.** empfohlen worden. Der **„Grosse Generalstab der Preuss. Armee“** benutzt jetzt ausschliesslich **diese Tafeln.**

**Nicolaische Verlagsbuchhandlung in Berlin.**

# VI.

# Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven.

Von

Dr. Chr. Wiener,

Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule in Karlsruhe.

Hierzu Taf. II Fig. 1—11.

Indem ich im Folgenden eine Untersuchung der bezeichneten Evoluten, und zwar in möglichst geometrischer Weise, zu geben beabsichtige, wird es nützlich sein, derselben in Kürze die Entwickelung der Sätze und Constructionen, welche dabei in Anwendung kommen, vorauszuschicken.

1. Auf der festen Curve $f$ (Fig. 1) rolle ohne Gleiten die wälzende $w$. $A$ sei der augenblickliche Berührungspunkt beider, $B$ und $B'$ seien die zu $A$ benachbarten Punkte beider Curven, welche beim Rollen miteinander zur Deckung kommen, so dass Bog. $AB =$ Bog. $AB'$; $AM$, $BM$ seien Normalen der $f$, deren Schnittpunkt $M$ bei unendlich kleinem $AB$ der Krümmungsmittelpunkt der $f$ in $A$ ist; $AM'$, $B'M'$ seien Normalen der $w$, welche sich unter derselben Bedingung im Krümmungsmittelpunkte $M'$ der $w$ in $A$ schneiden. $P$ sei der beschreibende Punkt, $c$ die Rollcurve, so ist bekanntlich die Verbindungslinie $PA$ von $P$ mit dem augenblicklichen Berührungspunkte $A$ die Normale der $c$ in $P$.

In der zweiten Lage berührt $w$ die $f$ in $B$, $B'M'$ gelangt in die Gerade $BM$, $B'P$ nach $BQ$, $Q$ ist der dem $P$ benachbarte Punkt der $c$, $QB$ eine Normale derselben, der Schnittpunkt $K$ von $PA$, $QB$ für unendlich kleine $AB$ und $PQ$ der Krümmungsmittelpunkt der $c$ in $P$.

Setzen wir

$$MA = r,\quad AM' = r',\quad AP = p,\quad KA = q,$$
$$\angle M'AP = \varphi,\quad \angle M'B'P = \angle MBK = \varphi',$$
$$\angle AMB = \alpha,\quad \angle AM'B' = \alpha',\quad \angle AKB = \beta,\quad \angle APB' = \beta',$$

und nehmen den Sinn $MA$ als positiv, so ist $r$ stets, und $r' = AM'$ bei der Lage, wie in der Figur, positiv.

Es folgt nun aus den Vierecken $AMBK$ und $AM'B'P$

$$\varphi + \alpha = \varphi' + \beta,\quad \varphi' + \alpha' = \varphi + \beta',$$

und daraus

1) $$\alpha + \alpha' = \beta + \beta'.$$

Setzt man das Bogenelement $AB = AB' = ds$, zieht aus $P$ im Winkel $\beta'$ den Kreisbogen $AD'$, aus $K$ in $\beta$ den $AD$, so ist $AD' = AD = ds \cos\varphi$ und

$$\alpha = \frac{ds}{r}, \quad \alpha' = \frac{ds}{r'}, \quad \beta = \frac{ds\cos\varphi}{q}, \quad \beta' = \frac{ds\cos\varphi}{p}.$$

Diese Werthe, in 1) eingesetzt, liefern

2) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{\cos\varphi}.$$

2. Man findet nach dieser Formel $q$ oder $K$ (Fig. 2), wenn man $AN \perp AP$, sodann $PM'$ zieht, beide Linien in $N$ schneidet, dann $NM$ zieht; diese trifft die $PA$ in $K$. Denn zieht man $KE \parallel MA$, schneidet $KE$ mit $NP$ und $NA$ in $E$, bezw. $D$, und fällt $MF \perp NA$, so ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken die Proportionen

$$\frac{KD + DE}{KA} = \frac{MA + AM'}{MF} \quad \text{oder} \quad \frac{KD + DE}{q} = \frac{r + r'}{r\cos\varphi}$$

und

$$\frac{KA + AP}{AP} = \frac{KD + DE}{AM'} \quad \text{oder} \quad \frac{q + p}{p} = \frac{KD + DE}{r'},$$

durch deren Multiplication 2) folgt.*

Diese Construction, in Verbindung mit der Gleichung 2), drückt folgenden Lehrsatz aus: „Wenn man durch einen Punkt $A$ im Innern eines Winkels $PNK$ eine beliebige Gerade $MAM'$ zieht, auf welcher die Schenkel des Winkels die Strecken $MA = r$ und $AM' = r'$ abschneiden, so ist für alle solche Geraden

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{\sin NAM} = const.“$$

3. Lässt man den beschreibenden Punkt $P$ (Fig. 2) verschiedene Lagen auf $AP$ einnehmen, so ergiebt sich:

1. Die Reihe der $P$ ist projectiv zu der Reihe der zugehörigen $K$. Denn beide Reihen sind mit der Reihe der $N$ auf $AN$ perspectiv aus $M'$, bezw. aus $M$.
2. So lange $AP$ nicht senkrecht auf $AM$ steht und $M$ nicht in $M'$ liegt, ergiebt die Construction zu jedem $P$ einen davon getrennten Punkt $K$, ausser wenn $P$ in $A$ fällt. Daher ist $A$ der einzige Doppelpunkt der Reihen der $P$ und der $K$, und der Krümmungshalbmesser $PK$ wird Null, wenn $P$ in $A$ liegt.
3. Ist $AP \perp AM$, aber nicht $M$ in $M'$, so ergiebt die Construction zu jedem $P$ den Punkt $A$ als Krümmungsmittelpunkt $K$.

---

* Diese Construction der Formel 2) rührt von Euler her (Novi commentarii der Petersburger Akademie, Bd. 11 für 1765, S. 219); der Beweis, den er zufügte, ist trigonometrisch. Den obigen Beweis lieferte mein Sohn Otto.

4. Ist $M$ in $M'$, aber nicht $AP \perp AM$, so fällt $K$ in $P$ und der Krümmungshalbmesser ist für jeden beschreibenden Punkt $= 0$.
5. Ist $AP \perp AM$ und $M$ in $M'$, so lässt die Construction den Punkt $K$ unbestimmt. Der Krümmungshalbmesser der Rollcurve $c$ ist dann durch $r$ und $r'$ nicht bestimmt, sondern erst durch die Art der Aenderung beider. Im Allgemeinen schneiden sich dann $w$ und $f$ in $A$, und man kann sich leicht vergegenwärtigen, dass die Rollcurve dann in $P$ einen Schnabelpunkt besitzt, welcher wirklich jede Grösse des Krümmungshalbmessers zulässt.
6. Liegt $P$ auf $MM'$, z. B. in $P'$, so lässt die gegebene Construction keine unmittelbare Anwendung zu. Es muss aber für $K'$ nach Gleichung 2), da $\varphi = 0$, $p = AP'$, $q = K'A$ wird, gelten
$$\frac{1}{AP'} + \frac{1}{K'A} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$
Diese Bedingung erfüllt man durch irgend ein schon bestimmtes solches Paar $P$, $K$, welches auf einer schief zu $AM$ durch $A$ gehenden Geraden liegt, wenn man $AN \perp AP$ zieht, $PP'$ mit $AN$ in $N'$ schneidet und $N'K$ zieht; diese trifft die $AM$ in $K'$. Denn weil $P$ und $K$ beschreibender und Krümmungsmittelpunkt sind, ist nach Gleichung 2)
$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{KA} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{\cos\varphi};$$
und nach dem Lehrsatz der vorigen Nummer gilt im Winkel $PN'K$
$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{KA} = \left(\frac{1}{AP'} + \frac{1}{K'A}\right)\frac{1}{\cos\varphi},$$
aus welchen beiden Gleichungen die vorhergehende folgt, welche daher durch die Construction erfüllt ist.
7. Die Punktreihen der $P$ und $K$ sind die senkrechten Projectionen der Punktreihen der $P'$ und $K'$, was man einsieht, wenn man $N'$ auf $AN$ ins Unendliche rückt.
8. Beschreibt man über $AM'$ und $MA$ als Durchmesser Kreise, so schneidet jede durch $A$ gelegte Gerade den ersteren Kreis in einem beschreibenden Punkte $P''$, den letzteren in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $K''$, weil $AP''M'$ und $MK''A$ rechte Winkel sind. Dasselbe gilt von den Kreisen mit den Durchmessern $AP'$, $K'A$.

4. Diese Sätze wollen wir auf die cyklischen Curven oder Radlinien anwenden, d. i. auf diejenigen Rollcurven, bei welchen die feste $f$ und die wälzende Curve $w$ Kreise, einschliesslich der geraden Linie, sind. Wir haben sie in einem früheren Aufsatze* unterschieden

* Bd. XXVI dieser Zeitschrift, S. 257. In diesem Aufsatze habe ich mitgetheilt, dass ich kurz vor seiner Absendung von einer früheren Veröffentlichung Proctor's (London 1878) Kenntniss erhalten habe, worin er die doppelte Ent-

als eine Cykloide, wenn $f$ eine Gerade und $w$ ein Kreis, eine Kreisevolvente, wenn $f$ ein Kreis und $w$ eine Gerade, eine Epicykloide, wenn $f$ und $w$ Kreise und $w$ ausserhalb $f$ liegt, eine Hypocykloide, wenn $f$ und $w$ Kreise und $w$ innerhalb $f$ liegt; und diese alle als gemein, geschweift oder verschlungen, je nachdem der beschreibende Punkt auf $w$, oder mit dem Mittelpunkte der $f$ auf entgegengesetzter oder auf übereinstimmender Seite von $w$ liegt. Wir erhielten dadurch zwölf mögliche Fälle, wovon wir aber die vier der gemeinen Curven als bekannt hier nicht betrachten, sondern nur daran erinnern, dass die Evoluten dieser Curven mit ihnen gleichartige Curven sind, deren Scheitel in den Spitzen der ursprünglichen Curven liegen.

Von den im angeführten Aufsatze nachgewiesenen beiden möglichen Entstehungsweisen einer verallgemeinerten cyklischen Curve wollen wir stets diejenige wählen, bei welcher das Verhältniss der absoluten Werthe der Halbmesser von $w$ und $f$ das kleinere ist. Der durch den beschreibenden Punkt concentrisch mit dem wälzenden Kreise gelegte Kreis heisst der beschreibende $b$.

5. Die geschweifte Epicykloide. Es sei (Fig. 3) $f$ der feste Kreis mit dem Mittelpunkte $M$ und dem Halbmesser $MA_2 = r$, $M'$ der Mittelpunkt und $A_2M' = r'$ der Halbmesser des wälzenden Kreises $w$, welcher ausserhalb $f$, und ausserhalb dessen, unserer Wahl in der vorigen Nummer entsprechend, auch $f$ liegt. $A$ sei der innerhalb $w$ liegende beschreibende Punkt, durch welchen aus $M'$ der beschreibende Kreis $b$ gezogen ist. $A_2$ ist der Berührungspunkt von $w$ und $f$; der Durchmesser $MA_2M'$ schneide $b$ in den zwei Punkten $A$ und $B''$, wovon $A$ der dem $A_2$ nähere sei und als Anfangslage des beschreibenden Punktes angesehen werde.

Um einen Punkt $G$ des ersten halben Ganges der Curve zu erhalten, trage man auf $f$ und $w$ von $A_2$ aus in entgegengesetztem Sinne zwei gleiche Bogen, nicht grösser, als den halben Umfang von $w$, sonst von beliebiger Länge $A_2G_2 = A_2G'$ auf, ziehe den Halbmesser $M'G'$ und schneide

---

stehungsweise der verallgemeinerten cyklischen Curven schon behandelte. Unterdessen habe ich erfahren, dass die doppelte Entstehungsweise noch früher von Herrn Professor T. Rittershaus veröffentlicht worden ist (Verh. d. Vereins f. Gewerbfl. i. Preussen, 1874, Heft III, S. 4), aber noch unter Beibehaltung der drei Arten: Epi-, Hypo- und Pericykloide; und dass ferner etwa zu der Zeit, als ich jenen Aufsatz absendete (October 1880), in dieser Zeitschrift (Bd. XXV, S. 263) die doppelte Entstehungsweise von Herrn A. Vietor eingehend untersucht und darnach eine neue Eintheilungsweise vorgeschlagen wurde, die von der meinigen sich nur dadurch unterscheidet, dass das Wort „gedehnt“ statt „geschweift“ gebraucht ist. Die Kennzeichen der Arten hat Herr Vietor nur der einen, gebräuchlicheren Entstehungsweise entnommen, während die von mir aufgestellten für beiderlei Entstehungsweisen zugleich gelten.

ihn mit $b$ in $G''$. Denkt man sich nun das Rollen ersetzt durch eine Drehung von $w$ um $M'$, bis $A_2$ nach $G'$ und $A$ nach $G''$ gelangt, und durch eine darauffolgende Drehung von $w$ und $b$ um $M$, bis der Berührungspunkt von $A_2$ nach $G_2$ kommt, so gelangt $G''$ nach $G$. Man erhält $G$, indem man die Gerade $G''A_2$ zieht, mit $f$ in dem zweiten Punkte $G'''$ schneidet, auf $f$ den Bog. $G'''G_3 =$ Bog. $A_2 G_2$ macht, die Sehne $G_2 G_3$ zieht und auf ihrer Verlängerung $G_2 G = A_2 G''$ aufträgt.

Den Krümmungsmittelpunkt $G_1$ der $c$ in $G$ bestimmt man nach Nr. 2, indem man $A_2 G_4 \perp A_2 G''$ zieht, sie mit $G''M'$ in $G_4$ schneidet, $G_4 M$ zieht, mit $A_2 G''$ in $G_5$ schneidet und auf $G_2 G_3$ die $G_2 G_1 = A_2 G_5$ aufträgt.

6. Die besonderen Punkte der Curve und ihrer Evolute sind folgende:

1) Die Scheitel $A$, $C$ und $B$, welche aus den Punkten $A$ und $B''$ des Kreises $b$ entstehen. Man macht auf $f$ den Bog. $A_2 C_2 =$ Umf. $w$, zieht $MC_2$, trägt auf seiner Verlängerung $C_2 C = A_2 A$ auf, so sind $A$ und $C$ bestimmt, ebenso Bog. $A_2 B_2 = \frac{1}{2}$ Umf. $w$, $B_2 B = A_2 B''$. Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $A_1$, $C_1$, $B_1$ erhält man nach Nr. 3, 6), indem man die auf irgend einer schief gegen $MA_2$ durch $A_2$ gelegten Geraden schon bestimmten Punkte $G''G_5$ benutzt (als welche auch die Fusspunkte der aus $M'$ und $M$ auf $A_2 G''$ gefällten Senkrechten dienen könnten, Nr. 3, 7). Man zieht nämlich $AG''$, schneidet sie mit $A_2 G_4$ in $A_4$, zieht $A_4 G_5$ und schneidet sie mit $MA$ in $A_1$, macht auch $CC_1 = AA_1$. Entsprechend $B''G''B_4$, $B_4 G_5$, $B_5$, $B_1$.

7. 2) Der Wendepunkt $W$ der $c$, für welchen der Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt. Man construirt zuerst auf $MA_2$ den zu dem unendlich fernen Krümmungsmittelpunkte gehörigen beschreibenden Punkt $U$, entweder in der zu der vorigen Construction umgekehrten Weise, welche aber in der Figur nicht angegeben ist ($G_5 U_4 \parallel MA_2$, $G_5 U_4$ geschnitten mit $A_2 G_4$ in $U_4$, $U_4 G''$ geschnitten mit $MA_2$ in $U$); oder man beachtet, dass in Formel 2) $\varphi = 0$, $q = \infty$, $p = A_2 U$ wird, daher, weil auch $A_2 B' = 2r'$,

$$\frac{1}{A_2 U} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}, \quad A_2 U = \frac{rr'}{r+r'}, \quad \frac{A_2 U}{A_2 B'} = \frac{\frac{1}{2} r}{r+r'},$$

wornach die Construction in der Figur ausgeführt ist.

Nun können alle unendlich fernen Punkte als auf einem Kreise liegend angesehen werden, welcher $f$ in $A_2$ berührt; daher enthält der über $A_2 U$ als Durchmesser gezeichnete Kreis alle Punkte, deren zugehörige Krümmungsmittelpunkte im Unendlichen liegen (3, 8).

Der Schnittpunkt $W''$ dieses Kreises mit demjenigen $b$ bestimmt dann in derselben Weise, wie $G''$ den $G$, den Wendepunkt $W$ der Curve $c$, und ihre Normale $WW_2$, welche Asymptote der Evolute ist.

Verändert sich $r$ von 0 zu $\infty$, so verändert sich $A_2 U$ von 0 zu $r'$ und $U$ bewegt sich von $A_2$ zu $M'$.

Anm. In der Kinematik wird die Bewegung eines starren ebenen Systems in einem festen System auf das Rollen einer Curve $w$ des beweglichen auf einer Curve $f$ des festen Systems zurückgeführt. Der augenblickliche Berührungspunkt $A_2$ ist der einzige augenblicklich ruhende Punkt und heisst der Pol oder das Momentancentrum, $w$ und $f$ heissen die Polbahnen im beweglichen, bezw. festen Systeme, $U$ heisst der Wendepol, der Kreis $UW''A_2$ der Wendekreis.

8. 3) Zwischen $B$ und $W$ wird sich noch ein Punkt $G$ grösster Krümmung der $c$ ergeben. Er entstehe aus $G''$, wozu der Krümmungsmittelpunkt $G_5$ gehört. $G''$ muss auf dem Kreise $b$ so bestimmt werden, dass der Krümmungshalbmesser $G_5 G'' = G_1 G = k$ ein Minimum ist. Finden wir, dass $G$ der einzige zwischen $W$ und $B$ liegende Punkt grössten oder kleinsten Krümmungshalbmessers $G_1 G$ ist, so folgt aus der Nachbarschaft mit $W$, worin $k$ unendlich, dass $G_1 G$ ein Minimum, sodann dass $B_1 B$ ein Maximum ist. Setzt man, wie in Nr. 1, $A_1 G'' = p$, $G_5 A_2 = q$, also $k = p + q$, ferner $\angle M' A_2 G'' = \varphi$, so ergiebt sich aus Gleichung 2)

$$q = \frac{p r r' \cos\varphi}{p(r+r') - r r' \cos\varphi}.$$

Differenzirt man nach $\varphi$ und beachtet, dass $p$, $q$ und $\varphi$ veränderlich, so erhält man nach einer Vereinfachung

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{1}{(p(r+r') - r r' \cos\varphi)^2} \left\{ - r^2 r'^2 \cos^2\varphi \frac{dp}{d\varphi} - p^2 r r'(r+r') \sin\varphi \right\},$$

und daraus nach einer Vereinfachung

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{dp + dq}{d\varphi} = \frac{1}{(p(r+r') - r r' \cos\varphi)^2} \left\{ \frac{dp}{d\varphi} (p^2 (r+r')^2 - 2 p r r'(r+r') \cos\varphi) - p^2 r r'(r+r') \sin\varphi \right\}.$$

Der Werth $dp : d\varphi$ ergiebt sich am einfachsten geometrisch (Fig. 3a). Ist $\angle G'' A_2 K = d\varphi$, schneidet $A_2 K$ den Kreis $b$ in $K$ (benachbart dem $G''$), ist $G'' J \perp A_2 G''$ und $\perp A_2 K$, sowie $M' L \perp A_2 G''$ gefällt, so sind die Dreiecke $KJG''$ und $M'LG''$ ähnlich und es gilt

$$KJ : JG'' = M'L : LG'',$$

oder, da $KJ = -dp$, $JG'' = p\, d\varphi$, $M'L = r' \sin\varphi$, $LG'' = p - r' \cos\varphi$, auch

$$\frac{dp}{d\varphi} = - \frac{p r' \sin\varphi}{p - r' \cos\varphi}.$$

Führt man diesen Werth in den Ausdruck von $dk : d\varphi$ ein, setzt diesen dann gleich Null, so erhält man als Bedingung eines Maximums oder Minimums von $k$, nach Weglassung des Nenners,

$$0 = - p r' \sin\varphi [p^2 (r+r')^2 - 2 p r r'(r+r') \cos\varphi] - (p - r' \cos\varphi) p^2 r r'(r+r') \sin\varphi.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch $sin\varphi = 0$, d. i. für die Scheitel $A$ und $B$, und ausserdem nur noch durch

$$\frac{p}{2r'cos\varphi} = \frac{3r}{4r+2r'}.$$

Schneidet man nun (Fig. 3a) $A_2G''(=p)$ mit dem Kreise $w$ in $G_6$, so ist $A_2G_6 = 2r'cos\varphi$; errichtet man in $G''$ und $G_6$ Senkrechte zu $A_2G''$ und schneidet sie mit $A_2M'$ in $H$ und $B'$, so ist $B'$ der Endpunkt des Durchmessers $A_2M'B'$ des Kreises $w$, und ein Kreis über $A_2H$ als Durchmesser (Fig. 3) schneidet den Kreis $b$ in dem gesuchten Punkte $G''$. $H$ ergiebt sich aber durch die in der Fig. 3 angedeutete Construction aus (Fig. 3a)

$$\frac{A_2H}{A_2B'} = \frac{A_2G''}{A_2G_6} = \frac{3r}{4r+2r'} = \frac{\frac{3}{4}r}{r+\frac{1}{2}r'}.$$

Verändert sich $r$ von 0 zu $\infty$, so verändert sich $A_2H$ von 0 zu $\frac{3}{4}r'$, und $H$ bewegt sich von $A_2$ bis in die Mitte von $M'B'$.

Da $A_2H > A_2U$ (Nr. 7), so liegt $H$ zwischen $U$ und $B'$, $G''$ zwischen $W''$ und $B''$, und, wie vorhin angenommen, $G$ zwischen $W$ und $B$.

9. Die Evolute der geschweiften Epicykloide besteht für jeden Gang der Curve, wenn die Schnittpunkte $W''$ und $G''$ reell sind, aus zwei ins Unendliche verlaufenden Aesten $N_1A_1W'_1$ und $W''_1G_1B_1R_1S_1$, die als in dem unendlich fernen Punkte $W_1$ zusammenhängend betrachtet werden können. Ein solcher Gang der Evolute besitzt zwei unendlich ferne Punkte und vier Spitzen, wovon eine ($B_1$) der Curve $c$ abgekehrt ist (kleinste Krümmung), drei ($A_1$, $G_1$, $R_1$) ihr zugekehrt sind (grösste Krümmung).

Zur Verzeichnung der geschweiften Epicykloide mittels Krümmungskreisen reicht die Construction der besonderen Punkte in dem Falle, dass sie nicht mehr, als einmal den Kreis $f$ umläuft, gewöhnlich aus.

Nimmt $r$ von 0 bis $\infty$ zu, so verändert sich $A_2U$ von 0 zu $r'$ und $A_2H$ von 0 zu $\frac{3}{4}r'$. Nimmt, bei unveränderlichen $r$ und $r'$, $r''$ der absoluten Grösse nach von $r'$ zu 0 ab, so geht die Curve $c$ von der Gestalt der Epicykloide durch die der geschweiften Epicykloide in den Kreis und die Evolute der $c$ von der Gestalt einer Epicykloide mit einer Spitze auf einem Gange durch die in Fig. 3 verzeichnete Gestalt mit zwei Aesten und vier Spitzen in den Punkt $M$ über. Sobald der abnehmende Kreis $b$ den Punkt $U$ durchschreitet, rückt $W''$ in $A$ (da $A_2U \leq A_2M'$, Nr. 7), es rückt auf $c$ der Punkt $W$ in $A$, und bei der Evolute verschwindet der unendlich ferne Punkt mit dem äussern Curvenaste und bei weiterer Verkleinerung von $b$ rückt die Spitze $A_1$ aus dem Unendlichen ins Innere des festen Kreises $f$. Sobald ferner der Kreis $b$ den Punkt $H$ durchschreitet, rückt $G''$ in $B''$ oder in $A$, je nachdem $A_2H >$ oder $< A_2M'$ ist (Nr. 8), es rückt auf $c$ der Punkt $G$ in $B$ oder in $A$, und bei der Evolute verschwinden $G_1$ und $R_1$, so dass nur noch zwei Spitzen $A_1$, $B_1$ vorhanden

sind. Für $UM' = M'H$ verschwinden beide Punkte $G$ und $W$, sowie $G_1$ und $W_1$ zugleich; es findet dies statt, wenn der aus den Formeln für $A_2 U$ und $A_2 H$ (Nr. 7 und 8) gewonnene Ausdruck

$$\frac{UM' - M'H}{A_2 B'} = \tfrac{1}{2} - \frac{r}{2(r+r')} - \left(\frac{3r}{4r+2r'} - \tfrac{1}{2}\right) = \frac{-r^2 + 2rr' + 2r'^2}{2(r+r')(2r+r')} = 0,$$

oder wenn

$$r' = \frac{r}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0{,}366\ldots r$$

wird, wobei das andere Zeichen der Wurzel weggelassen ist, da wir die Entstehungsweise mit $r' > 0$ gewählt haben. Je nachdem dagegen $UM' \lesseqgtr M'H$ und $r' \lesseqgtr 0{,}366r$, verschwindet zuerst $G$ oder zuerst $W$.

10. Die verschlungene Epicykloide ist in Fig. 4 an entsprechenden Punkten mit übereinstimmenden Buchstaben, wie die geschweifte, bezeichnet. Bei ihr ist, absolut genommen, $r'' > r'$, daher schneidet der Kreis $b$ die Hilfskreise $A_2 U$, $A_2 H$ nicht, und die Punkte $W$ und $G$ kommen auf der Curve $c$ nicht vor. Jeder Gang derselben besitzt einen Scheitel $A$ grösster und einen $B$ kleinster Krümmung, und jeder Gang der Evolute zwei Spitzen $A_1$ und $B_1$.

Einen allgemeinen Punkt $P$ und $P_1$ der Curve $c$, bezw. ihrer Evolute erhält man, wenn man aus $A_2$ einen beliebigen Strahl zieht, dessen einer Schnittpunkt mit dem Kreise $b$ der Punkt $P''$ sei, zu $P''$ den Krümmungsmittelpunkt $P_5$ bestimmt (5) und daraus $P$ und $P_1$ herstellt. Einen bemerkenswerthen Punkt $E$ gewinnt man, wenn man $A_2 E'' \perp MA_2$ oder als Tangente an $f$ und $w$ zieht; dann fällt $E_5$ in $A_2$ (3, 3). Hieraus leitet man die Punkte $E$ und $E_1$ ab, für welche die Normale $EE_1$ der $c$ zugleich die Tangente der Evolute und des Kreises $f$ in $E_1$ ist. Ausser $A$, $B$, $C$, $E$ wird ein zweckmässig durch einen Strahl $A_2 P''$ gewähltes Punktepaar zur Verzeichnung eines Ganges beider Curven bei nicht mehr als einmaligem Umlaufen der $c$ um $M$ gewöhnlich genügen.

Der Doppelpunkt $D$ der $c$ liegt auf ihrer Symmetrielinie $MA_2$. Er entsteht aus dem Punkte $D''$ des Kreises $b$, der so liegt, dass, wenn man die Gerade $MD''$ mit $f$ in $D_6$ und die $M'D''$ mit $w$ in $D'$ schneidet, Bog. $A_2 D_6 =$ Bog. $A_2 D'$ ist. Denn dreht man zuerst $w$ um $M'$, bis $A_2$ nach $D'$ und $A$ nach $D''$ kommt, so muss man dann noch $w$ um $M$ drehen, bis $D_6$ nach $A_2$, also $D''$ sammt der Geraden $MD_6 D''$ in die Gerade $MA_2$ gelangt. Man kann $D''$ durch eine Fehlercurve ermitteln, bestimmt durch die Schnittpunkte von Strahlen aus $M$ und $M'$, welche auf $f$, bezw. auf $w$ von $A_2$ aus in gleichem Sinne gleiche Bogen abschneiden.

11. Wenn bei unveränderlichen $r$ und $r'$ die Grösse $r''$ von $r'$ bis $\infty$ wächst, so verändert sich die Evolute von der Gestalt einer Epicykloide aus, indem zu der Spitze $B_1$ noch die $A_1$ hinzutritt, und wird für $r'' = \infty$ wieder zu einer Epicykloide, indem der Satz gilt:

„Die Evolute der verschlungenen Epicykloide mit unendlich fernem beschreibenden Punkte ist auch die Evolute einer gewöhnlichen Epicykloide mit demselben festen und mit einem wälzenden Kreise, dessen Halbmesser halb so gross, wie im ersten Falle ist.“

Denn ist im ersten Falle $B''$ (Fig. 5) der beschreibende Punkt mit $r''=\infty$, und dreht man $w$ um $M'$, bis $B''$ nach $P''$ und $B'$ nach $P'$ gelangt, so bestimmt man auf $A_2P''$ den zu $P''$ gehörigen Krümmungsmittelpunkt $P_5$ dadurch (Nr. 5), dass man $A_2P_4 \perp A_2P''$ zieht und mit $P''M'$ in $P_4$ schneidet, worauf $P_4M$ die $A_2P''$ in $P_5$ trifft; und aus $P_5$ bestimmt man $P_1$, wobei Bog. $A_2P_2=$ Bog. $B'P'$, $\angle f, P_2P_1=\angle f, A_2P_5$ und $P_2P_1=A_2P_5$ wird. Ist aber für die Epicykloide der wälzende Kreis der mit dem Durchmesser $A_2M'=r'$ und dem Mittelpunkte $M''$, ist ferner $M'$ der beschreibende Punkt, und dreht man den wälzenden Kreis um $M''$, bis $M'$ nach $P'''$ auf $A_2P''$ kommt, und bestimmt zu $P'''$ den Krümmungsmittelpunkt, indem man $P'''M''$ mit $A_2P_4$ schneidet, so geschieht dies in dem schon erhaltenen Punkte $P_4$, weil jeder dieser Punkte der zweite Schnittpunkt der Geraden $A_2P_4$ mit dem Kreise $A_2M'$ ist; der frühere wegen $A_2P_4M'=90^0$ und $A_2M'$ ein Durchmesser, der letztere wegen $P'''A_2P_4=90^0$ und $P'''M'''P_4$ ein Durchmesser. $P_4M$ schneidet dann auf $A_2P'''$ den auch zu $P'''$ gehörigen Krümmungsmittelpunkt $P_5$ ein. Weil ausserdem Bog. $M'P'''$ $=$ Bog. $B'P'$, also bei der Uebertragung $=$ Bog. $A_2P_2$, so fallen auch die Geraden $P_2P_1$ und die Punkte $P_1$ für beide Evoluten zusammen. Daher sind die Evoluten dieselben, mögen die Werthe von $(r, r', r'')$ gleich $(r, r', \infty)$ oder gleich $(r, \frac{1}{2}r', \frac{1}{2}r')$ sein.

12. Die geschweifte Hypocykloide. Bei ihr ist der Halbmesser des wälzenden Kreises negativ; und wenn wir durch $r'$ seinen absoluten Werth bezeichnen, so tritt in den Formeln für die Epicykloide $-r'$ an die Stelle von $r'$. Von den beiden möglichen Entstehungsweisen wählen wir wieder diejenige, bei welcher der absolute Werth von $r':r$ nicht der grössere, also $r'\leqq \frac{1}{2}r$ ist. Diese Curve besitzt wieder im Allgemeinen den Wendepunkt $W$ (Fig. 6) und den Punkt der grössten Krümmung $G$. Die Formeln der Nr. 7 und 8 werden zu

$$\frac{A_2U}{A_2B'}=\frac{\frac{1}{2}r}{r-r'}, \quad \frac{A_2H}{A_2B'}=\frac{\frac{3}{4}r}{r-\frac{1}{2}r'},$$

wonach die Hilfskreise mit den Durchmessern $A_2U$ und $A_2H$ verzeichnet sind. Schneiden sie, wie in der Figur, den Kreis $b$ in den Punkten $W''$, bezw. $B''$, so sind die Punkte $W$ und $G$ reell, deren Construction wie bei der geschweiften Epicykloide ausgeführt wird.

Wenn $r'$ von 0 bis $\frac{1}{2}r$ zunimmt, so verändert sich $A_2U$ von $r'(=0)$ zu $2r'$ und $A_2H$ von $\frac{3}{4}r'$ zu $2r'$. Die Formeln ergeben, wenn man $A_2H$ und $-A_2U$ entwickelt, dass, so lange nicht $r'=\frac{1}{2}r$, $A_2B'>A_2H>A_2U$ $>A_2M'$. Nimmt daher $r''$ von $r'$ bis 0 ab, so rückt erst $H$, dann $U$ in

$B''$, auf der Curve erst $G$, dann $W$ in $B$, und auf der Evolute erst $G_1$ und $R_1$ in $B_1$, dann verschwindet der unendlich ferne Punkt $W_1$ mit dem äussern Aste der Evolute, bis zuletzt $c$ ein Kreis, die Evolute der Punkt $M$ wird.

13. Die verschlungene Hypocykloide (Fig. 7) entbehrt der Punkte $W$ und $G$. Die Evolute besitzt zwei Spitzen auf jedem Gange und wird, entsprechend wie die verschlungene Epicykloide, für $r''=\infty$ zu einer gemeinen Hypocykloide, die auch die Evolute einer andern Hypocykloide mit den Maassen $r$, $\frac{1}{2}r'$ ist.

Bekanntlich gehen die geschweifte und verschlungene Hypocykloide, wenn $r'=\frac{1}{2}r$ wird, in die Ellipse über, welche zwei Gänge dieser Curve darstellt. Die Entstehung der Evolute der Ellipse ist bei der verschlungenen Hypocykloide am leichtesten zu übersehen.

14. Die geschweifte Cykloide (Fig. 8) ist der besondere Fall der geschweiften Epi- und Hypocykloide, in welchem $r=\infty$ wird. Für die beiden Hilfskreise wird daher nach Nr. 7 und 8

$$A_2U=\tfrac{1}{2}A_2B'=r',\quad A_2H=\tfrac{3}{4}A_2B'=\tfrac{3}{2}r'.$$

Daher fällt $U$ in $M'$ und $A_2W''$ ist eine Tangente an den Kreis $b$, so dass man den Hilfskreis $A_2U$ entbehren kann.

15. Die verschlungene Cykloide (Fig. 9) ist durch ihre Scheitel $A$, $B$, $C$, ihren Schnittpunkt $E$ mit der Bahnlinie $f$, ihren Doppelpunkt $D$ und die zugehörigen Krümmungskreise gezeichnet, ihre Evolute durch die entsprechenden Punkte.

16. Die geschweifte Kreisevolvente (Fig. 10). Bei ihr ist $r'=r''=\infty$, daher nach Nr. 7 und 8

$$A_2U=r,\quad A_2H=3r,\quad A_2H_1=\tfrac{1}{2}A_2H=\tfrac{3}{2}r.$$

Die so bestimmten Kreise, welche nämlich $A_2U$ zum Durchmesser, bezw. $H_1$ zum Mittelpunkt und $H_1A_2$ zum Halbmesser haben, schneiden $b$ in den Punkten $W''$ und $G''$, bestimmen dadurch auf $c$ die $W$ und $G$, und auf der Evolute $W_1$ und $G_1$. Die ganze Evolute, der nur ein Gang zuzuschreiben ist, besitzt im Allgemeinen zwei Aeste, zwei Asymptoten und drei Spitzen. Sie schneidet den Kreis $f$ in einem Punkte $J_1$, den man erhält, wenn man den Punkt $J_4$ auf $f$ so bestimmt, dass sein Abstand $J_4J''$ von $b$ gleich dem Durchmesser $A_2MN$ von $f$ ist. Das Dreieck $J_4A_2J''$ hat mit demjenigen $A_2J_4N$ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ($J_4$ und $A_2$) gleich, ist also mit ihm congruent und daher bei $A_2$ rechtwinklig, der zu $J''$ gehörige Krümmungsmittelpunkt $J'''$ ergiebt sich dann in gewöhnlicher Weise durch $J''J_4\perp b$, $A_2J_4\perp A_2J''$, durch den Schnittpunkt $J_4$ beider Linien, und den Schnitt von $J''A_2$ mit $J_4M$, welcher auf $f$ in $J'''$ liegt, weil $\angle J_4A_2J'''=90^0$. Aus $J'''$ ergiebt sich dann der Schnittpunkt $J_3$ der Evolute mit $w$ in gewöhnlicher Weise durch Bog. $J''J_3=A_2J'=AJ''$. Man

erkennt leicht, indem man $G$ als laufenden Punkt ansieht, dass, wenn $G''$ von $A$ aus über $J''$ hinausrückt, $G_4$ ausserhalb und $G_5$ innerhalb des $f$ gelangt, so dass die Evolute der $c$, mit Ausnahme für das endliche Stück zwischen den beiden Punkten $J$, innerhalb $f$ liegt. Ausserdem wird mit dem sich über $J''$ hinaus entfernenden $G''$ die Sehne $A_2 G'''$ kleiner und kann jede beliebige Kleinheit erreichen, während zugleich der Abstand des $G_5$ von $f$ klein von der zweiten Ordnung wird, woraus folgt, dass sich die Evolute der $c$ dem festen Kreise $f$ von innen asymptotisch annähert.

Wächst $r' - r'' = A_2 A$ von Null an, so verschwinden zuerst für $A_2 A = r$ die Wendepunkte $W$ der $c$ und der eine Ast der Evolute, während der andere Ast eine unendlich ferne Spitze $A_1$ erhält neben den beiden im Endlichen liegenden Spitzen $G_1$. $A$ ist dann ein Flachpunkt der $c$. Für $A_2 A = 2r$ tritt die Spitze $A_1$ auf den Kreis $f$ (Gleich. 2) und kein Punkt der Evolute liegt mehr ausserhalb $f$; für $A_2 A = 3r$ vereinigen sich die beiden $G_1$ mit $A_1$, so dass nur noch eine Spitze besteht. Diese nähert sich mit weiter wachsendem $A_2 A$ von $N$ her dem $M$, worin für $A_2 A = \infty$ sie (Nr. 3, 6) und die ganze Evolute anlangt.

17. Die verschlungene Kreisevolvente (Fig. 11). Ein allgemeiner Punkt $P$ mit $P_1$, der Doppelpunkt $D$, die Spitze $A_1$ zu $A$ sind nach dem allgemeinen Verfahren bestimmt. Der Schnittpunkt $F$ der $c$ und $f$ entsteht aus dem Schnittpunkte $F''$ der $b$ und $f$, indem man Bog. $A_2 F_2 = A_2 F' = A F''$ und Bog. $F_2 F =$ Bog. $A_2 F''$ macht. Die Evolute schliesst sich wieder dem Kreise $f$ asymptotisch von innen an. Wächst $r'' - r' = A_2 A$ von Null an, so rückt $A_1$ von $A_2$ gegen $M$; für $A_2 A = r$ wird die Curve zur Archimedischen Spirale, indem $b$ durch $M$ geht und die Bewegung des $P''$ auf $b$ gegen $M$ mit der Drehungsbewegung des $b$ proportional wird; $A_1$ liegt dann in der Mitte von $A A_2$, indem in Gleichung 2) $\varphi = 0$, $r' = \infty$, $p = -r$, daher $q = \frac{1}{2} r$ wird. Bei weiter wachsendem $A_2 A$ verschwindet mit $A_2 A = 2r$ der Schnittpunkt $F$, und die Spitze $A_1$ nähert sich immer mehr dem $M$, worin sie und die ganze Evolute für $A_2 A = \infty$ anlangt.

Karlsruhe, im October 1880.

## VII.

# Ueber Distanzrelationen.

Von

E. STUDY in Leipzig.

---

Die Lehre von den Distanzrelationen und Tetraederproducten ist neuerdings mehrfach ausführlich behandelt worden: so von Baltzer, welcher in seinem Buche „Theorie und Anwendungen der Determinanten" §§ 16 und 17 zuerst eine zusammenhängende Darstellung der einzelnen, bis dahin nur zerstreuten Sätze gab; dann von Darboux*, Frobenius**, d'Ovidio*** u. A. in verschiedenen Aufsätzen.

Baltzer und Frobenius gewinnen ihre Resultate unter Zugrundelegung des Cartesischen Coordinatensystems hauptsächlich durch Multiplication gewisser Determinanten; Darboux, der ebenso, wie Frobenius, interessante geometrische Anwendungen giebt, durch gleichzeitige Benutzung und geschickte Verknüpfung zweier verschiedener Coordinatensysteme, von welchen das eine mit der Natur des Gegenstandes in engem Zusammenhange steht, mit Hilfe der Methoden der neueren Algebra; d'Ovidio endlich giebt eine Verallgemeinerung der Theorie unter Anwendung der projectiven Maassbestimmung auf beliebig viele Dimensionen.

Es ist nun der Zweck dieser Arbeit, zu zeigen, dass man diese metrischen Relationen aus gemeinsamem Ursprung auf eine äusserst elementare Weise ableiten kann, indem sie sich als sehr einfache Consequenzen bekannter elementarer Sätze darbieten, so dass man leicht nicht nur zur Erkenntniss ihrer factischen Geltung, sondern auch zur Einsicht ihrer inneren Nothwendigkeit gelangt.

Diese Einfachheit der Entwickelung ist zum Theil durch die enge Verknüpfung bedingt, welche die Distanzrelationen mit den Eigenschaften

---

* „Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace" in Ann. de l'École norm., 1872.

** „Anwendungen der Determinanten auf Geometrie", Crelle's J., J. 79.

*** „Alcune proprieta metriche etc." in Atti della Academia dei Lincei Ser. II Vol. III, 1875/76, S. 260; andere Aufsätze ebenda S. 561, 723, Ser. III Vol. I S. 929 (1877). — Von anderen Arbeiten ist mir namentlich von Nutzen gewesen: Bauer, „Bemerkungen über einige Determinanten geometrischer Bedeutung" in den Verhandlungen der mathematischen Classe der königl. bayr. Akademie, München 1872.

des Schwerpunktes verbindet, und dann dadurch, dass sich von diesem Gesichtspunkte aus die Einführung eines willkürlichen Coordinatensystems (und so muss hier ein jedes mit Ausnahme des barycentrischen bezeichnet werden) als überflüssig erweist, wodurch fremde, die Uebersicht erschwerende Elemente vermieden werden.

Was die Darstellung betrifft, so glaubte ich mich bei dem so vielfach behandelten Gegenstande auf die Grundzüge beschränken zu müssen, um so mehr, als in fast allen Fällen, wo es sich um weitere Ausführung und Umformung der einzelnen Sätze handelt, nur Herrn Darboux' elegante Darstellungen zu wiederholen gewesen wären; doch habe ich mir erlaubt, in einem Anhang zu den zahlreichen, von den Herren Frobenius und Darboux gegebenen geometrischen Anwendungen einige, zum Theil vielleicht neue hinzuzufügen.

Ebenfalls der Kürze wegen unterliess ich, bei jedem einzelnen Satze den Entdecker anzuführen, und verweise in dieser Hinsicht auf obige Autoren, besonders Baltzer. — Auf die von Herrn d'Ovidio angewandte projective Maassbestimmung bin ich für jetzt nicht eingegangen; dagegen ist die Theorie auch hier für beliebig viele Dimensionen entwickelt, und jeder Satz bezieht sich, wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, auf den ebenen Raum von $n$ Dimensionen.

Das Gebilde, das aus einem solchen Raume vermittelst einer Transformation durch reciproke Radien hervorgeht, ist im Folgenden als „Kreis von $n$ Dimensionen" bezeichnet. Unter einer „Pyramide von $n$ Dimensionen" ist der einfachste Körper $n^{\text{ter}}$ Dimension verstanden, der durch $\binom{n+1}{1}$ Ecken, $\binom{n+1}{2}$ Kanten u. s. w. begrenzt wird.

Durch die Ausdehnung auf eine beliebige Dimensionenzahl wird auch für den gewöhnlichen Raum von drei Dimensionen ein Vortheil erreicht; denn die hierdurch entstehende Complication der Beweise ist unbeträchtlich, und man wird so in den Stand gesetzt, Sätze, die sonst getrennt erscheinen, gemeinschaftlich zu betrachten; auch tritt das Gesetz der in den betreffenden Relationen vorkommenden numerischen Coefficienten erst bei beliebigem $n$ deutlich hervor.

---

Es seien $S$, $A_1$, $A_2$, ... $A_{n+1}$ Punkte eines ebenen Raumes $R^n$, und je $n+1$ derselben von einander unabhängig; bezeichnen wir dann die nicht verschwindende Pyramide $A_1 \dots A_{k-1} S A_{k+1} \dots A_{n+1}$ mit $\alpha_k$ und geben ihr das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem der Raum $R_k^{n-1} \equiv (A_1 \dots A_{k-1} A_{k+1} \dots A_{n+1})$ von der Geraden $A_k S$ ausserhalb der Strecke $A_k S$ getroffen wird oder nicht, ertheilen wir folglich der Pyramide $A_1 \dots A_{n+1}$ das positive Volumen $\Sigma \alpha_k$, so ist $S$ durch die Verhältnisse der Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$ eindeutig bestimmt, und der Schwer-

punkt eines Massensystems, in welchem jeder Punkt $A_k$ mit der mit gleichem Index versehenen Masse $\alpha_k$ behaftet ist.

Die Gerade $A_k S$ trifft nämlich den Raum $R_k^{n-1}$ in einem Punkte $S_k$ so, dass

$$\frac{S_k S}{S_k A_k} = \frac{A_1 \ldots A_{k-1} S A_{k+1} \ldots A_{n+1}}{A_1 \ldots A_{k-1} A_k A_{k+1} \ldots A_{n+1}} = \frac{\alpha_k}{\Sigma \alpha_k}.$$

Bezeichnet man nun die Pyramide $\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Dimension

$$A_1 \ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_{p-1} S_k A_{p+1} \ldots A_{n+1}$$

mit $\beta_p$ und bestimmt die Vorzeichen nach einem dem obigen ganz analogen Gesetz, so besteht die Proportion

$$\alpha_1 : \alpha_2 \ldots : \alpha_{k-1} : \alpha_{k+1} \ldots : \alpha_{n+1} = \beta_1 : \beta_2 \ldots : \beta_{k-1} : \beta_{k+1} \ldots : \beta_{n+1};$$

denn es ist, wenn $h_k$ und $h_s$ die von den Punkten $A_k$ und $S$ auf den Raum $R_k^{n-1}$ gefällten Lothe bezeichnen,

$$\begin{aligned} \pm \alpha_i &= A_1 \ldots A_{i-1} S A_{i+1} \ldots A_{n+1} \\ &= \pm A_1 \ldots A_{i-1} S_k A_{i+1} \ldots A_{k-1} A_k A_{k+1} \ldots A_{n+1} \\ &\quad \mp A_1 \ldots A_{i-1} S_k A_{i+1} \ldots A_{k-1} S A_{k+1} \ldots A_{n+1} \\ &= \pm \frac{\beta_i h_k}{n} \mp \frac{\beta_i h_s}{n}, \end{aligned}$$

also

$$\alpha_i : \alpha_j = \beta_i : \beta_j.$$

Der für $n=1$ evidente Satz ist hiermit für beliebiges $n$ bewiesen, weil seine Giltigkeit auf den Fall eines Raumes von $\overline{n-1}$ Dimensionen zurückgeführt ist.

Der Punkt $S$ kann leicht construirt werden, indem man zunächst nur den Schwerpunkt von zwei Punkten des Massensystems aufsucht, dann zu diesem einen neuen Punkt hinzunimmt, und so fort, bis die $n+1$ Punkte $A_k$ erschöpft sind. Diese Construction führt auch dann noch zum Ziele, wenn die Punkte $A_k$ in einem Raume von $m<n$ Dimensionen enthalten sind, die Volume der Pyramiden $\alpha_k$ also verschwinden. Die Verhältnisse der letzteren lassen sich dann auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass man einen und denselben Punkt $S$ erhält, und man kann noch $n-m$ Bedingungen vorschreiben, denen sie genügen sollen, eine Freiheit, welcher wir uns später bedienen werden.

Die Punkte $A_1 \ldots A_{n+1}$ bilden mit dem Punkte $S$ ein „indifferentes Massensystem" (Reye in Crelle's Journal, J. 72), wenn wir $S$ die Masse $-\Sigma\alpha_k$ beilegen. Ueberhaupt wird ein solches von $\nu=n+2$ Punkten gebildet, wenn man jedem Punkte $A_k$ die Masse der ihm gegenüberliegenden Pyramide $\alpha_k$ zuertheilt und die Vorzeichen so wählt, dass $\Sigma\alpha_k$ verschwindet, was (abgesehen von der entgegengesetzten Vorzeichenbestimmung) nur auf eine Art möglich ist.*

* Es kann dies im Allgemeinen ausgeführt werden, indem man jedem Punkte $A_k$ eine positive oder negative Masse beilegt, je nachdem er von dem durch die

$\nu > n+2$ Punkte können auf unendlich viele Arten zu einem indifferenten System verbunden werden.

Wir können nunmehr den Satz beweisen, der als die eigentliche Quelle der im Folgenden betrachteten Relationen zwischen Punkten und Kreisen angesehen werden kann, welche sich alle aus ihm ohne Schwierigkeit ergeben und durch welchen zugleich der Zusammenhang dieser Theorie mit den Schwerpunktseigenschaften klar hervortritt.

Ist nämlich

$$\begin{pmatrix} A_1 \dots A_\nu \\ \alpha_1 \quad \alpha_\nu \end{pmatrix}_{\nu \gtreqless n+2}$$

ein indifferentes System eines Raumes $R^n$ und $O$ ein ganz beliebiger Punkt, so hat die Summe $\Sigma OA_k^2 . \alpha_k$ einen constanten, von dem Punkte $O$ ganz unabhängigen Werth; es ist für jede Lage von $O$ die Gleichung erfüllt

$$1) \qquad \Sigma_k OA_k^2 . \alpha_k = \frac{1}{2\nu} \Sigma_p \Sigma_q A_p A_q^2 (\alpha_p + \alpha_q).$$

Fällt man nämlich aus den Punkten $A_k$ Senkrechte $h_k$ auf einen beliebigen Raum $R_1^n$, welcher mit $R^n$ in einem und demselben Raume $R^{n+1}$ liegt, so kann man leicht, ähnlich wie oben, durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ darthun, dass die Summe $\Sigma h_k \alpha_k$ (das statische Moment des Systems in Bezug auf $R_1^n$) verschwinden muss. Sind nun $O$ und $Q$ zwei Punkte des Raumes $R^{n+1}$, der eine derselben, $O$, also ein ganz beliebiger Punkt, und $OP$ eine Normale von $R_1^n$, so kann man dies offenbar auch durch die Gleichung

$$2) \qquad \Sigma QA_k . \cos QA_k,\ PO . \alpha_k = 0$$

ausdrücken.

Nun ist aber nach einem elementaren Satze

$$2\, PO . QA_k \cos QA_k,\ PO = OQ^2 + PA_k^2 - QP^2 - OA_k^2$$

und aus der hieraus mit Berücksichtigung der Identität $\Sigma \alpha_k = 0$ entspringenden Gleichung

$$\Sigma OA_k^2 . \alpha_k = \Sigma PA_k^2 . \alpha_k$$

folgt obiger Satz.

Für $n=1$ nimmt er die bekannte einfachere Form des Stewartschen Satzes an, von welchem man bei der Beweisführung ebenfalls ausgehen kann:

„Liegen drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ in einer Geraden, so gilt für jeden Punkt $O$ die Gleichung

$$OA_1^2 . A_2 A_3 + OA_2^2 . A_3 A_1 + OA_3^2 . A_1 A_2 + A_2 A_3 . A_3 A_1 . A_1 A_2 = 0."$$

---

übrigen Punkte gelegten Kreise $n^{ter}$ Dimension aus- oder eingeschlossen wird; liegen alle Punkte auf einem Kreise, so erhält man die Vorzeichen durch einen Grenzübergang. Vergl. den weiteren Text.

Unser Satz 1) bleibt auch dann noch richtig, wenn man an die Stelle der Quadrate der Entfernungen die gemeinschaftlichen Potenzen beliebiger um die Punkte beschriebener Kreise setzt, wie man leicht erkennt, wenn man von der Gleichung 1) die Identität

$$\Sigma_k (r_0^2 + r_k^2) \alpha_k = \Sigma_k r_k^2 . \alpha_k$$

abzieht.

Bezeichnen wir mit $p_{0k}$, $p_{ik}$ die gemeinsame Potenz

$$OA_k^2 - r_0^2 - r_k^2 = 2 r_0 r_k \cos_{0k}$$

der Kreise $(O)$, $(A_k)$, resp. $(A_i)$, $(A_k)$, und mit $\pi_k$ die gemeinschaftliche Potenz des Kreises $(A_k)$ und eines Orthogonalkreises* $(A'_k)$ der $n+1$ Kreise $(A_1) \ldots (A_{k-1})$, $(A_{k+1}) \ldots (A_\nu)$, so lässt sich unser Satz, wenn man den veränderlichen Kreis $(O)$ einmal mit $(A'_k)$ zur Deckung bringt, auch auf die Form

3) $$\Sigma_k p_{0k} \cdot \alpha_k = \pi_k \alpha_k$$

bringen, von welcher wir bei dieser Untersuchung ausgeben wollen.

Beiläufig ergiebt sich:

„Bildet man von $n+2$ Kreisen die gemeinschaftliche Potenz irgend eines und eines Orthogonalkreises der übrigen $n+1$ Kreise, multiplicirt mit dem Volumen der von den Mittelpunkten der letzteren gebildeten Pyramide, so haben alle diese Producte denselben Werth.“**

Da $\Sigma \alpha_k = 0$, so folgt hieraus noch

4) $$\sum \frac{1}{\pi_k} = 0.$$

Die Beziehung der beiden Kreissysteme $\ldots (A_k) \ldots$ und $\ldots (A'_k) \ldots$ ist eine durchaus wechselseitige, wenn die Mittelpunkte der Kreise des zweiten Systems ebenfalls in einem Raume von $n$ Dimensionen enthalten sind; man erkennt leicht, dass in diesem Falle die Pyramiden $\alpha_k$ des einen Systems den ihnen entsprechenden Pyramiden $\alpha'_k$ des andern proportional sind.

Sind z. B. $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ Punkte einer Ebene und $A'_1$ der Mittelpunkt des Kreises, der durch $A_2 A_3 A_4$ geht, so theilen sich die Geraden $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$ in demselben Verhältnisse, wie die entsprechenden $A'_1 A'_3$ und $A'_2 A'_4$; u. s. w.

Besitzen die $\nu \overline{>} n+2$ Kreise einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis ($\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Dimension), so wird die Constante der rechten Seite der Gleichung 3) Null, und wir erhalten als Relation zwischen den gemeinsamen Potenzen eines beliebigen Kreises und der Kreise eines solchen Systems die Gleichung

* Der Mittelpunkt desselben $A'_k$ wird im Allgemeinen ausserhalb des Raumes $R^n$ angenommen; $\nu$ wird hier $= n+2$ vorausgesetzt.

** Hierin liegt die Rechtfertigung der oben über die Bestimmung der Vorzeichen der Massen $\alpha_k$ gemachten Bemerkung.

5) $$\Sigma p_{0k} \cdot \alpha_k = 0.$$

Zu weiteren Sätzen gelangt man durch Elimination der Grössen $\alpha_k$ aus den Gleichungen 3) und 5). Man erreicht dieselbe wohl am einfachsten, wenn man den veränderlichen Kreis $(O)$ der Reihe nach mit $\nu$ beliebigen Kreisen $(B_1)\ldots(B_\nu)$ zusammenfallen lässt, und gewinnt so eine Reihe von Distanzrelationen, die durch verschwindende Determinanten dargestellt werden.

Obgleich dieselben sich später bei Berechnung der Pyramidenproducte ganz von selbst darbieten, so sollen doch ihre directen Beweise mit den nächstliegenden Folgerungen hier kurz angeführt werden.

Zunächst ergiebt sich aus Gleichung 3) mit Zuziehung der Identität $\Sigma\alpha_k = 0$ als Relation zwischen den gemeinsamen Potenzen von $\nu \geqq n+2$ Kreisen eines $n$-dimensionalen Raumes und ebenso vielen beliebigen Kreisen:

6) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & p_{11} & \ldots & p_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & p_{\nu 1} & \ldots & p_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0,*$$

eine Gleichung, aus der nach dem Zusammenfallen beider Systeme die Bedingung hervorgeht, welche nothwendig erfüllt sein muss, wenn $n+2$ Punkte in einem Raume von $n$ Dimensionen liegen sollen. (Dass diese Bedingung auch ausreichend ist, erkennt man später aus Gleichung 20.)

Bezeichnen wir mit $\varrho_k$ den Radius des Kreises $(B_k)$ und mit $cos_{ik}$ den Cosinus des Winkels der Kreise $(A_i)$ und $(B_k)$ (dieser „Winkel" ist durch die Gleichung

$$A_i B_k^2 - r_i^2 - \varrho_k^2 = p_{ik} = 2 r_i \varrho_k \cos_{ik}$$

definirt, also von der Dimension und Stellung der beiden Kreise ganz unabhängig), so können wir die Gleichung 6) auch in der Form

7) $$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\varrho_1} & \ldots & \frac{1}{\varrho_\nu} \\ \frac{1}{r_1} & \cos_{11} & \ldots & \cos_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{r_\nu} & \cos_{\nu 1} & \ldots & \cos_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben; wir construiren mit ihrer Hilfe (Darboux a. a. O.) leicht einen Kreis, der $n+1$ gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet.

---

* Diese Form der Gleichung stellt natürlich keine Verallgemeinerung derjenigen dar, welche aus ihr entsteht, wenn man wieder $p_{ik} = A_i B_k^2$ setzt.

Lassen wir den Kreis $(B_\nu)$ mit $(A_\nu)$ zusammenfallen und alle übrigen Kreise von diesem rechtwinklig geschnitten werden, so erhalten wir, wenn wir aus $A_\nu$ die ganze Figur projiciren und $\nu$ wieder durch $\nu-1$ ersetzen, eine entsprechende Formel für den Strahlenbündel

$$8)\qquad \begin{vmatrix} 1 & ctg\,\varrho'_1 & \ldots & ctg\,\varrho'_\nu \\ ctg\,r'_1 & cos_{11} & \ldots & cos_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ctg\,r'_\nu & cos_{\nu 1} & \ldots & cos_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

$r'_1 \ldots r'_\nu$ bedeuten jetzt die sphärischen Radien von $\nu \overline{>} n+1$ Kreisen $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension, welche auf einem Kreise $k$ der $\overline{n-1}^{ten}$ Dimension liegen, und $\varrho'_1 \ldots \varrho'_\nu$ die sphärischen Radien eines andern Systems, dessen Kreise beliebig auf einem Kreise $k_1$ $\nu-1^{ter}$ Dimension liegen, welcher mit $k$ den Mittelpunkt und Radius gemein hat. (Andere hierher gehörige Formeln finden sich im Anhang.)

Ebenso, wie zu der Gleichung 6), gelangen wir infolge des gleichzeitigen Bestehens von $\nu$ Gleichungen der Form 5) zu der Relation, welche $n+2$, Kreise, die ein gemeinsames Potenzcentrum besitzen, mit $n+2$ beliebigen Kreisen verbindet:

$$9)\qquad \Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\nu\nu} = 0.$$

Den Zusammenhang dieser Gleichung mit 6) erkennt man, wenn man die Determinante links auf die Form

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \varrho_1^2 & \ldots & \varrho_\nu^2 \\ 1 & r_1^2 & A_1B_1^2 & \ldots & A_1B_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & r_\nu^2 & A_\nu B_1^2 & \ldots & A_\nu B_\nu^2 \end{vmatrix}$$

bringt und durch den Raum $[A]$ einen Raum $\overline{n+1}^{ter}$ Dimension legt. Die um die Punkte $A_1 \ldots A_\nu$ in diesem Raume beschriebenen Kreise $n^{ter}$ Dimension schneiden sich dann in zwei reellen oder conjugirt-imaginären Punkten $B_0$, $B'_0$, und unsere Determinante, zu der wir noch

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & A_0B_0^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & A_1B_1^2 & \ldots & A_1B_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 0 & A_\nu B_1^2 & \ldots & A_\nu B_\nu^2 \end{vmatrix}$$

addiren mögen, verschwindet, wie dieser Summand, nach Satz 6).

Unsere Gleichung 9) stellt auch eine Relation für beliebige $\nu = n+3$ Kreise eines Raumes $n^{ter}$ Dimension und $n+3$ ganz willkürliche Kreise dar; für $\nu = n+1$ findet sie in einem besondern Falle der gegenseitigen

Lage zweier verschiedener Systeme statt. Hat man nämlich zwei Systeme von $n+1$ Kreisen, so wird im Allgemeinen jedes derselben in dem durch die Mittelpunkte des andern bestimmten Raume einen Orthogonalkreis mit endlichem Radius besitzen; und wenn diese Orthogonalkreise sich wiederum rechtwinklig schneiden, so verschwindet die Determinante 9), wie man aus der Gleichung 6) direct ablesen kann.

Dasselbe gilt natürlich auch von der Determinante

$$10) \qquad \Sigma \pm cos_{11} \ldots cos_{\nu\nu},$$

von welcher wir leicht ausserdem noch die Sätze beweisen können (es wird vorausgesetzt, dass die in Rede stehenden Kreise $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension alle durch einen einzigen Kreis höherer Dimension verbunden werden können. Obgleich es bei diesen Sätzen auf die Dimension der einzelnen Kreise nicht ankommt, sondern nur auf ihre sphärischen Radien und den sphärischen Abstand der Mittelpunkte, bedienen wir uns doch dieser besondern Bezeichnungsweise):

„Das Verschwinden der Determinante 10) stellt eine Relation dar:

1. für $\nu = n+2$ Kreise $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension eines Kreises $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension und $n+2$ beliebige Kreise $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension;
2. für $\nu = n+1$ Kreise $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension eines Kreises $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension, die einen gemeinsamen (sphärischen) Orthogonalkreis besitzen, und $n+1$ beliebige Kreise der $\overline{n-2}^{ten}$ Dimension;
3. für zwei Systeme von $n$ Kreisen $\overline{n-2}^{ter}$ Dimension je eines Kreises $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension, welche so liegen, dass derjenige Orthogonalkreis des ersten Systems, welcher seinen (sphärischen) Mittelpunkt auf dem Träger des zweiten Systems hat, von dem analogen Orthogonalkreise des zweiten Systems normal geschnitten wird."

Die Gleichung 10) in Verbindung mit 7), resp. 8) dient uns (vergl. Darboux a. a. O.) zur Lösung der Aufgabe: „Einen Kreis zu construiren, der $n+2$ gegebene unter gleichen Winkeln schneidet", sowie der analogen Aufgabe des Strahlenbündels.

Die Bedingung dafür, dass $n+2$ Kreise ein gemeinsames Potenzcentrum besitzen, lässt sich noch in einer anderen Form darstellen.

Fügen wir nämlich der Determinante 9) die Zeile $0\ 0 \ldots 0$ und dann die Colonne $1\ 1 \ldots 1$ hinzu, so erhalten wir durch Verbindung dieser Colonne mit den übrigen, wenn wir das eine System von Kreisen mit dem System der Mittelpunkte des andern zusammenfallen lassen:

$$11) \qquad \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_\nu^2 \\ 1 & 0 & A_1A_2^2 & \ldots & A_1A_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & A_\nu A_1^2 & A_\nu A_2^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wofür wir auch

$$\Sigma r_k^2 \alpha_k = \pi'_k \alpha_k$$

schreiben können, wenn $\pi'_k$ die Potenz des Punktes $A_k$ in Bezug auf den Kreis bedeutet, der durch die übrigen Punkte geht — eine Gleichungsform, die sich auch direct aus 3) ergiebt.

Ebenso lässt das Verschwinden der Determinante

12)
$$\begin{vmatrix} -1 & r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_\nu^2 \\ 1 & 0 & A_1A_2^2 & \dots & A_1A_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & A_\nu A_1^2 & A_\nu A_2^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

schliessen, dass ein Kreis existirt, welcher die ersten in Durchmessern schneidet. (Vergl. auch Anhang Nr. 7.)

An diese Gleichungen schliessen sich solche an, welche Beziehungen zwischen den gemeinschaftlichen Tangenten von Kreisen herstellen. Dieselben lassen sich nach dem Chasles'schen Abbildungsprincip auf die bisher behandelten zurückführen, sind aber auch leicht direct abzuleiten.

Die Mittelpunkte $A_k$ von $n+3$ Kreisen lassen sich nämlich auf unendlich viele Arten zu einem indifferenten System vereinen; wir wählen dasjenige, welches die Bedingung

$$\Sigma r_k \alpha_k = 0$$

erfüllt, und erhalten nun, wenn $t_{pq}$ die gemeinsame Tangente der Kreise $(A_p)$ und $(B_q)$ ist, für die Summe $\Sigma t_{kq} . \alpha_k$ einen constanten, von $(B_q)$ unabhängigen Werth; man gelangt leicht zu einer Gleichung von der Form 6).

Berührt $(A_\nu)$ alle $(B_q)$ und $(B_\nu)$ die sämmtlichen $(A_p)$, so findet man, wenn $\nu = n+2$:

13) $$\Sigma \pm t_{11}^2 \dots t_{\nu\nu}^2 = 0$$

und hieraus nach dem Zusammenfallen beider Systeme die Bedingung dafür, dass $\nu = n+2$ Kreise von einem $n+3^{\text{ten}}$ berührt werden.

Die Interpretation dieser Gleichungen führt, gemäss dem Chasles'schen Princip (s. Darboux a. a. O.), zu einfachen geometrischen Sätzen, z. B.:

„Zu fünf Kreisen der Ebene lassen sich fünf Punkte des Raumes von drei Dimensionen so construiren, dass die Abstände der letzteren den gemeinschaftlichen Tangenten der ersteren gleich werden."

(Man erhält diese Punkte, indem man in den Mittelpunkten der Kreise Normalen errichtet und auf diesen, unter Berücksichtigung des Vorzeichens ihrer Radien oder der Drehungsrichtung der gegebenen Kreise, die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Radien dieser Kreise aufträgt.)

„Zu vier Kreisen, die von einem fünften berührt werden, gehört ein Kreisviereck, dessen sechs Seiten den sechs gemeinschaftlichen Tangenten der vier Kreise bezüglich gleich sind.“

---

Aus der Art, wie wir z. B. zu der Determinante 6) gelangt sind, folgt, dass sich die Unterdeterminanten irgend einer Colonne dieser verschwindenden Determinante verhalten, wie die Grössen $\pi_k \alpha_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$. Bilden nun auch die Punkte $B_1 \ldots B_\nu$ ein indifferentes System, so werden die Unterdeterminanten der Reihen dieser Determinante proportional den entsprechenden Werthen von

$$\pi'_k \beta_k, \beta_1, \ldots \beta_\nu.$$

Berücksichtigen wir Beides, so folgt u. A., dass

$$\alpha_p \beta_q = \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial [A_p B_q^2]}$$

ist, wo $\lambda$ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Da nun weder in dem Product links, noch in der Determinaute rechts dieser Gleichung einer der Punkte $A_p$, $B_q$ vorkommt, und da $\lambda$ seinen Werth offenbar nicht ändert, wenn man $A_p$, $B_q$ mit zwei anderen Punkten $A_r$, $B_s$ der Systeme vertauscht, so entsteht die Frage, ob $\lambda$ überhaupt von den Punkten $A_1 \ldots A_\nu$, $B_1 \ldots B_\nu$ abhängt, und, wenn dies nicht der Fall ist, welches die absoluten Werthe der Unterdeterminanten von 6) sind.

Es ist nach dem Vorstehenden klar, dass die Bestimmung einer einzigen dieser Unterdeterminanten genügt, um sofort die Bedeutung aller übrigen zu finden; und es ist dann gleichzeitig die Frage beantwortet, welche Bedeutung die Determinante 6) hat, wenn $\nu = n+1$ ist, oder die Determinante 9) für $\nu = n+2$ in dem allgemeineren Falle, wo sie von Null verschieden ist, da Ausdrücke von dieser Form unter den Subdeterminanten von 6) vorkommen.

Wir wollen jedoch bei dieser Untersuchung nicht von der Determinante 6) selbst, sondern von einer andern Determinante ausgehen, die infolge der Gleichung 2) verschwindet und mit 6), die sich uns ja auch als eine Consequenz von 2) darbot, in einem engen Zusammenhange steht (s. Baltzer a. a. O. S. 220).

Sind

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{n+1} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \ldots & B_{n+1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

zwei indifferente Systeme, und bezeichnen wir das Product

$$A_0 A_p \,.\, B_0 B_q \cos A_0 A_p,\ B_0 B_q \equiv a_p b_q \cos a_p,\ b_q$$

mit $c_{pq}$, so ist nach Gleichung 2)

$$\Sigma_p\, c_{pq}\, \alpha_p\, \beta_q = 0, \quad \Sigma_q\, c_{pq}\, \alpha_p\, \beta_q = 0$$

und zufolge einer jeden dieser Gleichungen

$$\varDelta \equiv \Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{n+1,\, n+1} = 0$$

und

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial c_{11}} : \frac{\partial \varDelta}{\partial c_{22}} : \ldots : \frac{\partial \varDelta}{\partial c_{n+1,\, n+1}} = \alpha_1 \beta_1 : \alpha_2 \beta_2 : \ldots : \alpha_{n+1} \beta_{n+1}.$$

Vertauscht man jetzt $A_1$ mit einem andern Punkte $A'_1$ des Raumes $[A]$ und ebenso $B_1$ mit $B'_1$, so ändern sich in dieser Proportion alle Glieder, mit Ausnahme des ersten links und rechts. Wir erhalten daher

$$\frac{\alpha_{n+1}\, \beta_{n+1}}{\alpha'_{n+1}\, \beta'_{n+1}} = \frac{\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn}}{\Sigma \pm c'_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn}}.$$

Vertauscht man nun weiter $A_2$ und $B_2$ mit anderen Punkten $A'_2$ und $B'_2$ der Räume $[A]$ und $[B]$, so entsteht ganz ebenso

$$\frac{\alpha'_{n+1}\, \beta'_{n+1}}{\alpha''_{n+1}\, \beta''_{n+1}} = \frac{\Sigma \pm c'_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn}}{\Sigma \pm c'_{11}\, c'_{22} \ldots c_{nn}}$$

und so fort. Schliesslich gelangt man durch Multiplication aller so gefundenen Gleichungen zu der Proportion

$$\frac{\alpha_{n+1}\, \beta_{n+1}}{\alpha^{[n]}_{n+1}\, \beta^{[n]}_{n+1}} = \frac{\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn}}{\Sigma \pm c'_{11}\, c'_{22} \ldots c'_{nn}}.$$

Verschiebt man nun noch die Systeme $A_0 A'_1 A'_2 \ldots A'_n$ und $B_0 B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ parallel zu sich selbst, wodurch in der letzten Gleichung Nichts geändert wird, so sind an Stelle der ursprünglichen Punktgruppen zwei neue getreten, welche wir in den Räumen $[A]$ und $[B]$ ganz willkürlich angenommen haben.

Es folgt daher aus unserer letzten Gleichung, dass

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn} \text{ oder } a_1 a_2 \ldots a_n . b_1 b_2 \ldots b_n . \Sigma \pm \cos a_1 b_1 \ldots \cos a_n b_n$$

sich von $\alpha_{n+1} \beta_{n+1}$ nur um einen constanten Factor $c . \lambda$ unterscheiden kann, wo $c$ eine Function von $n$ ist, $\lambda$ dagegen von der Lage der Räume $[A]$ und $[B]$ gegen einander abhängt und sich durch Parallelverschiebung derselben nicht ändert.

Für $c$ erhält man mit Zuziehung des speciellen Falles, wo die beiden Pyramiden zusammenfallen und die Kanten $a_1 a_2 \ldots a_n$ alle aufeinander senkrecht stehen:

$$c = (n!)^2.$$

Nennen wir die positive Quadratwurzel aus der Determinante

$$\Sigma \pm \cos a_1 a_1 \ldots \cos a_n a_n,$$

deren sämmtliche Diagonalelemente gleich der Einheit sind, den „Sinus" der Ecke $(A_0)$ oder des Raumwinkels $(a_1 a_2 \ldots a_n)$, so fliesst hieraus sofort als Ausdruck der $n$-dimensionalen Pyramide durch die Elemente einer Ecke

14) $$n!\, A_0 A_1 \ldots A_n = a_1 \ldots a_n \sin (A_0).$$

Beiläufig ergiebt sich aus dieser Formel, wie man den Sinus eines Raumwinkels auf $\frac{n!}{2}$ verschiedene Arten als Product von $n+1$ Sinus einfacher Winkel darstellen kann, sowie der Satz, dass sich die Sinus der Pyramidenecken wie die Producte der nicht in ihnen zusammenstossenden Kanten verhalten.

Um nun auch $\lambda$ zu bestimmen, wollen wir annehmen, $A_0 A_1 \dots A_n$ sei die Projection von $B_0 B_1 \dots B_n$, und setzen

$$A_0 A_1 \dots A_n = \mu\, B_0 B_1 \dots B_n,$$

Wir haben dann für $\lambda$ die Gleichung

$$\frac{\lambda}{\mu}(n!)^2 A_0 A_1 \dots A_n{}^2 = a_1{}^2 \dots a_n{}^2 \,.\, \frac{\Sigma \pm \cos a_1 b_1 \dots \cos a_n b_n}{\cos a_1 b_1 \dots \cos a_n b_n}.$$

Mit Hilfe von 13) geht diese über in

$$\frac{\lambda}{\mu} \sin(a_1 \dots a_n)^2 = \frac{\Sigma \pm \cos a_1 b_1 \dots \cos a_n b_n}{\cos a_1 b_1 \dots \cos a_n b_n}$$

und hieraus endlich, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\cos a_p b_q = \cos a_p a_q \,.\, \cos a_q b_q,$$

folgt

$$\lambda = \mu.$$

Da nun $\lambda$ einen von der speciellen Beschaffenheit der beiden Pyramiden unabhängigen Werth besitzt, so ist dies auch für $\mu$ der Fall; die Projection einer $n$-dimensionalen Pyramide auf einen andern Raum von $n$ Dimensionen ist also eine Pyramide, deren Volum gleich dem der ersten ist, multiplicirt mit einem nur von der gegenseitigen Lage der beiden Räume abhängigen Factor $\mu$, welcher seinen Werth bei Vertauschung oder Parallelverschiebung der Räume nicht ändert.

Sind nun diese Räume zu einem und demselben Raume $\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Dimension parallel, so ist $\mu$ offenbar der Cosinus ihres Winkels; ist dies nicht der Fall, so kann man im gewöhnlichen Sinne des Wortes von einem Winkel der Räume nicht sprechen, wir können aber die Constante

$$\operatorname{arc\,cos} \mu \equiv [A], [B]$$

als „Winkel" von $[A]$ und $[B]$ definiren und nunmehr den allgemeinen Satz aussprechen, von welchem wir in Gleichung 14) bereits einen speciellen Fall kennen gelernt haben:

„Sind $A_0 A_1 \dots A_n$, $B_0 B_1 \dots B_n$ zwei Pyramiden je eines Raumes $[A]$, $[B]$, und $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$ deren in $A_0$, resp. $B_0$ zusammenstossende Kanten, so ist stets

15) $$(n!)^2 A_0 A_1 \dots A_n \,.\, B_0 B_1 \dots B_n \cos[A], [B] \\ = a_1 \dots a_n \,.\, b_1 \dots b_n \,\Sigma \pm \cos a_1 b_1 \dots \cos a_n b_n."$$

Aus 14) und 15) folgt noch für zweimal $n$ Gerade und die zu jeder Gruppe parallelen Räume $n^{ter}$ Dimension

16) $$\sin(a_1 \ldots a_n) \sin(b_1 \ldots b_n) \cos[A],[B] = \Sigma \pm \cos a_1 b_1 \ldots \cos a_n b_n.$$

Die Determinante der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet also, wenn die Räume $[A]$ und $[B]$ zu einander normal sind* oder [Gleichung 14)], wenn die Geraden einer der beiden Gruppen zu einem Raume von weniger als $n$ Dimensionen parallel sind; der Sinus eines Raumwinkels von $n+1$ Geraden verschwindet.

Aus der Formel 16) erhält man leicht einen noch allgemeineren Ausdruck.

Zunächst finden wir, wenn

$$\eta_1, \ldots \eta_\mu, \; \vartheta_1, \ldots \vartheta_\mu, \quad \text{wo } \mu = \binom{n}{m}$$

die Sinus aller Raumwinkel sind, die von je $m$ Geraden des Systems $a_1 \ldots a_n$, resp. $b_1 \ldots b_n$ gebildet werden, und $[\eta_1] \ldots [\eta_\mu]$, resp. $[\vartheta_1] \ldots [\vartheta_\mu]$ die zugehörigen Räume $m^{ter}$ Dimension (vergl. Baltzer, Determinanten, S. 62) bezeichnen:

17) $$\eta_1 \ldots \eta_\mu . \vartheta_1 \ldots \vartheta_\mu . \Sigma \pm \cos[\eta_1],[\vartheta_1] \ldots \cos[\eta_\mu],[\vartheta_\mu] = [\Sigma \pm \cos a_1 b_1 \ldots \cos a_n b_n]^{\binom{n-1}{m-1}}$$

und hieraus folgt nach Gleichung 16)

18). $$\sin([\eta_1] \ldots [\eta_\mu]) \sin([\vartheta_1] \ldots [\vartheta_\mu]) \cos[A],[B]^{\binom{n-1}{m-1}} = \Sigma \pm \cos[\eta_1][\vartheta_1] \ldots \cos[\eta_\mu][\vartheta_\mu],$$

eine Beziehung, die erst in Räumen von mehr als drei Dimensionen zur vollen Geltung gelangt.

Als Ausdruck des Volums der Pyramide durch die Volume und Winkel der in einer Ecke zusammenstossenden Pyramiden $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension $V_1 \ldots V_n$ erhält man, wenn wieder $[V_1] \ldots [V_n]$ die zugehörigen Räume bezeichnen (vergl. Baltzer, S. 212):

19) $$n^{n-1} A_0 A_1 \ldots A_n^{n-1} = \overline{n-1}! \, V_1 \ldots V_n . \sin([V_1] \ldots [V_n]).$$

Wieder an die Formel 15) anknüpfend, gelangen wir jetzt zur vollständigen Lösung der oben gestellten Aufgabe. Wir finden nämlich durch eine einfache, von Baltzer (a. a. O. S. 220) gegebene Transformation den Werth einer und folglich der sämmtlichen Unterdeterminanten von 6) (wenn man nämlich den Index 0 mit $n+1$ vertauscht):

---

* Es findet dies dann statt, wenn die Fusspunkte der von irgend $n+1$ voneinander unabhängigen Punkten des einen Raumes auf den zweiten Raum gefällten Lothe in einem Raume von weniger als $n$ Dimensionen liegen; das Gleiche ist alsdann für jede solche Punktgruppe des einen oder andern Raumes der Fall, weil $\mu$ verschwindet.

$$20)\quad (-1)^{n+1}\, 2^n (n!)^2 . A_0 A_1 \dots A_n . B_0 B_1 \dots B_n \cos[A],[B] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & A_0 B_0^2 & \dots & A_0 B_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & A_n B_0^2 & \dots & A_n B_n^2 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante rechts in dieser merkwürdigen Identität nach dem Zusammenfallen beider Systeme gleich Null gesetzt, liefert uns eine ausreichende Bedingung dafür, dass $n+1$ Punkte in einem Raume von weniger als $n$ Dimensionen liegen.

Aus dem letzten Ausdrucke für das Product zweier Pyramiden in den Cosinus des Winkels ihrer Räume kann man noch einen dritten herleiten, in welchem zwei ganz willkürliche Punkte $S$ und $S'$ vorkommen.

Setzen wir nämlich

$$2s_{pq} \equiv 2SA_p . S'B_q \cos SA_p, S'B_q = SB_q^2 + S'A_p^2 - SS'^2 - A_p B_q^2$$

und substituiren den Werth von $A_p B_q^2$ etc. in die Formel 20), so entsteht (vergl. Baltzer, S. 220)

$$21)\quad (n!)^2 A_0 A_1 \dots A_n . B_0 B_1 \dots B_n \cos[A],[B] = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s_{00} & \dots & s_{0n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & s_{n0} & \dots & s_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Formel bildet eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes und dient zur Berechnung des Volums der einer Ecke $A_0$ gegenüberliegenden Pyramide $\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Dimension aus den Elementen dieser Ecke. Man findet, wenn $c_{pq}$ die frühere Bedeutung $a_p . b_q . \cos a_p, b_q$ hat:

$$22)\quad (\overline{n-1}!)^2 A_1 A_2 \dots A_n^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ein einfacher Ausdruck ergiebt sich uns hier auch für den Radius $r$ des der Pyramide umschriebenen Kreises. Setzt man nämlich unter der Voraussetzung, dass $A_{n+1}$ der Mittelpunkt dieses Kreises ist (Baltzer a. a. O. S. 208) in der verschwindenden Determinante

$$\Sigma \pm \cos a_1, a_1 \dots \cos a_{n+1}, a_{n+1}$$

$$\cos a_k, a_{n+1} = \frac{A_0 A_k}{2 A_0 A_{n+1}} = \frac{a_k}{2r},$$

so erhält man für $r$ die Gleichung

$$23)\qquad \begin{vmatrix} 4r^2 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 & \dots & \cos a_1 a_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & \cos a_n a_1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Formel 20) erhält man, wie schon bemerkt, leicht die Bedeutung der Determinante 9), wenn die $n+2$ Kreise kein gemeinsames Potenzcentrum besitzen, diese Determinante also nicht verschwindet.

Wir finden

$$24)\qquad \Sigma \pm p_{11} \dots p_{\nu\nu} = (-1)^{n+1}\, 2^n (n!)^2\, \pi_i \pi'_k\, \alpha_i \beta_k \cos[A][B]$$

für ganz beliebiges $i$ und $k$.

Für $\nu = n+1$ hat diese Determinante ebenfalls eine sehr einfache Bedeutung, welche mit der durch die Gleichung 24) dargestellten in solcher Beziehung steht, dass die eine unbestimmt wird, wenn die andere in Geltung tritt.

Aus Gleichung 20) erhalten wir nämlich sofort, wenn $\nu = n$,

$$25)\qquad \Delta_\nu(A, B) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & p_{01} & \dots & p_{0\nu} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & p_{\nu 0} & p_{\nu 1} & \dots & p_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\, 2^{n-1} (\overline{n-1}!)^2 [2n^2 A_0 A_1 \dots A_\nu \times B_0 B_1 \dots B_\nu \cos[A_0 A_1 \dots A_\nu][B_0 B_1 \dots B_\nu] + p_{00} A_1 \dots A_\nu . B_1 \dots B_\nu \cos[A_1 \dots A_\nu][B_1 \dots B_\nu]],$$

eine Gleichung, deren linke Seite in $-\Sigma \pm p_{11} \dots p_{\nu\nu}$ übergeht, wenn $p_{0k} = p_{k0} = 0$ wird für $k = 1 \dots \nu$.

Fällt noch $A_0$ oder $B_0$ in den Raum $[A_1 \dots A_\nu]$, resp. $[B_1 \dots B_\nu]$ hinein oder, was dasselbe ist, setzen wir jetzt $\nu = n+1$, so entsteht insbesondere

$$26)\qquad \Delta_{n+1}(A, B) = (-1)^n\, 2^n (n!)^2 p_{00} . A_1 \dots A_\nu . B_1 \dots B_\nu \cos[A], [B],$$

eine Formel, die einen einfachen Ausdruck für den Radius des Orthogonalkreises von $n+1$ Kreisen liefert, nämlich

$$27)\qquad (-1)^{n+1}\, 2^{n+1} r_0^2 A_1 \dots A_\nu^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & \dots & r_\nu^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & \dots & A_1 A_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & r_\nu^2 & A_\nu A_1^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Eine ähnliche Formel erhält man für den Radius des Kreises, der $n+1$ gegebene in grössten Kreisen schneidet; auch ist es jetzt leicht, die Frage zu beantworten, welche Bedeutung die Determinanten 8), 10) etc. haben, wenn sie nicht verschwinden.

Um den Zusammenhang der letzten Formeln mit früheren ganz klar hervortreten zu lassen, sei noch die zweite Bedeutung der Determinante $\Sigma \pm p_{11} \dots p_{\nu\nu}$ für $\nu = n+1$ angeführt, welche sie zufolge des Chasles'schen Princips besitzt. Unter allen Orthogonalkreisen $(B_0)$ des Systems $(A)$ giebt es nämlich in einem den Raum $[A]$ enthaltenden Raume $R^{n+1}$ zwei, deren Radien verschwinden; es sind dies die beiden Punkte $B'_0$ und $B''_0$, in welchen sich die um die Punkte $A_k$ beschriebenen Kreise $n^{\text{ter}}$ Dimension treffen.

Wir haben daher infolge der Gleichung 25), indem wir $\nu = n+1$ annehmen,

$$\Sigma \pm p_{11} \dots p_{\nu\nu}$$
$$= (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 [2 h_0 h'_0 . \cos [A'_0 \dots A_\nu][B'_0 \dots B_\nu] + B'_0 A'^2_0 \cos [A][B]]$$
$$\times A_1 \dots A_\nu . B_1 \dots B_\nu,$$

wo $h_0$, $h'_0$ die von den Punkten $B'_0$, $A'_0$ auf den Raum $[A]$, resp. $[B]$ gefällten Lothe bedeuten.

Vergleichen wir dies mit Formel 26), so folgt u. A., wenn $r_0$ jetzt die durch die Gleichung 27) definirte Bedeutung hat,

$$h_0^2 + r_0^2 = 0,$$

was auch leicht direct einzusehen ist.

Die Gleichung 26) liefert uns also die reelle Bedeutung der Determinante 20), wenn die aus den in letzterer vorkommenden Abständen zusammenzusetzende Pyramide nur $n$ reelle Ecken besitzt.

---

## Anhang.

1. Bei den Relationen, welche den für Punkte, Pyramidenproducte etc. abgeleiteten Sätzen in der Geometrie des Strahlenbündels entsprechen, spielt der Sinus der Ecke eine ähnliche Rolle, wie dort die Pyramide; die Anzahl der in Betracht kommenden Fundamentalgebilde ist hier jedoch stets um eines verringert, da der Raum von $n$ Dimensionen durch $n+1$ Punkte, seine Richtung dagegen schon durch $n$ Gerade bestimmt ist.

Ein anderer, wesentlicher Unterschied ist der, dass sich die Vorzeichen der durch $n+2$ Punkte bestimmten Pyramiden stets auf eine einzige Art so wählen lassen, dass ihre Summe verschwindet, während die ähnlich gebildete Summe der Sinus der Raumwinkel von $n+1$ Geraden nur in einem besondern Falle den Werth Null erlangt.

Den bereits abgeleiteten Sätzen können wir leicht noch einige weitere hinzufügen. So finden wir, wenn wir annehmen, dass in der Gleichung

3) der Punkt $A_k$ von allen übrigen gleichweit absteht, in Berücksichtigung von 14):

„Bedeutet $\alpha_k$ den Sinus der Ecke $a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{n+1}$, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem (vorausgesetzt, dass alle Geraden durch einen Punkt gehen) $a_k$ von dem durch die übrigen Geraden gehenden Rotationskegelraum aus- oder eingeschlossen wird, so gilt für $n+1$ feste und eine bewegliche Gerade $o$ die Gleichung

$$\Sigma \sin \frac{o a_k^2}{2} . \alpha_k = \tfrac{1}{2} \Sigma \alpha_k \quad \text{oder} \quad \Sigma \cos o a_k . \alpha_k = 0\text{``},$$

woraus man leicht noch weitere Consequenzen ziehen mag.

Auf ähnliche Weise erhält man aus Formel 25) (s. Siebeck in Crelle's Journal, J. 62 S. 151):

Die Determinante
$$\Sigma \pm \sin \frac{a_1 b_1^2}{2} \dots \sin \frac{a_\nu b_\nu^2}{2}$$
hat für $\nu = n$ den Werth
$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} tg\, \varrho_0\, tg\, r_0 \cos \varphi \sin (A) \sin (B) \cos [A] [B],$$
wo $(A)$ und $(B)$ die von den Geraden $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$ gebildeten Raumwinkel, $[A]$, $[B]$ die zugehörigen Räume, $\varrho_0$ und $r_0$ die Radien, $\varphi$ endlich den Winkel der den beiden Ecken umschriebenen Kreiskegelräume bezeichnet.

Für $\nu = n+1$ nimmt dieser Ausdruck die Form $0.\infty$ an; wir erhalten in diesem Falle, wenn wir die leicht zu verificirende Relation

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{a_1 b_1^2}{2} & \dots & \sin \frac{a_1 b_{n+1}^2}{2} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{a_{n+1} b_1^2}{2} & \dots & \sin \frac{a_{n+1} b_{n+1}^2}{2} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

in Betracht ziehen, den wahren Werth obiger Determinante

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Sigma_{p,q}\, \alpha_p \beta_q \cos [A], [B].$$

Sie verschwindet, wenn die Geraden eines der Systeme zu Strahlen eines Kreiskegelraumes parallel sind [vergl. die Formeln 5) und 9)], sowie stets für $\nu = n+2$.

2. Aus der Bedingung, dass drei Kugeln, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, die $\frac{\text{erste}}{\text{zweite}}$ (vergl. Schlömilch, Geom. des Maasses) Potenzebene gemein haben:

$$r_1^2 . M_2 M_3 + r_2^2 . M_3 M_1 + r_3^2 . M_1 M_2 \pm M_2 M_3 . M_3 M_1 . M_1 M_2 = 0,$$

ergiebt sich in Verbindung mit dem Satze von Stewart u. A. (vgl. Formel 5):

„Sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Mitten der Diagonalen $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, ... eines vollständigen Vierseits, so gilt in Bezug auf jeden Punkt $O$ des Raumes die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &OA_1.OA_2 \cos A_1OA_2.\beta\gamma \\ +&OB_1.OB_2 \cos B_1OB_2.\gamma\alpha \\ +&OC_1.OC_2 \cos C_1OC_2.\alpha\beta \end{aligned}\right\} = 0.$$

Berücksichtigt man, dass drei Punktepaare in Involution als die Ecken eines vollständigen Vierseits angesehen werden können, dessen Seiten zusammengefallen sind, so kann man aus dieser Gleichung mit grosser Leichtigkeit die bekannten metrischen Relationen gerader involutorischer Punktreihen ableiten.

Von ihr ist die folgende nicht wesentlich verschieden:

$$(OA_1^2 + OA_2^2)\beta\gamma + (OB_1^2 + OB_2^2)\gamma\alpha$$
$$+ (OC_1^2 + OC_2^2)\alpha\beta + 4\beta\gamma.\gamma\alpha.\alpha\beta = 0.$$

Vier Punktepaare einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung werden mit einem Punkte $O$ ausserhalb durch die Gleichung

$$(OA_1.OA_2.\cos A_1OA_2 - OC_1.OC_2.\cos C_1OC_2).(B_1D_1 + B_2D_2)$$
$$+ (OB_1.OB_2 \cos B_1OB_2 - OD_1.OD_2 \cos D_1OD_2.(C_1A_1 + C_2A_2) = 0$$

verbunden.

Für vier Punktepaare einer involutorischen Punktreihe zweiter Ordnung hat man dagegen

$$OA_1.OA_2.\cos A_1OA_2.\beta\gamma\delta - OB_1.OB_2 \cos B_1OB_2.\gamma\delta\alpha$$
$$+ OC_1.OC_2.\cos C_1OC_2.\delta\alpha\beta - OD_1.OD_2.\cos D_1OD_2.\alpha\beta\gamma = 0.$$

Für Flächen zweiter Ordnung existirt ein ähnlicher Satz, wenn die Involutionsebene zu einer cyklischen Ebene parallel ist.

3. Die Kugel, welche vier gegebene in grössten Kreisen schneidet, die, welche durch ihre Mittelpunkte geht, und die Orthogonalkugel der vier Kugeln besitzen eine gemeinsame Potenzebene; der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche von einer gegebenen rechtwinklig und von einer zweiten in Durchmessern geschnitten werden, ist eine leicht construirbare Kugelfläche, welche zur Lösung der Aufgabe benutzt werden kann:

„Eine Kugel zu construiren, die von drei anderen rechtwinklig und von einer in einem grössten Kreise, oder von zweien rechtwinklig und von zwei in grössten Kreisen, oder endlich von einer Kugel rechtwinklig und von drei anderen in grössten Kreisen geschnitten wird."

4. Ist $O$ der Brennpunkt einer Parabel und $ABC$ ein derselben umschriebenes Dreieck, so hat man für jede Lage des letzteren

$$OA.\sin BOC + OB.\sin COA + OC.\sin AOB = 0.$$

5. Sind $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ Strahlen einer Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Endpunkte auf einem Kreisschnitte derselben liegen, und bedeutet z. B. $\alpha_1$ den Sinus des Raumwinkels $a_2\, a_3\, a_4$, so ist sowohl

$$\Sigma a_k . \alpha_k = 0, \text{ als auch } \sum \frac{\alpha_k}{a_k} = 0.$$

6. Die Bedingung, dass $n+3$ Kreise von einem $\overline{n+4}^{\text{ten}}$ unter gleichen Winkeln geschnitten werden, ist das Verschwinden einer Determinante von der Form 9), welche man aus dieser erhält, wenn man an Stelle der gemeinschaftlichen Potenzen die Quadrate der Sinus der halben Winkel setzt.

7. Bezeichnet man in einem einfachen Fünfeck das Loth vom Punkte $A_k$ auf die Ebene $A_p A_q A_r$ mit $h_{kq}$, so ist das Bestehen der Gleichung

$$1 + \frac{h_{13}}{h_{31}} . \frac{h_{24}}{h_{42}} . \frac{h_{35}}{h_{53}} . \frac{h_{41}}{h_{14}} . \frac{h_{52}}{h_{25}} = 0$$

eine Form der Bedingung dafür, dass die fünf Punkte $A_k$ in einem Raume von drei Dimensionen liegen.

8. Die von Darboux (a. a. O.) abgeleitete Form der einem Tetraeder umschriebenen Kugelfläche erhält man leicht aus der Gleichung 5) mit Hilfe der für jedes indifferente System bestehenden Gleichung

$$\Sigma_p \Sigma_q \, A_p A_q^2 . \alpha_p \alpha_q = 0,$$

indem man in derselben die den Index $\nu$ enthaltenden Glieder weglässt.

9. Das Folgende enthält eine Anwendung der Formel 1) auf einige Symmetriepunkte des Dreiecks. Wir greifen aus der grossen Menge von speciellen Beziehungen, die für solche Punkte aus 1) resultiren, nur einige heraus, um die Fruchtbarkeit dieses Satzes zu zeigen. Viele dieser, allerdings nur durch ihre Form merkwürdigen Gleichungen dürften auf anderem Wege wohl kaum so leicht zu verificiren sein.

Um Wiederholungen zu vermeiden, schicke ich die durchweg angewandten Bezeichnungen voraus:

$t_a$, $m_a$, $h_a$ mögen bezüglich die Mittentransversale, Winkelhalbirende, Höhe der Ecke $A$ des Dreiecks bezeichnen, $M_\varrho$, $M_{\varrho_a}$, ... die Mittelpunkte der Berührungskreise, $R$ den des Feuerbach'schen, $M$ den des umschriebenen Kreises, $r$ dessen Radius; $S$ sei der Schwerpunkt, $D$ der Höhendurchschnittspunkt, $W'_0$ der Punkt, in dem sich die Transversalen nach den Berührungspunkten von $M_\varrho$ durchschneiden; der Schnittpunkt der Transversalen nach den drei Punkten, die zu den Berührungspunkten von $M_\varrho$ auf den Seiten symmetrisch liegen, heisse $V_0$; endlich bezeichnen wir die Winkel des Dreiecks mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die halbe Seitensumme mit $s$ und die oberen Höhenabschnitte mit $a_1$, $b_1$, $c_1$. Dann gelten u. A. folgende Sätze:

1) $$OA^2 + OB^2 + OC^2 - 3\,OS^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

2) $$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - 4\,OR^2 = 3r^2;$$

3) $$OA^2 \frac{a}{a_1} + OB^2 \frac{b}{b_1} + OC^2 \frac{c}{c_1} - OD^2 \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} = a a_1 + b b_1 + c c_1,$$

$$\left\{ \begin{aligned} & OA^2 . tg\,\alpha + OB^2 . tg\,\beta + OC^2 . tg\,\gamma - OD^2 . tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma \\ & = a^2 \, ctg\,\alpha + b^2 \, ctg\,\beta + c^2 \, ctg\,\gamma = 2 \varDelta ABC, \end{aligned} \right.$$

$$OA^2\frac{a}{\cos\alpha}+OB^2\frac{b}{\cos\beta}+OC^2\frac{c}{\cos\gamma}-OD^2\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=2abc;$$

4) $$OA^2a+OB^2b+OC^2c-2OM_\varrho^2s=abc,$$

$$OA^2.-a+OB^2b+OC^2c-2OM_{\varrho_a}^2(s-a)=-abc,$$

$$OA^2.\sin\alpha+OB^2.\sin\beta+OC^2.\sin\gamma-4OM_\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\varDelta ABC,$$

$$OA^2.-\sin\alpha+OB^2\sin\beta+OC^2\sin\gamma-4OM_\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=-2\varDelta ABC,$$

$$M_\varrho A^2=bc\frac{s-a}{s}=bc\,ctg\frac{\alpha}{2},\quad M_{\varrho_a}A^2=bc\frac{s}{s-a}=bc\,tg\frac{\alpha}{2},$$

$$M_{\varrho_a}B^2=ac\frac{s-c}{s-a},\quad M_{\varrho_a}C^2=ab\frac{s-b}{s-a},$$

$$AM_\varrho.AM_{\varrho_a}=AM_{\varrho_b}.AM_{\varrho_c}=bc$$

u. s. w.

Aus diesen Formeln kann man leicht ebensoviele für die Höhen des Dreiecks ableiten.

5) $$OA^2\sin2\alpha+OB^2\sin2\beta+OC^2\sin2\gamma-4OM^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=2\varDelta ABC;$$

6) $$OA^2\,ctg\frac{\alpha}{2}+OB^2\,ctg\frac{\beta}{2}+OC^2\,ctg\frac{\gamma}{2}-OV_0^2\,ctg\frac{\alpha}{2}\,ctg\frac{\beta}{2}\,ctg\frac{\gamma}{2}$$

$$=a^2\,tg\frac{\alpha}{2}+b^2\,tg\frac{\beta}{2}+c^2\,tg\frac{\gamma}{2};$$

7) $$MS^2=r^2-\tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2);$$

8) $$MD^2=r^2-2\varDelta ABC\,ctg\alpha\,ctg\beta\,ctg\gamma;$$

9) $$MM_\varrho^2=r^2-\frac{abc}{2s}=r^2-2r\varrho,\quad MM_{\varrho_a}^2=r^2+\frac{abc}{2(s-a)}=r^2+2r\varrho_a,$$

$$MM_\varrho^2+MM_{\varrho_a}^2+MM_{\varrho_b}^2+MM_{\varrho_c}^2=8r^2;$$

10) $$M_\varrho S^2=\frac{bc(s-a)+ca(s-b)+ab(s-c)}{3s}-\tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

11) $$M_\varrho D^2=\frac{a^3\,ctg\alpha+b^3\,ctg\beta+c^3\,ctg\gamma}{2s}.$$

Man hat auch

$$M_\varrho D^2=\frac{bc(s-a)+ca(s-b)+ab(s-c)}{s}-(a^2+b^2+c^2)+4r^2+2r\varrho,$$

$$M_\varrho D^2=3r^2-4M_\varrho R^2-\frac{bc(s-a)+ca(s-b)+ab(s-c)}{s}.$$

Hieraus folgt

$$M_\varrho R=\frac{r}{2}-\varrho:$$

der bekannte Satz, dass der Feuerbach'sche Kreis jeden der 16 Berührungskreise der vier Dreiecke berührt, deren Seiten er halbirt.

---

## VIII.

# Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.

Von

Dr. O. Böklen

in Reutlingen.

---

### § 1.

$O$ sei der Schwerpunkt eines Körpers, durch welchen die Hauptträgheitsaxen $x$, $y$, $z$ gehen und denen die Hauptträgheitsradien, deren Quadrate $a > b > c$ sind, entsprechen. $M$ ist ein Punkt im Innern des Körpers, $OM = \sqrt{r}$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, dann sind die drei Wurzeln der in $k$ cubischen Gleichung

$$1)\qquad \frac{(k-a)x^2}{r-(k-a)} + \frac{(k-b)y^2}{r-(k-b)} + \frac{(k-c)z^2}{r-(k-c)} = 0$$

oder, wenn man $x^2 + y^2 + z^2 = r$ addirt,

$$2)\qquad \frac{x^2}{r-(k-a)} + \frac{y^2}{r-(k-b)} + \frac{z^2}{r-(k-c)} = 1$$

die Quadrate der Hauptträgheitsradien von $M$, deren Richtungen die Normalen der drei durch $M$ gehenden confocalen Flächen des Grundellipsoids

$$3)\qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

sind. Wenn $k$ constant und $> a$ ist, so sind 1) und 2) die Gleichungen einer Wellenfläche $W_k$, welche von dem Ellipsoid

$$4)\qquad \frac{x^2}{k-a} + \frac{y^2}{k-b} + \frac{z^2}{k-c} = 1$$

abgeleitet ist, indem man auf den Centralschnitten desselben Perpendikel errichtet gleich ihren Halbaxen. Also liegen alle Punkte $M$, für welche ein Hauptträgheitsradius constant ist, auf $W_k$. Ist auch $r$ constant, so ist 2) eine der mit 3) confocalen Flächen, die $W_k$ in einer sphärischen Curve schneiden und deren Gleichungen

$$5)\qquad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda-(a-b)} + \frac{z^2}{\lambda-(a-c)} = 1$$

sein sollen. $(\lambda)$ ist das Ellipsoid, $(\mu)$ und $(\nu)$ sind die beiden Hyperboloide; es ist also nach 2) und 5) $\lambda$ oder $\mu$ oder $\nu = r-(k-a)$ und da nach

der Theorie der elliptischen Coordinaten $r = \lambda + \mu + \nu - (a-b) - (a-c)$ ist, so muss entweder

$$6) \qquad \lambda + \nu = k + a - b - c$$

oder

$$7) \qquad \lambda + \mu = k + a - b - c$$

sein. 6) ist die Gleichung des äussern Mantels von $W_k$ und 7) diejenige des innern in elliptischen Coordinaten. Weil für ein constantes $\lambda$ entweder $\nu$ oder $\mu$ ebenfalls constant ist, so folgt daraus, dass die Hyperboloide $(\mu)$ und $(\nu)$, welche den Einen Mantel in einer sphärischen Curve schneiden, dem andern in einer von ihren Krümmungslinien begegnen, während die Ellipsoide $(\lambda)$ die Wellenfläche nicht in sphärischen Curven, sondern nur den einen oder den andern Mantel in einer von ihren Krümmungslinien treffen, welche verschiedenen Systemen angehören. Da die Gleichung 1) auch die confocalen Kegel repräsentirt, die $W_k$ in den sphärischen und ellipsoidischen Linien schneiden, so müssen diese letzteren zugleich Krümmungslinien der Confocalen 2) oder 5) sein. Durch $M$ geht eine ellipsoidische Linie von $W_k$; weil sie zugleich eine Krümmungslinie von $(\lambda)$ ist, so giebt ihre Tangente die Richtung eines Hauptträgheitsradius von $M$ an, und da für alle Punkte $M$ auf $W_k$ Ein Hauptträgheitsradius constant ist, so folgt weiter:

Die Tangenten der ellipsoidischen Linien einer Wellenfläche geben die Richtungen der constanten Trägheitsradien an.

Man kann diesen Satz auch so beweisen:

Die Quadrate der Hauptträgheitsradien im Punkte $M$, durch welchen die Confocalen $(\lambda)$, $(\mu)$, $(\nu)$ gehen, sind

$$r + a - \lambda, \quad r + a - \mu, \quad r + a - \nu,$$

welche der Reihe nach die Richtung von den Normalen dieser Flächen haben, oder mit Benützung des obigen Werthes von $r$

$$\mu + \nu - a + b + c, \quad \lambda + \nu - a + b + c, \quad \lambda + \mu - a + b + c;$$

nach 6) ist also für den äussern Mantel der nach der Normale von $(\mu)$ gerichtete, und nach 7) für den innern Mantel der nach der Normale von $(\nu)$ gerichtete Hauptträgheitsradius constant.

$OO_1$ sei die wahre und $OO_2$ die secundäre optische Axe von $W_k$; in dem Cuspidalpunkte $O_2$ schneiden sich zwei ellipsoidische Linien, eine vom äussern und eine vom innern Mantel; die Gleichungen von $OO_2$ sind

$$8) \qquad y = 0, \quad \frac{z^2}{x^2} + \frac{(k-a)(c-b)}{(k-c)(a-b)} = 0.$$

Die Coordinaten von $O_2$ entsprechen der Relation $x^2 + z^2 = k - b$; eliminirt man hieraus und aus 8) $k$, so findet man

$$9) \qquad y = 0, \quad \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1.$$

Die Gleichungen von $OO_1$ sind

10) $$y=0,\quad \frac{z^2}{x^2}+\frac{c-b}{a-b}=0,$$

d. h.:

Die Wellenflächen $W_k$, von denen jede einem bestimmten Werth $\sqrt{k}$ des einen Hauptträgheitsradius ihrer Punkte entspricht, haben dieselbe Richtung für ihre wahren optischen Axen, nämlich die Asymptote der Focalhyperbel von den confocalen Flächen des Grundellipsoids; die Endpunkte ihrer secundären optischen Axen liegen auf dieser Focalhyperbel.

Im Punkte $O_2$ schneiden sich zwei ellipsoidische Linien, also sind hier zwei Hauptträgheitsradien gleich. Somit hat man den Satz von Binet: Die Focalkegelschnitte sind die Orte im Raume, für welche zwei der Hauptträgheitsmomente eines festen Körpers unter einander gleich sind (Journal de l'éc. polyt. XVI), oder von Ampère, welcher sie als den Ort der Punkte eines Körpers von unendlich vielen permanenten Rotationsaxen angiebt.

$O_1G$ sei die gemeinsame Tangente des Kreises und der Ellipse, in welchen $W_k$ die $xz$-Ebene schneidet, so ist

$$O_1G^2=\frac{(a-b)(b-c)}{k-b},$$

somit ist, da $OO_1=\sqrt{k-b}$, $OO_1.O_1G=\sqrt{(a-b)(b-c)}$ also constant, für alle Wellenflächen $W_k$, d. h. die Punkte $G$ liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Eine Asymptote $OO_1$ und deren grosse Halbaxe $=\sqrt[4]{4(a-b)(b-c)}$ ist. $O_1G$ sind die Durchmesser der singulären Berührungskreise der Flächen $W_k$, welche auf der $xz$-Ebene senkrecht stehen. $M$ sei ein Punkt auf der Peripherie eines solchen Kreises und $MH$ senkrecht auf der $xz$-Ebene; setzt man $OO_1=\mathfrak{z}$, $MH=\mathfrak{y}$, $O_1H=\mathfrak{x}$, so ist

11) $$\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}}\mathfrak{z}=\sqrt{(a-b)(b-c)}$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher die verschiedenen singulären Kreise der Wellenfläche $W_k$ liegen. Betrachtet man $O_1$ als Pol der Focalhyperbel, so ist die durch $G$ mit $OO_1$ gezogene Parallele die Polare. Chasles hat in dem Aperçu historique, Note XXXI, 56, den Satz angegeben: „Wenn man von einem Punkte einer Hauptebene confocaler Flächen auf dieselben Normalen fällt, so liegen diese in zwei Ebenen, wovon die zweite senkrecht ist zur Hauptebene; die Fusspunkte der letzteren bilden einen Kreis, dessen Durchmesser das von dem Punkte auf seine Polare hinsichtlich des in der Hauptebene liegenden Focalkegelschnitts gefällte Perpendikel ist.“ Liegt also $M$ auf dem Kreise, dessen Durchmesser $O_1G$, so ist $O_1M$ senkrecht auf dem durch $M$ gehenden con-

focalen Hyperboloid; da aber durch $M$ auch eine ellipsoidische Linie von $W_k$ geht, welche zugleich Krümmungslinie des durch $M$ gehenden confocalen Ellipsoids ist, so ist $O_1 M$ zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie und somit die Richtung eines für alle Punkte $M$ auf dem Kreise constanten Trägheitsradius. Die beiden anderen Hauptträgheitsaxen von $M$ treffen die durch $G$ gezogene Polare. Das Vorhergehende lässt sich so zusammenfassen:

Die von den einzelnen Punkten der Asymptote der Focalhyperbel des Grundellipsoids auf ihre Polaren hinsichtlich dieser Hyperbel gefällten Perpendikel sind die Durchmesser von Kreisen, die auf der Asymptote senkrecht stehen; für alle Punkte auf der Peripherie eines solchen Kreises giebt die Sehne, welche nach dem auf der Asymptote liegenden Endpunkte des Durchmessers gezogen wird, die Richtung des constanten Hauptträgheitsradius an; die beiden anderen Hauptträgheitsaxen schneiden die durch den andern Endpunkt gehende Polare.

Unter den drei Hauptträgheitsradien von einem beliebigen Punkte $M$ im Innern eines Körpers ist also immer Einer ausgezeichnet, entweder der mittlere, wenn $M$ auf dem äussern, oder der grösste, wenn $M$ auf dem innern Mantel der betreffenden Fläche $W_k$ liegt. In jedem Falle geht durch $M$ eine ellipsoidische Linie, die auf einem Kegel liegt, dessen Spitze der Schwerpunkt $O$ ist und dessen Focallinien die secundären optischen Axen dieser Wellenfläche sind [8)]; also bildet die durch $OM$ und den ausgezeichneten Trägheitsradius, welcher eine Tangente des Kegels ist, gelegte Ebene mit den beiden durch $OM$ und die secundären optischen Axen gelegten Ebenen gleiche Winkel, oder:

Construirt man mit dem Werthe $k$ des mittleren oder grössten Hauptträgheitsradius eines Punktes $M$ die beiden Axen 8), verbindet $M$ mit dem Schwerpunkte $O$ und legt durch $OM$ und diese Axen zwei Ebenen, so wird eine dritte durch $OM$ und den betreffenden Hauptträgheitsradius gehende Ebene den einen der von den zwei ersten Ebenen gebildeten Winkel halbiren. Hat zugleich die Verbindungslinie $OM$ eine constante Länge, so ist auch die Summe oder Differenz der Winkel constant, die sie mit den Axen 8) einschliesst.

## § 2.

Eine weitere Verwendung findet die Wellenfläche, wenn man ihre Beziehungen untersucht zu dem Complex von Geraden, durch welche sich an ein Ellipsoid rectanguläre Tangentialebenen legen lassen. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen sei der Punkt $M$ die Spitze eines

Kegels, welcher eine der confocalen Flächen $(\lambda')$ des Grundellipsoids 3), deren Gleichungen in 5) angegeben sind, berührt, so wird

12)
$$\frac{\xi^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\eta^2}{\mu-\lambda'}+\frac{\zeta^2}{\nu-\lambda'}=0$$

die Gleichung dieses Kegels sein. Die Normalen von den drei Confocalen $(\lambda)$, $(\mu)$, $(\nu)$, die sich in $M$ schneiden, sind die Axen der $\xi, \eta, \zeta$. Zwei Erzeugende des Kegels, welche in der Ebene $\xi\zeta$ liegen, $MN$ und $MP$ [$N$ und $P$ sind die Berührungspunkte auf $(\lambda')$], entsprechen der Relation

13)
$$\eta=0, \quad \frac{\xi}{\zeta}=\pm\sqrt{\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda'-\nu}}.$$

Bewegt sich $M$ auf der Krümmungslinie $\nu=const.$ auf $(\lambda)$, so ist $\frac{\xi}{\zeta}$ ebenfalls constant, d. h.:

Durch eine Tangente der Krümmungslinie eines Ellipsoids lege man zwei Ebenen, welche ein confocales Ellipsoid berühren, so ist der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen von constanter Grösse. (Mannheim, From the proceedings of the royal society, 16. Juni 1881.)

Setzt man in 13) $\frac{\xi}{\zeta}=\pm 1$ oder $2\lambda'=\lambda+\nu$, so ist der Winkel zwischen beiden Tangentialebenen ein rechter, und wenn man mit Rücksicht auf 6) $2\lambda'=k+a-b-c$ setzt, so erhält man das andere Theorem von Mannheim: Die Spitzen der Berührungskegel eines Ellipsoids $(\lambda')$, bei welchen die beiden Erzeugenden Eines Hauptschnittes rechtwinklig zu einander sind, liegen auf einer Wellenfläche. Da die Normalen von $(\lambda')$ in den Berührungspunkten $N$ und $P$ rechtwinklig auf den beiden Tangentialebenen stehen, so liegen sie in der Ebene des Winkels $NMP$ und schneiden sich also in einem Punkte $F$. Daher giebt Mannheim seinem Satze (den er auf kinematischem Wege bewiesen hat) auch folgende Form: Bewegt sich ein rechter Winkel, dessen Schenkel ein Ellipsoid berühren, so, dass die Normalen des Ellipsoids (in einem Punkte $F$) sich schneiden, so beschreibt die Spitze $M$ des Winkels eine Wellenfläche, deren Normale $MF$ ist. $F$ ist der Focus der Ebene des Winkels, denn für eine unendlich kleine Bewegung der Ebene des Rechtecks $MNFP$ sind die Tangenten der von den Punkten $N$ und $P$ beschriebenen Trajectorien senkrecht zu $NF$ und $PF$, also ist $F$ ein momentaner Drehungspunkt; somit sind die Tangenten der Trajectorien aller Punkte der Ebene senkrecht zu ihren Verbindungslinien mit $F$, d. h. $MF$ ist die Normale der Wellenfläche in $M$.

Die Gleichung der Confocalen $(\lambda')$

14)
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}(k+a-b-c)}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}(k-a+b-c)}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}(k-a-b+c)}=1$$

zeigt, dass dieselbe unter der Voraussetzung $k > a$ entweder ein Ellipsoid oder ein einmantliges Hyperboloid ist. Zu jedem einem bestimmten Werthe von $k$ entsprechenden constanten Trägheitsradius gehört eine bestimmte Fläche $(\lambda')$ [14)], die durch denselben an $(\lambda')$ gelegten Tangentialebenen berühren diese Fläche in zwei Punkten, deren Normalen sich schneiden. Da durch jeden Punkt $M$ der Wellenfläche sowohl eine ellipsoidische, als auch eine sie rechtwinklig schneidende sphärische Linie geht, so enthält die durch $OM$ und die Tangente der ersteren gehende Ebene die Normale $MF$ der Wellenfläche, welche als Diagonale des Rechtecks $MNFP$ die Sehne $NP$ halbirt. Hieraus folgt also der Satz:

Die durch den Schwerpunkt und den constanten Trägheitsradius bestimmte Ebene schneidet die Ebene des kleinsten und grössten Trägheitsradius, wenn der Punkt auf dem äussern Mantel liegt, oder des kleinsten und mittlern, wenn er auf dem innern Mantel liegt, in der Normale der Wellenfläche.

Die Halbirungslinie des Winkels $NMP$ giebt die Richtung des kleinsten und diejenige seines Nebenwinkels die Richtung des grössten oder mittleren Trägheitsradius an.

Wenn $mx^2 + ny^2 + pz^2 = 0$ die Gleichung eines Kegels, auf seine Axen bezogen, ist, so ist die Gleichung eines zweiten Kegels, durch dessen Mantellinien sich rectanguläre Tangentialebenen an den ersten legen lassen, auf dieselben Axen bezogen

$$m(n+p)x^2 + n(p+m)y^2 + p(m+n)z^2 = 0.$$

Wenn man dies auf den Kegel 12) anwendet, so findet man

$$15)\qquad (\mu + \nu - 2\lambda')\xi^2 + (\nu + \lambda - 2\lambda')\eta^2 + (\lambda + \mu - 2\lambda')\zeta^2 = 0$$

für die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze $(\lambda\mu\nu)$ ist und durch dessen Mantellinien sich rectanguläre Tangentialebenen an den Kegel 12) und somit auch an das Ellipsoid $(\lambda')$ ziehen lassen. Betrachtet man in 15) $\lambda'$ als constant, die übrigen Grössen als veränderlich, so stellt sie alle Complexgeraden, durch die sich an ein Ellipsoid rectanguläre Tangentialebenen legen lassen, vor. Setzt man in 15) $\lambda + \nu = 2\lambda'$ oder $\lambda + \mu = 2\lambda'$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$16)\qquad \frac{\xi}{\zeta} = \pm\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu}}$$

oder

$$17)\qquad \frac{\xi}{\eta} = \pm\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\lambda-\nu}},$$

d. h. der Kegel 15) degenerirt in beiden Fällen in zwei Ebenen, welche in 16) reell und in 17) imaginär sind. Durch Vergleichung mit 6), 7) und 14) ergiebt sich, dass im ersten Falle die Spitze des Kegels auf dem äussern und im zweiten Falle auf dem innern Mantel von $W_k$ liegt.

Alle Complexgeraden des Systems, welche durch einen Punkt der Wellenfläche gehen, liegen demnach in zwei Ebenen, die sich in der Tangente der ellipsoidischen Linie schneiden und mit der Normale des confocalen Ellipsoids $(\lambda)$ gleiche Winkel bilden. Liegt der Punkt auf dem äussern Mantel, so sind die Ebenen, also auch die Complexgeraden, reell; liegt er aber auf dem innern Mantel, so sind die Ebenen imaginär, nur ihr Durchschnitt ist reell. Also giebt es für einen Punkt des innern Mantels nur Eine Gerade, nämlich die Tangente der ellipsoidischen Linie, durch welche sich an das Ellipsoid $(\lambda')$ rectanguläre Tangentialebenen legen lassen.

Die Spitzen sämmtlicher rectangulären Trieder, welche sich um das Ellipsoid $(\lambda')$ beschreiben lassen, liegen nach 14) auf der Kugel, deren Halbmesser $=\sqrt{\frac{1}{2}(3k-a-b-c)}$ ist. Diese Kugel werde von einer Ebene $L$ in einem Kreise $K$ geschnitten; die Projection von $(\lambda')$ auf $L$ ist eine concentrische Ellipse $E$; alle Complexgeraden oder Triederkanten, welche in $L$ liegen, bilden Sehnen von $E$; errichtet man auf denselben in ihren Endpunkten Senkrechte, so werden diese $E$ berühren, also sind die Complexgeraden Tangenten eines concentrischen und mit $E$ coaxialen Kegelschnittes, welcher eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem die grosse Axe von $E$ kleiner oder grösser, als der Durchmesser von $K$. Sind $\alpha$ und $\beta$ die Halbaxen von $E$ und ist $r$ der Halbmesser von $K$, so sind $\sqrt{r^2-\beta^2}$ und $\sqrt{r^2-\alpha^2}$ die Halbaxen des Kegelschnittes, dessen Tangenten Complexgerade bilden. Bewegt man also $L$ parallel mit sich selbst, so bleiben $\alpha$ und $\beta$ constant und man erhält ein System von confocalen Kegelschnitten, wozu auch $E$ gehört, deren gemeinsame Brennpunkte wir mit $A$ und $B$ bezeichnen. Im Grenzfalle, wenn $E$ und $K$ sich berühren, degenerirt der Kegelschnitt in die Gerade $AB$ und alle Complexgeraden, welche dieser speciellen Lage von $L$ entsprechen, gehen sowohl durch $A$, als durch $B$; somit liegen diese zwei Punkte auf dem äussern Mantel der Wellenfläche $W_k$. In $AB$ selbst fallen zwei Complexgerade zusammen, welche ausser den Punkten $A$ und $B$ noch einem dritten Punkte $C$ zwischen $A$ und $B$ auf dem innern Mantel angehören. Dies geht auch aus folgender Betrachtung hervor:

Auf jeder Ebene $L$ liegen zwei bestimmte Punkte $A$ und $B$, nämlich die Brennpunkte von $E$; wird $L$ parallel mit sich selbst bewegt, so durchlaufen $A$ und $B$ zwei auf $L$ senkrechte Gerade; jeder Lage von $L$ gehört einer von den confocalen Kegelschnitten an, dessen Tangenten Complexgerade sind, so lange die Ebene $L$ nicht ausserhalb der Wellenfläche $W_k$ ist, in welchem Falle sie keine Complexgerade enthält. Berührt $L$ den äussern Mantel von $W_k$, so ist die Eine Axe der confocalen Kegelschnitte, welche durch die Mitte von $AB$ senkrecht zu dieser Geraden geht, die einzige Complexgerade von $L$; sie ist im Berührungspunkte zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie von $W_k$ und also eine sin-

guläre Linie des Complexes, weil sie die Grenzfläche $W_k$ oder die Singularitätenfläche des ganzen Complexes in einer ellipsoidischen Linie berührt. Schneidet $L$ den äussern Mantel, ohne den innern zu treffen, so sind die Tangenten einer der confocalen Hyperbeln Complexgerade, worunter zwei singuläre in den Berührungspunkten der Hyperbel mit der Durchschnittscurve von $L$ und $W_k$. Berührt $L$ den innern Mantel in $C$, so geht durch $C$ nach dem Obigen nur Eine Complexgerade, welche zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie oder Normale des durch $C$ gehenden Hyperboloids ($\nu$), also singuläre Linie ist. $C$ liegt deswegen auf $AB$, welche Gerade als Grenzlinie der confocalen Hyperbeln anzusehen ist. Durch die Punkte $A$ und $B$, die auf dem äussern Mantel liegen, gehen unendlich viele Complexgerade, worunter zwei singuläre (ausser der Geraden $AB$) als Tangenten der ellipsoidischen Linien in $A$ und $B$. Die Ebene $L$ entspricht in dieser Lage für den Punkt $A$ der Gleichung 16) und steht senkrecht auf einer Focallinie des Tangentialkegels 12). Schneidet $L$ beide Mäntel von $W_k$, so sind die Complexgeraden Tangenten einer der confocalen Ellipsen, welche sowohl die Durchschnittscurve auf dem äussern, als auch auf dem innern Mantel berührt, und zwar in je zwei Punkten, durch welche also im Ganzen vier singuläre Linien gehen.

Diese Resultate, welche hier durch einfache geometrische Betrachtungen abgeleitet sind, hat Painvin (Nouv. Annales, 1872) ausführlich auf analytischem Wege entwickelt. Sie lassen sich auch auf die Lehre von den constanten Trägheitsradien anwenden, deren Richtungen als Tangenten von ellipsoidischen Linien mit den singulären Linien zusammenfallen. Man erhält dann den Satz:

In einer Ebene $L$ im Innern eines Körpers liegen vier gleiche Hauptträgheitsradien, welche einem bestimmten Hauptträgheitsmomente $k$ entsprechen, wenn $L$ beide Mäntel der nach diesem Werthe von $k$ abgeleiteten Wellenfläche $W_k$ schneidet. Berührt $L$ den innern Mantel, so fallen zwei von diesen vier Trägheitsradien in der Berührungslinie zusammen; schneidet die Ebene nur den äussern Mantel, so enthält sie zwei Trägheitsradien und im Falle der Berührung Einen von dem Werthe $k$. Alle anderen ausserhalb $W_k$ liegenden Ebenen enthalten keinen solchen Hauptträgheitsradius.

Betrachtet man die Normale einer durch $O$ parallel mit $L$ gelegten Ebene als Axe der $\mathfrak{z}$, zieht in derselben durch $O$ Parallelen mit den Axen der confocalen Kegelschnitte, welche die Axen der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sein sollen, so erhält man für die Fläche, auf welcher bei einer parallelen Bewegung von $L$ diese Kegelschnitte liegen, für dieses neue Coordinatensystem die Gleichung

18) $$\frac{\mathfrak{x}^2}{R^2-\beta^2-\mathfrak{z}^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{R^2-\alpha^2-\mathfrak{z}^2}=1.$$

$R$ ist der Halbmesser der Kugel, auf welcher die Spitzen der um $(\lambda')$ beschriebenen rectangulären Trieder liegen, also ist nach 14)

$$R^2=\tfrac{1}{2}(3k-a-b-c).$$

Hat die $\mathfrak{z}$-Axe die Richtung der wahren optischen Axe von $W_k$, welche zugleich die Axe des um $(\lambda')$ beschriebenen Rotationscylinders ist, so wird $\alpha^2=\beta^2=\frac{1}{2}(k-a+b-c)$ und die Gleichung 18) verwandelt sich in

19) $$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=k-b.$$

Legt man durch eine nicht zum Complex gehörende Gerade Ebenen, so bilden die in denselben enthaltenen Complexkegelschnitte die zur Geraden gehörige Complexfläche, demnach sind 18) und 19) die Gleichungen von solchen Flächen, welche unendlich fernen Geraden entsprechen. In dem speciellen Falle 19), wo $L$ senkrecht auf der wahren optischen Axe steht, degeneriren die confocalen Kegelschnitte in ein System von concentrischen Kreisen.

Für eine bestimmte Normale von $L$ sind drei besondere Lagen dieser Ebene zu unterscheiden, $L_0$, $L_1$ und $L_2$; im ersten Falle geht sie durch den Mittelpunkt $O$, im zweiten berührt sie den innern Mantel in $C$ und dann liegen die Brennpunkte $A$ und $B$ auf dem äussern Mantel, im dritten Falle endlich berührt sie den äussern Mantel in $C'$. Fällt man von $O$ ein Perpendikel $OD$ auf die Ebene $L_1$, so ist

20) $$OD=\frac{\pi+\pi''}{\lambda-\nu}.$$

$\pi$, $\pi'$, $\pi''$ sind die Producte der Halbaxen von den drei confocalen Flächen $(\lambda)$, $(\mu)$, $(\nu)$ [5)], die sich in $A$ schneiden; wenn $\varepsilon$ der Winkel ist zwischen $AB$ und der Normale von $(\nu)$, so ist nach 16) $tg\,\varepsilon=\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu}}$, also $sin\,\varepsilon=\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu}}$, $cos\,\varepsilon=\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\mu-\nu}}$; bezeichnet man ferner die Abstände der Tangentialebenen dieser Flächen von $O$ mit $P$, $P'$, $P''$, so ist $P=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\lambda-\nu}}$, $P''=\frac{\pi''}{\sqrt{\lambda-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$, $OD=P\,cos\,\varepsilon+P''sin\,\varepsilon$, woraus sich die Relation 20) ergiebt. Da sie $\mu$ nicht enthält, so ist $OD$ constant, wenn $\lambda$ und $\nu$ constant bleiben, d. h.:

Die durch die Tangenten einer ellipsoidischen Linie des äussern Mantels einer Wellenfläche an den innern gelegten Tangentialebenen berühren eine concentrische Kugel.

Der Halbmesser des Kreises $K$, in welchem die Kugel, auf der die Spitzen der um $(\lambda')$ beschriebenen rectangulären Trieder liegen, von der Ebene $L$ geschnitten wird, ist $\sqrt{R^2-OD^2}$ und die Halbaxen des in

$L$ liegenden Complexkegelschnittes sind $\sqrt{R^2-OD^2-\alpha^2}$ und $\sqrt{R^2-OD^2-\beta^2}$; $\alpha$ und $\beta$ sind die Halbaxen der Projection $E$ von $(\lambda')$ auf $L$. Für $L_1$ wird $R^2-OD^2=\alpha^2$ und für $L_2$ $R^2-OD^2=\beta^2$; im ersten Falle ist $K$ der über der grossen Axe von $E$, im zweiten der über der kleinen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis. Ist für $L_1$ $OD$ constant, so muss es auch $\alpha$ sein, und ist für $L_2$ $OD$ constant, so muss auch $\beta$ constant bleiben. Mit Beziehung auf das Vorhergehende hat man nun den Satz:

Die Projectionen eines Ellipsoids $(\lambda')$ auf den Tangentialebenen einer Wellenfläche $W_k$ sind Ellipsen, deren Axenkreise auf einer concentrischen Kugel liegen. Für eine Tangentialebene des innern Mantels liegen die Brennpunkte der Projectionen auf dem äussern Mantel und der grosse Axenkreis liegt auf der Kugel, während bei einer Tangentialebene des äussern Mantels dies beim kleinen Axenkreise stattfindet. Im ersten Falle geht die grosse Axe durch den Berührungspunkt und giebt hier die Polarisationsrichtung für den betreffenden Lichtstrahl an, im zweiten geht die kleine Axe durch den Berührungspunkt, wo sie gleichfalls mit der Polarisationsrichtung übereinstimmt. Berührt die Tangentialebene des innern Mantels zugleich eine concentrische Kugel, so beschreiben die beiden Brennpunkte der Projection ellipsoidische Linien der Wellenfläche oder, was dasselbe ist, Krümmungslinien von Ellipsoiden, und die grosse Axe der Projection ist constant. Bei den Tangentialebenen des äussern Mantels, die eine concentrische Kugel berühren, ist die kleine Axe constant.

Dieser Satz lässt sich auch in anderer Form aussprechen, wodurch man eine neue Construction sowohl der Wellenfläche, als auch ihrer Fusspunktfläche, der Wellengeschwindigkeitsfläche, erhält, und wobei das Ellipsoid $(\lambda')$, welches aus dem Ergänzungsellipsoid 4) abgeleitet ist, zu Grunde liegt:

Die beiden coaxialen Rotationscylinder, welche dem Berührungscylinder eines Ellipsoids $(\lambda')$ um- und einbeschrieben sind, schneiden die Kugel, auf welcher die Spitzen der um $(\lambda')$ beschriebenen rectangulären Trieder liegen, in zwei Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Wellengeschwindigkeitsfläche von $W_k$ liegen und deren Ebenen die Wellenfläche $W_k$ selbst berühren. Der Durchschnitt des Berührungscylinders mit der Ebene des grösseren Kreises ist eine Ellipse $E$, deren grosse Axe den innern Mantel in einer ellipsoidischen Linie berührt und deren Brennpunkte auf dem äussern Mantel der Wellenfläche liegen, während die kleine Axe des Durchschnitts mit der Ebene des kleinen

Kreises den äussern Mantel in einer ellipsoidischen Linie berührt.

Die Durchschnittscurve des Berührungscylinders mit der Kugel hat drei zu einander senkrechte Symmetralebenen; ihre Projection auf der ersten, senkrecht zur Cylinderaxe, ist die Ellipse $E$, während sie sich auf den zwei anderen als Ellipsen- und Hyperbelbogen projicirt. Betrachtet man die Cylinderaxe als gewöhnlichen (unpolarisirten) Lichtstrahl, so stellt sie die Bahncurve eines Aethertheilchens vor. In einem zweiaxigen Krystalle dagegen sind die Verbindungslinien ihrer höchsten und tiefsten Punkte (welche in der zweiten und dritten Symmetralebene liegen) die Polarisationsrichtungen der Aethertheilchen in den beiden parallelen Tangential- oder Wellenebenen $L_1$ und $L_2$.

Bezeichnet man die Quadrate der Abstände des Mittelpunktes $O$ von $L_1$ und $L_2$ mit $v_1$ und $v_2$ und ihre Richtungscosinus mit $l$, $m$, $n$, so sind $v_1$ und $v_2$ die Wurzeln der Gleichung $\frac{l^2}{k-a-v}+\frac{m^2}{k-b-v}+\frac{n^2}{k-c-v}=0$, d. h. der Fusspunktfläche von $W_k$, oder von

$$21)\quad l^2(k-b-v)(k-c-v) + m^2(k-c-v)(k-a-v)+n^2(k-a-v)(k-b-v)=0.$$

Ferner ist $\alpha^2=R^2-v_1$ und $\beta^2=R^2-v_2$. Für die Quadrate der Abstände der Mittelpunkte beider Kreise von den Berührungspunkten der Wellenfläche auf der grossen und kleinen Axe der beiden Ellipsen hat man die Werthe

$$\frac{(k-a-v_1)(k-b-v_1)(k-c-v_1)}{v_1(v_2-v_1)},\quad \frac{(k-a-v_2)(k-b-v_2)(k-c-v_2)}{v_2(v_1-v_2)}.$$

Die Halbaxen des Complexkegelschnittes einer Ebene $L$ im Abstande $\mathfrak{z}$ von $O$ sind $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\beta^2}$ und $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\alpha^2}$. Man ziehe an denselben zwei Tangenten, die sich unter einem rechten Winkel in $G$ schneiden, so liegt dieser Punkt auf dem Kreise, dessen Halbmesser $=\sqrt{2R^2-2\mathfrak{z}^2-\alpha^2-\beta^2}$; $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien die Coordinaten von $G$ in Beziehung auf die Axen $\alpha$ und $\beta$, so ist $\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2=2R^2-2\mathfrak{z}^2-\alpha^2-\beta^2$ oder

$$22)\quad \frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{v_1+v_2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}=1.$$

$G$ ist die Spitze einer vierseitigen Pyramide, deren Seitenflächen auf einander senkrecht stehen und ($\lambda'$) berühren. Bleibt die Normale von $L$ unveränderlich, so sind $l$, $m$, $n$ und somit auch $v_1$ und $v_2$ constant, also liegt $G$ auf dem abgeplatteten Drehungsellipsoid 22). Aus 21) folgt

$$v_1+v_2=l^2(2k-b-c)+m^2(2k-c-a)+n^2(2k-a-b).$$

Ist $G'$ der Endpunkt der $\mathfrak{z}$-Axe des Ellipsoids 22) und sind $x, y, z$ die Coordinaten von $G'$ in Beziehung auf die Axen von ($\lambda'$), so ist $\frac{1}{2}(v_1+v_2)=x^2+y^2+z^2$, somit

23) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2\left(k-\frac{b+c}{2}\right)+y^2\left(k-\frac{c+a}{2}\right)+z^2\left(k-\frac{a+b}{2}\right)$.

Dies ist die Fusspunktfläche des Ellipsoids

24)
$$\frac{x^2}{k-\frac{b+c}{2}}+\frac{y^2}{k-\frac{c+a}{2}}+\frac{z^2}{k-\frac{a+b}{2}}=1.$$

Setzt man in den Werthen $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\beta^2}$ und $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\alpha^2}$ der Halbaxen des Complexkegelschnittes von $L$ $v_1=R^2-\alpha^2$ und $v_2=R^2-\beta^2$, $\mathfrak{z}^2=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$, so erhält man $\sqrt{\frac{1}{2}(v_2-v_1)}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}(v_1-v_2)}$, also ist der Complexkegelschnitt von $L$, wenn diese Ebene durch $G'$ geht, eine gleichseitige Hyperbel, woraus folgt:

Die Ebenen derjenigen Complexkegelschnitte eines Ellipsoids ($\lambda'$) [14)], welche gleichseitige Hyperbeln sind, berühren ein zweites Ellipsoid 24).

Hieraus folgt ferner, da die Asymptoten dieser Hyperbeln Complexgerade sind:

Die Spitzen der um ein Ellipsoid ($\lambda'$) beschriebenen vierseitigen Pyramiden, deren Gegenseiten paarweise auf einander senkrecht stehen und sich in zwei rectangulären Geraden schneiden in einer Ebene senkrecht zum Halbmesser, liegen auf der Fusspunktfläche eines zweiten Ellipsoids 24).

Der Complexkegel 15), dessen Spitze ($\lambda\mu\nu$) ist, berührt beide Mäntel von $W_k$ oder blos den innern, und zwar je in zwei Punkten, je nachdem seine Spitze ausserhalb des äussern Mantels oder zwischen beiden Mänteln sich befindet. Die nach den Berührungspunkten gehenden Erzeugenden des Kegels sind Richtungen von constanten Hauptträgheitsradien, wodurch man einen dem obigen, sich auf die Hauptträgheitsradien in einer Ebene beziehenden, analogen Satz für solche Radien, die durch einen Punkt gehen, erhält.

## § 3.

Das Grundellipsoid 3), welches aus den drei Hauptträgheitsradien $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ für den Punkt $O$ als Schwerpunkt eines Körpers construirt ist, gehört zum System der confocalen Flächen ($\lambda$), ($\mu$), ($\nu$) der Gleichung 5), deren Focalellipse durch die Relationen

25)
$$z=0,\quad \frac{x^2}{a-c}+\frac{y^2}{b-c}=1$$

besimmt ist. Zieht man in einem Punkte $M$ oder ($\lambda\mu\nu$) die Normalen dieser drei Flächen und trägt darauf von $M$ aus beiderseits Strecken ab

gleich $\lambda$, $\mu$ und $\nu$, so erhält man die Axen für ein Hilfsellipsoid, welches die $yz$-Ebene in $O$ berührt und dessen durch $M$ parallel mit dieser Ebene gelegter Centralschnitt die Halbaxen $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a-c}$ hat, wovon die erste parallel mit der $y$-Axe und die zweite parallel mit der $z$-Axe ist. Versetzt man nun das Hilfsellipsoid parallel mit sich selbst, so dass sein Mittelpunkt die Strecke $MO$ durchläuft, so wird in dieser neuen Lage der genannte Centralschnitt den Gleichungen

$$26) \qquad x=0, \quad \frac{y^2}{a-b}+\frac{z^2}{a-c}=1$$

entsprechen. $OM$ wird jetzt der conjugirte Semidiameter von 26) sein, da die Tangentialebene von $M$ parallel der $yz$-Ebene ist, und zwar für jede beliebige Lage des Punktes $M$ im Raume. Soll aber dieser Punkt auf der Wellenfläche $W_k$ bleiben, so ist $\lambda+\nu$ constant, so lange er auf dem äussern Mantel sich bewegt, und $\lambda+\mu$ für den innern. Hierauf beruht folgende neue Erzeugungsart der Wellenfläche:

Bei den Ellipsoiden von gemeinsamem Centralschnitt, wo die Quadratsumme der grossen und kleinen oder der grossen und mittlern Axe constant ist, beschreiben die Endpunkte des dem Centralschnitte conjugirten Durchmessers eine Wellenfläche, und zwar im ersten Falle den äussern, im zweiten den innern Mantel.

Bewegt sich $M$ auf einer ellipsoidischen Linie von $W_k$, so sind zwei Axen des Hilfsellipsoids constant und die dritte allein veränderlich; beschreibt dagegen $M$ eine sphärische Linie von $W_k$, so ist sowohl eine Axe, als auch die Quadratsumme der beiden anderen constant. Dieselbe Wellenfläche $W_k$ ist aber auch von dem Ellipsoid 4) als Ergänzungsellipsoid abgeleitet dadurch, dass man auf den Centralschnitten desselben Perpendikel errichtet gleich ihren Halbaxen. Dieses Ellipsoid gehört zu einem zweiten System von confocalen Flächen, deren Focalellipse man erhält, wenn in 4) $x=0$ und $k=a$ gesetzt wird; sie ist also identisch mit 26). In einem früheren Aufsatze (diese Zeitschrift 1880, S. 346) habe ich eine ähnliche Erzeugungsart der Wellenfläche durch Ellipsoide mit gleichem Centralschnitte angegeben, welche auf die Fläche $W_k$ in folgender Weise sich anwenden lässt:

Bei den Ellipsoiden, deren gemeinschaftlicher Centralschnitt 25) ist und deren grosse Axe die constante Länge $2\sqrt{k-c}$ hat, beschreiben die auf derselben liegenden Hauptbrennpunkte die beiden Mäntel von $W_k$.

Man kann aber auch das oben eingeführte Hilfsellipsoid sich von seiner ursprünglichen Lage aus, wo der Mittelpunkt $M$ oder $(\lambda\mu\nu)$ noch auf $(\lambda)$ liegt, so bewegen lassen, dass $M$ stets auf dieser Fläche bleibt, also die grosse Halbaxe $\lambda$ allein constant ist. Wird es dann aus seiner jeweiligen Lage nach $O$ versetzt, so dass es durch die Ellipse 26)

geht, so erhält man eine Schaar von Ellipsoiden mit gemeinschaftlichem Centralschnitt und constanter Länge der grossen Axe, bei welchen die Endpunkte des dem Centralschnitt conjugirten Durchmessers, das Ellipsoid ($\lambda$) und die Hauptbrennpunkte eine neue von ($\lambda$) als Ergänzungsellipsoid abgeleitete Wellenfläche $W_\lambda$ beschreiben.

Werden die Hauptbrennpunkte mit $F$ und $F'$ und die Endpunkte des dem gemeinschaftlichen Centralschnitte 26) conjugirten Durchmessers mit $M$ und $M'$ bezeichnet, so kann man das Vorhergehende so zusammenfassen:

Ist die grosse Axe der Ellipsoide allein constant, so beschreiben $M$ und $M'$ das Ellipsoid ($\lambda$), $F$ und $F'$ die Wellenfläche $W_\lambda$. Wenn ausserdem noch die mittlere Axe $\mu$ oder die kleine $\nu$ constant ist, so bewegen sich $M$ und $M'$ auf einer Krümmungslinie ($\mu$) oder ($\nu$) von ($\lambda$); $F$ beschreibt einen sphärischen Kegelschnitt und $F'$ eine ellipsoidische Linie auf $W_\lambda$ (also ebenfalls eine Krümmungslinie, die aber auf einem andern Ellipsoid liegt). Ist endlich die Quadratsumme der grossen und kleinen oder der grossen und mittleren Axe constant, so bewegen sich $M$ und $M'$ auf der Wellenfläche $W_k$, während $F$ und $F'$ eine neue Fläche beschreiben, die aus verschiedenen Wellenflächen $W_\lambda$ angehörenden, sphärischen und ellipsoidischen Linien besteht. Man erhält also folgende neue Erzeugungsart für die Krümmungslinien des Ellipsoids:

Bei den Ellipsoiden mit gemeinschaftlichem Centralschnitt und von constanter Länge der grossen und mittleren (oder kleinen) Axe beschreibt einer der Hauptbrennpunkte, wie auch jeder Endpunkt des dem Centralschnitt conjugirten Durchmessers eine Krümmungslinie, wovon jede einem andern Ellipsoid angehört.

## § 4.

Da die ellipsoidischen Linien der Wellenfläche zugleich Krümmungslinien von Ellipsoiden sind, so haben sie auch, wie diese, Brennpunkte, welche auf den Axen liegen. Diese Eigenschaft, wie auch einige andere, die sich anreihen, habe ich in dieser Zeitschrift (1881, S. 383) untersucht. Nach einer Notiz im Aperçu historique von Chasles (Cap. V § 48) hat Ch. Dupin zuerst gefunden, dass die Krümmungslinien auf Drehungsflächen liegen und deswegen Brennpunkte haben. Dieselbe Bemerkung hat auch Jacobi in seinem Schreiben an Steiner (Crelle 1834, S. 137) gemacht, wo er am Schlusse anführt, dass die Brennpunkte aus dem Ivory'schen Satze abgeleitet werden können. Durch Vergleichung der Formeln 6) und 7) mit den Gleichungen 6), 7) und 8) *l. c.* ergiebt sich, dass die ellipsoidischen Linien des innern Mantels und des äussern, letztere bis zur Grenze $\lambda\nu = (a-b)(a-c)$, welche dem Drehungscylinder angehört, auf verlängerten Drehungsellipsoiden liegen, deren

gemeinschaftlicher Aequatorialkreis in der $yz$-Ebene liegt und den Halbmesser $\sqrt{k-a}$ hat. Die Brennpunkte der ersteren liegen also auf der $x$-Axe in den Grenzen $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a-c}$, diejenigen der zweiten von $\sqrt{a-c}$ bis $\infty$. Die übrigen ellipsoidischen Linien des äussern Mantels bilden zwei Gruppen: die Einen zwischen den Grenzen $\nu = 0$ und $\nu = (a-b)\frac{\lambda-(a-c)}{\lambda-(a-b)}$, welche ebenfalls einem Drehungscylinder angehört, der aber die $y$ zur Axe hat, liegen auf verlängerten Drehungsellipsoiden, deren gemeinschaftlicher Aequatorialkreis in der $xz$-Ebene den Halbmesser $\sqrt{k-b}$ hat. Ihre Brennpunkte liegen auf der $y$-Axe zwischen den Grenzen $\sqrt{b-c}$ und $\infty$. Die anderen ellipsoidischen Linien, welche von den beiden cylindrischen eingeschlossen sind, liegen auf einmantligen Drehungshyperboloiden mit dem gleichen Aequator in der $xz$-Ebene, und haben also keine Brennpunkte.

---

Vorstehenden Betrachtungen mögen nun noch einige Schlussbemerkungen als Resumé beigefügt werden, die sich auf die Bedeutung der Wellenfläche als Veranschaulichungsmittel nicht blos in der Optik, sondern auch in der Theorie der Trägheitsmomente, sowie für die Geometrie der Flächen zweiten Grades beziehen.

Man kann $O$ sowohl als Schwerpunkt eines Körpers, als auch im Innern eines zweiaxigen Krystalls liegend annehmen. Sind im letztern Falle $\sqrt{k-a}$, $\sqrt{k-b}$, $\sqrt{k-c}$ die reciproken Werthe der Hauptbrechungscoefficienten, so ist die Fläche $W_k$, abgeleitet aus dem Ergänzungsellipsoid 4), zugleich die Wellenfläche des Krystalls. Ihre Halbmesser geben die Geschwindigkeiten der beiden in einer Richtung sich fortpflanzenden Strahlen an und die Tangenten der ellipsoidischen Linien in den Endpunkten die Halbmesser der zugehörigen Aetherschwingungen. Diese Tangenten sind aber auch die Richtungen der constanten Hauptträgheitsradien in denselben Endpunkten.

Die Sehnen der singulären Kreise von $W_k$, welche vom Endpunkte der wahren optischen Axe ausgehen, stimmen bei dem Lloyd'schen Versuche über die innere konische Refraction mit den Polarisationsrichtungen oder Aetherschwingungen der parallel austretenden Strahlen überein, während sie andererseits die Richtungen der constanten Hauptträgheitsradien für die Punkte auf der Peripherie eines solchen Kreises angeben. Da jedem Werthe von $k$ eine besondere Wellenfläche $W_k$ entspricht und alle diese Flächen die gleiche Richtung für ihre wahren optischen Axen haben, welche in der Ebene des grössten und kleinsten Hauptträgheitsradius im Schwerpunkte liegen, so erhalten dieselben für die Theorie der

Trägheitsmomente die Bedeutung, dass sich in jedem ihrer Punkte constante Hauptträgheitsradien schneiden, welche die Sehnen von Kreisen sind, die die Fläche 11) bilden.

Fällt man von $O$ auf die Tangentialebene des Ergänzungsellipsoids 4) Perpendikel, so bilden ihre Fusspunkte die Elasticitätsfläche, die Quadrate ihrer Radien sind gleich den elastischen Kräften, welche durch die Bewegung eines Aethermoleculs in gleicher Richtung erregt werden. Construirt man aber die Fusspunktfläche vom Grundellipsoid 3), so sind die Halbmesser dieser Fläche gleich den ihrer Richtung entsprechenden Trägheitsradien.

Weitere Analogien bieten die Cauchy'schen Polarisationsellipsoide einerseits für die Optik und die Cauchy-Poinsot'schen und Binet-schen Ellipsoide andererseits für die Theorie der Trägheitsmomente dar.

Da die Wellenfläche für den Complex von Geraden, durch welche sich an ein Ellipsoid rectanguläre Tangentialebenen legen lassen, Singularitätenfläche *(Surface limite)* ist, so dient sie, wie im Obigen an verschiedenen Beispielen nachgewiesen wurde, zur Auffindung mancher Eigenschaften des Ellipsoids, zu deren Veranschaulichung die mit den confocalen Complexkegelschnitten versehene Ebene $L$ wesentlich beiträgt. Endlich ist noch die Beziehung der Wellenfläche zu den Krümmungslinien des Ellipsoids zu erwähnen, da sie aus solchen, verschiedenen confocalen Flächen zweiten Grades angehörigen Linien gebildet ist.

Reutlingen, Januar 1882.

# Kleinere Mittheilungen.

## IX. Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function.

Eine auf einer Kreislinie gegebene Ortsfunction möge in gewissen Punkten irgendwelche Singularitäten, wie z. B. Unstetigkeit, Unbestimmtheit u. s. w. haben. Wir betrachten diese Punkte als Theilpunkte der Kreislinie und unterscheiden zunächst die beiden Fälle einer endlichen oder unendlich grossen Anzahl derselben. In letzterem Falle giebt es auf der Kreislinie einen oder mehrere Punkte, in welchen die Theilpunkte unendlich nahe zusammenrücken, die also nicht in so kleine Bögen eingeschlossen werden können, dass in diesen nicht unendlich viele Theilpunkte liegen. Wir nennen diese Punkte Häufungspunkte der Theilung, und zwar Häufungspunkte erster Ordnung. Ein Häufungspunkt kann entweder selbst ein Theilpunkt sein oder auch nicht. Die Zahl der Häufungspunkte erster Ordnung ist entweder eine endliche oder unendlich gross. In letzterem Falle nennen wir die Häufungspunkte derselben Häufungspunkte zweiter Ordnung, welche, wenn ihre Zahl unendlich gross ist, wieder Häufungspunkte dritter Ordnung haben, u. s. f. Die Zahl der Ordnungen ist nun entweder eine endliche, so dass also eine bestimmte Zahl $n$ angebbar ist derart, dass die Zahl der Häufungspunkte $n^{\text{ter}}$ Ordnung eine endliche ist, oder die Zahl der Ordnungen ist unendlich gross.

In vorstehender Weise hat Herr Cantor in Bd. V der „Mathematischen Annalen", S. 123, die Theilungen einer Kreislinie untersucht und davon Anwendung gemacht auf die Theorie der Fourier'schen Reihe. Herr Cantor beschränkt sich für diesen Zweck auf Theilungen mit einer endlichen Anzahl von Ordnungen der Häufungspunkte. Für eine unendliche Anzahl derselben führt er blos ein Beispiel an, und zwar dasjenige einer Theilung, durch welche die ganze Kreislinie oder irgend ein Bogen derselben in lauter unendlich kleine Theile zerlegt wird. Die Frage, ob es noch andere Theilungen gebe, deren Häufungspunkte unendlich viele Ordnungen haben, wirft Herr Cantor gar nicht auf. Nun ist aber gerade die Beantwortung dieser Frage von besonderem Interesse, da man dadurch auf bisher noch nicht betrachtete Functionen von ganz eigenthümlicher Beschaffenheit geführt wird, wie ich hier zeigen werde.

Wir nehmen also die Zahl der Theilpunkte unendlich gross, schliessen aber den Fall aus, wo irgend ein noch so kleiner Bogen durch dieselben in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist. Es sind also Theilbögen von endlicher Grösse angebbar. Irgend einer derselben oder mehrere gleiche Theilbögen sind einzeln grösser, als jeder der übrigen; wir nennen sie Theilbögen erster Grösse und setzen ihre Summe $= b_1$. Auf dem Reste der Kreislinie sind ebenfalls Theilbögen von endlicher Grösse angebbar. Den oder die grössten unter denselben nennen wir Theilbögen zweiter Grösse oder zweiter Ordnung und setzen ihre Summe $= b_2$, u. s. f. Die Zahl der Ordnungen ist unendlich gross; denn wenn sie eine endliche wäre, so würde offenbar auch die Zahl der Theilpunkte eine endliche sein. Die Summe $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ *in inf.* kann nun entweder der ganzen Kreislinie gleich, also $= 2\pi$, oder auch kleiner als $2\pi$ sein. Dies ist der wesentliche Unterschied, welcher, wenn die Theilpunkte Unstetigkeitspunkte sind, bei der Anwendung auf die Fourier'sche Reihe zu beachten ist. In ersterem Falle hat jedes Glied der Reihe sowohl bei endlicher, als unendlicher Zahl der Häufungsordnungen einen bestimmten Werth und die Reihe ist, falls nicht noch andere Besonderheiten (unendlich viele Maxima und Minima, Punkte ohne Differentialquotient u. s. w.) vorkommen, stets convergent. In letzterem Falle kann die Reihe einen unbestimmten Werth haben in der Weise, dass jedes Glied unbestimmt ist, oder sie kann divergent sein. Zur Bestimmtheit und Convergenz sind noch besondere Bedingungen erforderlich. In einer später zu veröffentlichenden Arbeit über die Fourier'sche Reihe werde ich hierauf näher eingehen. Es soll hier blos noch durch ein Beispiel gezeigt werden, dass der zweite Fall wirklich vorkommen kann.

Die Kreislinie werde in vier abwechselnd gleiche Bögen zerlegt und zwei einander gegenüberliegende als Theilbögen erster Ordnung betrachtet. Von den beiden übrigen (Zwischenbögen erster Ordnung) werde jeder in fünf abwechselnd gleiche Theile zerlegt und die beiden dem mittleren benachbarten als Theilbögen zweiter Ordnung betrachtet. Deren Anzahl ist also $= 4$. Die übrigen sechs Bögen (Zwischenbögen zweiter Ordnung) werden jeder in fünf abwechselnd gleiche Theile zerlegt und die dem mittleren benachbarten als Theilbögen dritter Ordnung betrachtet, deren Anzahl also $= 12$ ist. So fährt man fort, indem man immer jeden der $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen in fünf abwechselnd gleiche Theile zerlegt und die beiden dem mittleren benachbarten Theilbögen $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung sein lässt. Die Zwischenbögen werden hierbei einzeln beliebig nahe $= 0$; ihre Summe dagegen kann zwar ebenfalls $= 0$ werden, aber sie kann auch gegen eine Grenze $> 0$ convergiren. Nimmt man z. B. die Theilbögen immer so gross, dass die Summe derjenigen erster Ordnung $= \frac{\pi}{2}$, zweiter Ord-

nung $=\frac{\pi}{4}$, ..., $n^{\text{ter}}$ Ordnung $=\frac{\pi}{2^n}$ wird, so ist die Gesammtsumme derselben $=\pi$. Sie machen also zusammen nur die halbe Kreislinie aus und die $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen bleiben bei noch so grossem $n$ zusammen grösser als $\pi$.

Um nun auch eine Function anzugeben, welche in obigen Theilpunkten unstetig ist, so möge dieselbe auf den Theilbögen erster Ordnung constant $=\frac{1}{2}$, auf denjenigen $n^{\text{ter}}$ Ordnung constant $=\frac{1}{2^n}$ genommen werden. Die Function ist hierdurch auf Bögen definirt, welche zusammen die halbe Kreislinie ausmachen. Die andere Hälfte besteht jedoch nur aus Punkten, da in keinem noch so kleinen Bogen die Function gar nicht definirt ist. An den Endpunkten eines Theilbogens, wo die Function springt, ist nur ein Werth derselben definirt. Den andern aber kann man als mit definirt betrachten, da nach der von dem Theilbogen abgewandten Seite hin in der Nachbarschaft die definirten Werthe beliebig nahe $=0$ sind, der fragliche Werth in dem Theilbogenendpunkte also ebenfalls $=0$ zu nehmen ist. Gar nicht definirt ist die Function in dem Halbirungspunkte irgend eines Zwischenbogens. Ein solcher Punkt lässt sich aber in einen so kleinen Bogen einschliessen, dass in demselben die definirten Functionswerthe beliebig nahe $=0$ sind; also hat in einem solchen Punkte die Function nur den einen Werth $=0$.

Die Function ist integrirbar nach dem von Riemann in seiner Abhandlung über die Fourier'sche Reihe gegebenen Kriterium.

Vorstehendes gilt im Wesentlichen auch für nichtperiodische Functionen einer Veränderlichen und lässt sich dann auf Functionen von zwei Veränderlichen anwenden. Hierdurch verlieren mehrere Sätze der Functionentheorie ihre allgemeine Giltigkeit, u. a. der von Riemann in seiner Inauguraldissertation unter 10. gegebene Satz (Riemann's Werke, herausgegeben von Weber, Leipzig 1876, S. 20). Es wird bei der gewöhnlichen Fassung dieses Satzes ausser Acht gelassen, dass es ausser Reihen von isolirten Punkten und zusammenhängenden Punktreihen noch Reihen von Punkten giebt, welche an keiner Stelle zusammenhängend und doch auch an keiner Stelle isolirt sind. Man schneide aus einem Quadrat eine Kreuzfläche, so dass vier gleiche Quadrate übrig bleiben, schneide aus jedem der letzteren auf gleiche Weise eine Kreuzfläche u. s. f. Die Seiten der Quadrate mögen nach der Formel abnehmen $s_m = e^{-(\frac{1}{2})^m} . s_{m-1}$. Die Zahl der Quadrate wird $=\infty$, ihre Summe $= 4^m a^{2m} . e^{-2} s_0^2$ $(m = \infty)$. Je nachdem $a \leqq \frac{1}{2}$, wird also die Summe der Quadrate $=0$ oder nicht und die zusammenhängende, aus sämmtlichen Kreuzen bestehende Fläche gleich dem ursprünglichen Rechteck oder kleiner. Der Rest besteht aber in jedem Falle nur aus Punkten. Man kann nun eine Ortsfunction $u$ angeben, welche, als Ordinate einer Fläche betrachtet, über den Kreuzen

eine zusammenhängende, stetig gebogene Fläche darstellt und in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügt, während in allen Kreuzpunkten die Fläche Spitzen hat, deren Höhe etwa in der Mitte am grössten ist und nach dem Rande zu abnimmt.

April 1881. W. VELTMANN.

---

## X. Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung.

Die Entwickelung des Integrals

$$t(u)=\int_0^u \xi\, du,$$

$$du=\tfrac{1}{2}\, d\xi : \sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)},\quad \xi = sa\, u,$$

nach Potenzen von $\xi$ gehört unter die Methoden zur Auswerthung der Integrale zweiter Gattung. Man gelangt zu derselben unter Benützung der Formel

$$(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-\varkappa\xi)^{-\frac{1}{2}}=\sum \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2m-1}{2m}\, F(-m,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-m,\varkappa)\,\xi^m,$$
$$m=0,1,2,\ldots,\infty,$$

ohne Weiteres aus dem Integral durch die Gleichung

$$t(u)=\tfrac{1}{2}\int_0^\xi \sqrt{\xi}\,(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-\varkappa\xi)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi$$
$$=\sum \frac{\xi^{m+\frac{3}{2}}}{2m+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2m-1}{2m}\, F(-m,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-m,\varkappa).$$

Vielleicht noch unbekannt ist aber eine Entwickelung der Integrale zweiter Gattung in das Product einer Reihe in den Factor

$$\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}=sa\,u.ca\,u.da\,u,$$

eine Entwickelung von der Form

$$A\,t(u)+B\,u=\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}.(a_1+a_2\xi+a_3\xi^2+\ldots+a_{n+1}\xi^n+\ldots).$$

Um zu den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ zu gelangen, differenziren wir (vergl. Crelle's Journal, Bd. 81 S. 83) nach $u$ und erhalten ($m=0$, $1, 2, \ldots\infty$)

$$\Sigma a_{m+1}(1-(1+\varkappa)\xi+\varkappa\xi^2)(2m+1)\xi^m-a_{m+1}(1+\varkappa-2\varkappa\xi)\xi^{m+1}=A\xi+B.$$

Setzt man hierin zuerst die Coefficienten von $\xi^0$ und $\xi^1$ gleich Null, so folgt

$$a_1=B,\quad 3a_2-2(1+\varkappa)a_1=A.$$

Setzt man sodann, $n>0$, den Coefficienten von $\xi^{n+1}$ gleich Null, so ergiebt sich für $a_n$ die Recursionsformel

$$(2n+1)\varkappa a_n - (2n+2)(1+\varkappa)a_{n+1} + (2n+3)\, a_{n+2} = 0,$$

welche durch die Gleichung

$$a_n = PM_n + QN_n$$

völlig integrirt wird, wenn

$$M_n = \frac{\sqrt{\pi}\, fac\tfrac{1}{2}(2n-1)}{2\, fac\, n} F(\tfrac{1}{2}(2n+1), \tfrac{1}{2}, n+1, \varkappa),$$

$$N_n = \tfrac{1}{2}\pi\varkappa^{-n} F(-\tfrac{1}{2}(2n-1), \tfrac{1}{2}, 1, \varkappa'), \quad \varkappa' = 1-\varkappa$$

ist, und $P$ und $Q$ Constante oder, was für uns hier wegen der Ganzzahligkeit von $n$ dasselbe ist, in $n$ periodische Functionen sind.

Aus den Gleichungen

$$B = PM_1 + QN_1, \quad A + 2(1+\varkappa)B = 3PM_2 + 3QN_2,$$

und aus der Gleichung

$$M_1 N_2 - M_2 N_1 = \pi : 6\varkappa\varkappa$$

ergeben sich für $P$ und $Q$ die Werthe

$$P = \frac{6\varkappa\varkappa}{\pi}\left(BN_2 - \frac{A+2(1+k)BN_1}{3}\right),$$

$$Q = \frac{6\varkappa\varkappa}{\pi}\left(\frac{A+2(1+n)B}{3} M_1 - BM_2\right).$$

Bequemer ist es, statt dieser allgemeinen Reihe zwei particuläre Reihen $R(u)$ und $S(u)$ einzuführen, in deren einer $Q=0$ ist, während in der andern $P=0$ ist, und die allgemeine Reihe in der Form $CR(u) + DS(u)$, in der $C, D$ willkürliche Constante sind, wieder zu gewinnen.

$Q$ wird gleich Null, und zugleich $P=1$ für $B = M_1$, $A + 2(1+\varkappa)B = 3M_2$ oder $A = 3M_2 - 2(1+\varkappa)M_1 = -\varkappa M_0$. Hierdurch gewinnt man die Reihe

$$R(u) = M_1 u - \varkappa M_0\, t(u) = sa\,u\; ca\,u\; da\,u\; \Sigma M_m\, sa^{2m} u, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

$P$ wird Null und zugleich $Q=1$ für $B = N_1$, $A = -kN_0$, und es ergiebt sich bei diesen Annahmen die Reihe

$$S(u) = N_1 u - \varkappa N_0\, t(u) = sa\,u\; ca\,u\; da\,u\; \Sigma N_m\, sa^{2m} u, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

Will man die Constanten $M_0$, $M_1$, $N_0$, $N_1$ lieber durch die Grössen

$$K = \int_0^1 \frac{du}{d\xi} d\xi, \quad K' = \int_0^1 \frac{du'}{d\xi} d\xi, \quad du' = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\varkappa\xi)(1-\varkappa'\xi)}},$$

$$E = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\varkappa\xi}{\xi(1-\xi)}}\, d\xi, \quad E' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\varkappa'\xi}{\xi(1-\xi)}}\, d\xi$$

ausdrücken, so braucht man nur zu beachten, dass

$$M_0 = K, \quad N_0 = K', \quad E = M_0 - kM_1, \quad E' = N_1$$

ist.

Jena, 1881. J. Thomae.

## XI. Ueber specielle elliptische Functionen.

Die Umkehrung elliptischer Integrale erster Gattung wird in der Regel durch Quotienten von Thetafunctionen bewirkt, deren Argumente um Systeme halber Periodicitätsmoduln von einander verschieden sind. Für das System halber Periodicitätsmoduln könnten auch Systeme anderer rationaler Theile der Perioden eintreten, doch wird im Allgemeinen schon für Drittelsysteme die Darstellung der Thetaquotienten durch die obere Grenze des Integrales erster Gattung, wofür ich Formeln in den Leipziger Annalen Bd. VI gegeben habe, complicirt. Für den speciellen Fall jedoch, in welchem das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)^2(z-k_2)^2(z-k_3)^2}}$$

umzukehren ist, werden die Formeln einfach und elegant. Man stösst auf diese Functionen bei der Untersuchung des logarithmischen Potentials einer gleichseitig-dreieckigen Platte. Aber auch sonst scheint mir die besprochene Darstellung nicht ohne Interesse, weshalb hier die wichtigsten Formeln und Sätze gegeben werden sollen.

§ 1. Eine Riemann'sche Fläche $T$ sei wie $s=\sqrt[3]{N(z)}$ verzweigt, wenn $N(z)=(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)$ ist. Sie besteht aus drei Blättern, welche längs der beiden zusammenstossenden Durchsetzungslinien $\overline{k_1k_2}$ und $\overline{k_2k_3}$ zusammenhängen. Die Ufer dieser Linie, welche für die Richtungen von $k_1$ nach $k_2$, bez. von $k_2$ nach $k_3$ auf der Linken liegen, sollen die positiven genannt werden. Im obersten (ersten) Blatte werde $\bar{s}$ für $s$ geschrieben, und man gelange durch einen positiven Umgang um $k_1$ ins zweite (mittlere), durch einen weiteren Umgang ins dritte Blatt. Zur Abkürzung werde

$$\frac{\partial N(z)}{\partial z}=N'(z),\quad \Delta=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2),$$

$$\tau=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

gemacht. Ferner sei

$$w=w(s,z)=\int\frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3ss}\quad\text{und}\quad \varrho=\int_{k_1}^{k_2}\frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3\bar{s}\bar{s}},$$

wo das Integral über das positive Ufer von $\overline{k_1k_2}$ zu erstrecken ist. Dann ist das Integral über das untere Ufer $\tau\varrho$ und die Differenz

$$\omega=(1-\tau)\varrho.$$

Erstreckt man das Integral $\int dw$ über eine Schlinge, welche $(k_1k_2k_3)$ einfach umkreist, so folgt aus dem Cauchy'schen Satze (wenn das folgende Integral über das positive Ufer von $\overline{k_2k_3}$ erstreckt wird)

$$\int_{k_2}^{k_3} \frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3\bar{s}\bar{s}} = \tau\varrho.$$

Derselbe Satz giebt

$$\int_{k_3}^{k_1} \frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3\bar{s}\bar{s}} = -\int_{k_1}^{k_2} \frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3\bar{s}\bar{s}} - \int_{k_2}^{k_3} \frac{\sqrt[3]{\Delta}\,dz}{3\bar{s}\bar{s}} = -(1+\tau)\varrho = \tau\tau\varrho.$$

Schreiben wir noch

$$\omega' = (1-\tau\tau)\varrho,$$

woraus $\omega' : \omega = -\tau\tau$ folgt, so ist $w$, wenn der Anfangswerth des Integrals gegeben ist, in der Form enthalten

$$w + m\omega + m'\omega',$$

wo $m$, $m'$ beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind, die davon abhängen, wie oft der Integrationsweg die Punkte $k_1 k_2 k_3$ umkreist hat. Man erweist leicht die zwischen den Periodicitätsmoduln $\omega$, $\omega'$ und $\varrho$ bestehenden Beziehungen

$$\tau\tau\omega = -\omega', \quad \tau\omega' = -\omega, \quad \tau\omega = \omega' - \omega, \quad \tau\tau\omega' = \omega - \omega',$$
$$\varrho = \tfrac{1}{3}(\omega+\omega'), \quad \varrho\tau = -\omega + \tfrac{1}{3}(\omega+\omega'), \quad \varrho\tau\tau = -\omega' + \tfrac{1}{3}(\omega+\omega').$$

Den Anfangswerth von $w$ bestimmen wir so, dass $w$ im Punkte $k_3$ Null ist. Dann hat $w$

| | | | |
|---|---|---|---|
| in den Punkten | $k_1$, | $k_2$, | $k_3$ |
| bez. die Werthe | $\frac{1}{3}\omega - \frac{2}{3}\omega'$, | $\frac{2}{3}\omega - \frac{1}{3}\omega'$, | $0$. |

Der Kürze halber werden wir den Werth von $w$ im Punkte $k_1$ mit $w_1$, im Punkte $k_2$ mit $w_2$ bezeichnen. Dann ist

$$w_1 + w_2 = \omega - \omega', \quad w_2 - w_1 = \tfrac{1}{3}(\omega+\omega') = w_1 + \omega', \quad 2w_2 - w_1 = \omega.$$

§ 2. Da hier zur Umkehrung Quotienten von Thetafunctionen verwendet werden sollen, deren Argumente um Systeme von Drittelperioden sich unterscheiden, so werden wir in $T$ dreiwerthige Functionen darzustellen haben, deren Cuben einwerthig sind und in einem Punkte unendlich gross, in einem unendlich klein dritter Ordnung werden. Solche Functionen bieten sich von selbst dar als die Quotienten der Ausdrücke

$$z - k_1, \quad z - k_2, \quad z - k_3$$

und diese Quotienten werden hier dargestellt werden. Es giebt ausser $z-k_1$, $z-k_2$, $z-k_3$ noch andere Functionen, welche nur im Unendlichen unendlich gross werden und nur in einem Punkte in der dritten Ordnung verschwinden. Sie sind in der Form enthalten

$$3ss_1s_1 - 3N(z_1) - (z-z_1)N'(z_1),$$

worin $z_1$ eine Wurzel der Gleichung ist

$$3N(z_1)N''(z_1) - 2N'(z_1)N'(z) = 0,$$

die zwei Werthe von $z_1$ liefert, welche mit je drei Werthen $s_1$ zusammen sechs Functionen liefern. Für den Fall, dass $N(z) = 1 - zz$ ist, sind die sechs Functionen in der Form enthalten

$$3s\sqrt[4]{2} + iz\sqrt{3} - 3,$$

in der die Wurzeln beliebig genommen werden können. Man gelangt zu der Gleichung für $z_1$ durch die Bemerkung, dass die gesuchte Function und ihre erste und zweite Derivirte für $z = z_1$ verschwinden muss.

§ 3. Die Thetafunctionen, die zur Umkehrung dienen, haben den Modul $\omega' i\pi : \omega = -\tau\tau i\pi$. Es werde

$$e^{-\tau\tau i\pi} = q' = iq, \quad q = e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} = 0{,}0659812$$

gesetzt und die Bezeichnung gewählt

$$\Theta(w) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} q'^{mm} \cos\frac{2m\pi w}{\omega} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} q'^{mm} e^{\frac{2m\pi i w}{\omega}},$$

$$H(w) = 2\sqrt[4]{q'}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} (-1)^m q'^{m(m+1)} \sin\frac{(2m+1)\pi w}{\omega}$$

$$= 2\sqrt[8]{i}\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}m(m+3)} q^{m(m+1)} \sin\frac{(2m+1)\pi w}{\omega},$$

$$H_1(w) = H(w - w_1) e^{\frac{4\pi i}{3\omega}(w - w_2)},$$

$$H_2(w) = H(w - w_2) e^{\frac{2i\pi}{3\omega}(w - w_1) + \frac{i\pi w_2}{\omega}}.$$

Es erhellen dann von selbst die Beziehungen

$$H_1(\tfrac{1}{2}(w_1 + w_2)) = H_2(\tfrac{1}{2}(w_1 + w_2)), \quad H(w_1) = -H(\tfrac{1}{3}(\omega + \omega')) e^{\frac{i\pi w_2}{\omega}},$$

$$H_1(-w) = -H_2(w) e^{-\frac{2}{3}\frac{i\pi}{\omega}(2w_2 - w_1)} = -\tau\tau H_2(w), \quad H_2(-w) = -\tau H_1(w),$$

$$H_1(0) = -\tau\tau H_2(0), \quad H_1(w_2) = H(\tfrac{1}{3}(\omega + \omega')) = -H_2(w_1) e^{-\frac{i\pi w_2}{\omega}}.$$

Die Quotienten

$$\eta_1(\omega) = H_1(w) : H(w), \quad \eta_2(w) = H_2(w) : H(w)$$

haben die Eigenschaften

$$\eta_1(w + \omega) = \tau\tau\,\eta_1(w), \qquad \eta_1(w + \omega') = \tau\tau\,\eta_1(w),$$
$$\eta_2(w + \omega) = \tau\,\eta_2(w), \qquad \eta_2(w + \omega') = \tau\,\eta_2(w),$$
$$\eta_1(-w) = \tau\tau\,\eta_2(w), \qquad \eta_2(-w) = \tau\,\eta_1(w),$$
$$\eta_1(w_2) = 1, \quad \eta_2(w_1) = 1, \quad \eta_1\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = \eta_2\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right),$$
$$\eta_1(w_1) = \eta_2(w_2) = 0, \qquad \eta_1(0) = \eta_2(0) = \infty.$$

Da die dritten Potenzen dieser Functionen in $T$ einwerthig sind und wie $1 : (z - k_3)$ im Punkte $k_3$ unendlich gross, wie $z - k_1$, bez. $z - k_2$ in $k_1$, $k_2$ unendlich klein werden, so folgt sogleich

$$\eta_1(w)=\sqrt[3]{\frac{k_2-k_3}{k_2-k_1}\,\frac{z-k_1}{z-k_3}},\quad \eta_2(w)=\sqrt[3]{\frac{k_1-k_3}{k_1-k_2}\,\frac{z-k_2}{z-k_3}}.$$

Die Dreideutigkeit der Wurzeln wird dadurch beseitigt, dass eben im obern Blatte von $T$ $\eta_1(w_2)=1$, $\eta_2(w_1)=1$ ist. Eine unmittelbare Folge dieser Darstellungen ist die Gleichung

$$\eta_1^3(w)+\eta_2^3(w)=1.$$

Lässt man in den Ausdrücken $\eta_1(w).w$, $\eta_2(w).w$ die Grösse $w$ der Grenze Null zueilen, so folgt $\left(H'(w)=\frac{\partial H}{\partial w}\right)$

$$\frac{H_1(0)}{H'(0)}=-\tau\tau,\quad \frac{H_2(0)}{H'(0)}=\tau,\quad \frac{\eta_2(0)}{\eta_1(0)}=-\tau\tau.$$

Da für $w=\frac{1}{2}(w_1+w_2)$ $\eta_1$ und $\eta_2$ einander gleich sein müssen, so findet man den zugehörigen Werth von $z$ durch die Gleichung

$$(k_2-k_3)(z-k_1)+(k_1-k_3)(z-k_2)=0,$$

was

$$z=\frac{2k_1k_2-k_3(k_1+k_2)}{k_1+k_2-2k_3}$$

ergiebt. Setzt man dies in den Ausdruck für $\eta_1$ ein, so folgt

$$\eta_1\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)=\eta_2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}.$$

(Ist $k_3=\infty$, $k_1=-1$, $k_2=1$, so ist $z=0$ für $w=\frac{1}{2}(w_1+w_2)$.)

§ 4. Das Additionstheorem. Das Product $\eta_1(w)\,\eta_2(w)$ hat die Perioden $\omega$ und $\omega'$, ist also in $T$ einwerthig, und wird algebraisch durch

$$\sqrt[3]{\frac{N'(k_3)}{(k_2-k_1)^2}}\cdot\frac{s}{k_3-z}$$

dargestellt. Es ist eine gerade Function, d. h. es besteht die Gleichung

$$\eta_1(-w)\,\eta_2(-w)=\eta_1(w)\,\eta_2(w).$$

Die einwerthige Function $\eta_1(w)\,\eta_2(w)-\eta_1(w')\,\eta_2(w')$ verschwindet daher nicht blos für $w=w'$, sondern auch für $w=-w'$. Ist $z=z'$ für $w=w'$, so wird beiläufig der zu $w=-w'$ gehörende Werth von $z$ durch die Gleichung gefunden

$$zz'(2k_3-k_1-k_2)+(z+z')(k_3k_3-k_1k_2)+2k_1k_2k_3-k_3k_3(k_1+k_2)=0.$$

(Wenn $k_3=\infty$, $k_1=1$, $k_2=-1$ ist, so ist $z=-z'$.) Da nun $\eta_2^2(w)$ dieselbe Periodicität hat, wie $\eta_1(w)$, und $\eta_1^2(w)$ dieselbe, als $\eta_2(w)$, so folgt

$$\eta_1(w+w')=\tau.\frac{\eta_1(w)\,\eta_2^2(w')-\eta_1(w')\,\eta_2^2(w)}{\eta_1(w)\,\eta_2(w)-\eta_1(w')\,\eta_2(w')},$$

$$\eta_2(w+w')=\tau\tau.\frac{\eta_2(w)\,\eta_1^2(w')-\eta_2(w')\,\eta_1^2(w)}{\eta_1(w)\,\eta_2(w)-\eta_1(w')\,\eta_2(w')}.$$

Denn in diesen Gleichungen haben beide Seiten dieselbe Periodicität in Bezug auf $w$ sowohl, als auch in Bezug auf $w'$, werden in denselben

Punkten unendlich gross erster Ordnung, nämlich für $w = -w'$. Sie können sich demnach nur durch einen constanten Factor unterscheiden, welcher für $w' = 0$ leicht verificirt wird. Hieraus folgen sogleich die beiden Gleichungen

$$\eta_1(w-w') = \tau\tau . \frac{\eta_1(w)\,\eta_1^2(w') - \eta_2(w')\,\eta_2^2(w)}{\eta_1(w)\,\eta_2(w) - \eta_1(w')\,\eta_2(w')},$$

$$\eta_2(w-w') = \tau . \frac{\eta_2(w)\,\eta_2^2(w') - \eta_1(w')\,\eta_1^2(w)}{\eta_1(w)\,\eta_2(w) - \eta_1(w')\,\eta_2(w')}.$$

Will man im Additionstheorem $w' = w$ machen, so erhält man Formeln von der Form $0:0$. Um die gewöhnlichen Rechnungsregeln auf sie anwenden zu können, thut man wohl, $\eta_2$ durch $\sqrt[3]{1-\eta_1^3}$ zu ersetzen. Auf diese Weise erhält man die Beziehung

$$\eta_1(2w) = \tau\,\eta_2(w)\,\frac{\eta_1^3(w)}{\eta_2^3(w) - \eta_1^3(w)}.$$

Um die Differentialgleichungen der Functionen $\eta_1$ und $\eta_2$ zu erhalten, haben wir nur nöthig, $w'$ durch $dw$ im Additionstheoreme zu ersetzen. Vorher muss aber gezeigt werden, dass $H'_1(dw)$, $H'_2(dw)$ unendlich klein sind. Es ist $H_1(w).H_2(w)$ eine gerade Function, und also für $w = 0$

$$\frac{\partial\, lg\, H_1(0)}{\partial w} + \frac{\partial\, lg\, H_2(0)}{\partial w} = \frac{H'_1(0)}{H_1(0)} + \frac{H'_2(0)}{H_2(0)} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial\, lg}{\partial w}(H_1(w):H_2(w)) = \frac{\partial\, lg}{\partial w}(\eta_1(w):\eta_2(w)) = \frac{ss}{3(z-k_1)} - \frac{ss}{3(z-k_2)},$$

und für $z = k_3$, $w = 0$

$$\frac{H'_1(0)}{H_1(0)} - \frac{H'_2(0)}{H_2(0)} = 0,$$

woraus folgt

$$H'_1(0) = 0, \quad H'_2(0) = 0,$$

w. z. b. w. Von diesen Werthen in dem Ausdrucke

$$\eta_1(w+dw) = \tau\frac{H(w)\,H_1(w)\,H_2^2(dw) - H(dw)\,H_1(dw)\,H_2^2(w)}{H_1(w)\,H_2(w)\,H^2(dw) - H_1(dw)\,H_2(dw)\,H^2(w)}$$

Gebrauch machend, gelangen wir zu den Formeln

$$\frac{d\eta_1(w)}{dw} = \tau\frac{H'(0)}{H_2(0)}\eta_2^2(w) = \eta_2^2(w), \qquad \frac{d\eta_1(w)}{dw} = \sqrt[3]{(1-\eta_1^3(w))^2}.$$

§ 5. **Integrale zweiter Gattung.** Die Integrale zweiter Gattung können sämmtlich auf ein besonderes unter ihnen zurückgeführt werden. Wir wählen hierzu das Integral

$$\int\frac{N'(k_3)\,dz}{3\sqrt[3]{\Delta}\,(z-k_3)\,s},$$

und setzen das über das positive Ufer der Durchsetzungslinie genommene Integral

$$\int_{k_1}^{k_2} \frac{N'(k_3)\, dz}{3\sqrt[3]{\Delta}\,(z-k_3)\,\bar{s}} = e.$$

Das Integral über das untere Ufer ist dann $\tau\tau e$. Ferner sei

$$t_3(s, z) = -\left(\int \frac{N'(k_3)\, dz}{3\sqrt[3]{\Delta}\,(z-k_3)\, s} + \frac{\tau\tau e}{\varrho}\, w\right).$$

Ein Integral zweiter Gattung, welches im Punkte $\sigma, \zeta$ wie $1:(\zeta-z)$ unendlich gross wird, lässt sich mit Hilfe von $t_3$ auf die Form bringen

$$t(\sigma, \zeta;\; s, z)$$
$$= \frac{1}{\zeta - z}\; \frac{s^2(\zeta-k_3)^2 + s\sigma(z-k_3)(z-k_3) + \sigma^2(z-k_3)^2}{3\sigma\sigma(z-k_3)(\zeta-k_3)} - \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{3\sigma\sigma}\, t_3(s, z).$$

Um nachzuweisen, dass diese Function für $z = k_3$ nicht unendlich gross wird, multipliciren wir sie mit $\sqrt[3]{z-k_3}$ und gehen zur Grenze $z = k_3$ über. Der algebraische Theil erhält dann den Werth $\sqrt[3]{N'(k_3)\, N'(k_3)} : 3\sigma\sigma$, während

$$\lim \sqrt[3]{\Delta\,(z-k_3)}\; t_3(s, z) = N'(k_3) \lim (z-k_3)^{1/3} : s(z-k_3) = \tfrac{1}{3} \sqrt[3]{N'(k_3)\, N'(k_3)}$$

ist, woraus sich $\lim \sqrt[3]{z-k_3}\; t(\sigma, \zeta;\; s, z) = 0$ ergiebt.

Multiplicirt man den algebraischen Theil mit $\sigma\sigma$ und lässt dem Punkte $\sigma, \zeta$ den Werth $w = v$ entsprechen, so lässt sich das Product leicht durch $\eta_1$ und $\eta_2$ ausdrücken, und zwar ist

$$\frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{s^2(\zeta-k_3)^2 + s\sigma(z-k_3)(\zeta-k_3) + \sigma^2(z-k_3)^2}{(z-k_3)(\zeta-k_3)}$$
$$= \sqrt[3]{\Delta} \cdot \frac{\eta_1^2(w)\, \eta_2^2(w) + \eta_1(w)\, \eta_2(w)\, \eta_1(v)\, \eta_2(v) + \eta_1^2(v)\, \eta_2^2(v)}{\eta_1^3(v) - \eta_1^3(w)}.$$

Denn beide Seiten sind in $T$ einwerthig, werden im Punkte $\sigma, \zeta$ $(w = v)$ unendlich gross erster Ordnung und wechseln ihr Zeichen, wenn $\zeta$ mit $z$ ($w$ mit $v$) vertauscht wird. Deshalb können sie sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Multipliciren wir mit $\zeta - z$ und setzen dann $z = \zeta$, so erhalten wir links den Grenzwerth $3\sigma\sigma$, rechts erhalten wir

$$\lim 3\eta_1^2(v)\, \eta_2^2(v) \frac{z - \zeta}{\dfrac{z-k_1}{z-k_3} - \dfrac{\zeta-k_1}{\zeta-k_3}}\; \frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} = 3\sigma\sigma,$$

also denselben Werth, wodurch die Richtigkeit des constanten Factors erwiesen ist.

Der Ausdruck $t(\sigma, \zeta;\; s, z)$ lässt sich durch Thetafunctionen und deren Differentialquotienten ausdrücken. Da nämlich $\dfrac{\partial\, lg\, H(v-w)}{\partial \zeta}$ für $w = v$, $z = \zeta$ wie $1:(\zeta - z)$ unendlich gross wird und die Periode $\omega$ hat, also ungeändert bleibt, wenn $w$ um $\omega = (1-\tau)\varrho$ wächst, welche Eigenschaft ebenso der Function $t_3(s, z)$ zukommt, so muss

$$\frac{\partial\, lg\, H(v-w)}{\partial \zeta} = t(\sigma, \zeta : s, z) + D'$$

sein, wo $D'$ von $z$ unabhängig ist und nur noch von $\zeta$ abhängt. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\partial\zeta : \partial\sigma = 3\sigma\sigma : \sqrt[3]{\varDelta}$ und schreiben $D$ für $D'\sqrt[3]{\varDelta} : 3\sigma\sigma$, so folgt

$$\frac{H'(v-w)}{H(v-w)}_{(v=0)} = -\frac{H'(w)}{H(w)} = -t_3(s,z) + D.$$

Da $H'_1(0) = 0$ ist, so ist für $w = 0$

$$\frac{\partial\, lg\left(H(w-w_1)\right) e^{\frac{4}{3}\frac{i\pi w}{\omega}}}{\partial w}_{(w=0)} = 0, \quad \frac{H'(-w_1)}{H(w)} = -\frac{4\pi i}{3\omega}.$$

Nehmen wir die noch willkürliche Integrationsconstante so an, dass $t_3(0, k_1) = \frac{4i\pi}{3\omega}$ ist, so wird $D = 0$ und wir haben

$$\frac{H'(w)}{H(w)} = t_3(s,z),$$

$$t_3(0,k_1) = \frac{4i\pi}{3\omega}, \quad t_3(0,k_2) = \frac{2i\pi}{3\omega}, \quad t_3(0,k_3) = \infty.$$

Es nimmt $t_3$ um $2i\pi : 3\omega$ ab, wenn $z$ von $k_1$ bis $k_2$ wächst, wie die Darstellung durch Thetafunctionen sofort zeigt. Die directe Darstellung liefert den Zuwachs $-(e + \tau\tau e) = \tau e = (\tau - \tau\tau)e : (1-\tau)$ und dies muss demnach gleich $-2i\pi : 3\omega = -2i\pi : 3(1-\tau)\varrho$ sein. Daraus erhält man eine Beziehung zwischen $e$ und $\varrho$

$$e = -\frac{2i\pi}{3(\tau-\tau\tau)\varrho} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,\varrho}.$$

Jetzt findet man leicht die Darstellung

$$\frac{H'(v-w)}{H(v-w)}$$

$$= \frac{\eta_1^2(w)\,\eta_2^2(w) + \eta_1(w)\,\eta_2(w)\,\eta_1(v)\,\eta_2(v) + \eta_1^2(v)\,\eta_2^2(v)}{\eta_1^3(v) - \eta_1^3(w)} - \frac{H'(w)}{H(w)} + \frac{H'(v)}{H(v)}.$$

Damit ist zugleich die additive Constante $D$ bestimmt. Schreiben wir noch, um das Additionstheorem zu erhalten, $-w$ für $w$, so haben wir

$$\frac{H'(v+w)}{H(v+w)} - \frac{H'(w)}{H(w)} - \frac{H'(v)}{H(v)}$$

$$= \frac{\eta_1^2(w)\,\eta_2^2(w) + \eta_1(w)\,\eta_2(w)\,\eta_1(v)\,\eta_2(v) + \eta_1^2(v)\,\eta_2^2(v)}{\eta_1^3(v) + \eta_1^3(w) - 1}.$$

§ 6. Bei Anwendungen wird man es im Allgemeinen vorziehen, die Function $s$ durch eine lineare Substitution dahin zu vereinfachen, dass die Verzweigungswerthe numerisch werden. Wir wollen sie auf $-1$, $+1$, $\infty$ werfen. Dies geschieht durch die Substitution

$$z' = \frac{z(2k_3 - k_1 - k_2) + 2k_1k_2 - k_3(k_1 + k_2)}{(k_1 - k_2)(z - k_3)},$$

$$z = \frac{z'k_3(k_1 - k_2) + 2k_1k_2 - k_3(k_1 + k_2)}{N}, \quad dz = \frac{2\Delta . dz'}{NN},$$

$$N = z'(k_1 - k_2) + k_1 + k_2 - 2k_3.$$

Es ist dann

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta}\, dz}{3ss} = \frac{\sqrt[3]{2}\, dz}{3\sqrt[3]{(1-z'^2)^2}},$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\int_0^1 (1-x)^{-2/3} x^{-1/3}\, dx = \sqrt{\pi}\sqrt[3]{2}\, fac(\tfrac{1}{3}) : fac(-\tfrac{1}{6}),$$

$$\eta_1(w) = \sqrt[3]{\frac{1+z}{2}}, \quad \eta_2(w) = \sqrt[3]{\frac{1-z}{2}},$$

$$t_3(s, z) = \int \frac{dz}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-z^2)}},$$

$$t(\sigma, \zeta;\, s, z) = \frac{s^2 + s\sigma + \sigma^2}{3\sigma\sigma(\zeta - z)} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sigma\sigma} t_3(s, z).$$

Nun soll noch die numerische Constante $H'(0)$ ermittelt werden. Hierzu setzen wir

$$\int_0^1 \frac{\tfrac{1}{2}\, dz}{\sqrt{z(1-z)(1+\tau\tau z)}} = K, \quad \int_1^{-\tau} \frac{\tfrac{1}{2}\, dz}{\sqrt{z(1-z)(1+\tau\tau z)}} = iK'.$$

Transformiren wir das zweite Integral successive durch die Substitutionen $z = -\tau z'$, $\tau z' + \tau\tau x = -1$, so erhalten wir für $iK'$ noch die beiden Formen

$$-i\tau\tau \int_1^{-\tau\tau} \frac{\tfrac{1}{2}\, dz'}{\sqrt{z'(1-z')(1+\tau z')}} = -\tau\tau \int_0^1 \frac{\tfrac{1}{2}\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1+\tau\tau x)}} = -\tau\tau K.$$

Es ist also $i\pi\, iK' : K = -\pi K' : K = -\tau\tau i\pi$. Hieraus fliesst als bekannte Formel die Gleichung

$$\vartheta'_{11}(0) = i\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\sqrt{\frac{2iK\tau\tau}{\pi}}\sqrt{\frac{2iK\tau}{\pi}} = -i\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

wenn

$$\vartheta_{11}(u) = i\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)u}$$

und $\vartheta'_{11}$ der nach $u$ genommene Differentialquotient ist.

Da die $H'$ und $\vartheta'_{11}$ durch die Gleichung zusammenhängen

$$\vartheta'_{11}(0) = -\frac{\varpi}{i\pi} H'(0),$$

so folgt

$$\omega\, H'(0) = -\,2K : \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

Durch die Substitution $x = (1-\xi):(1-\tau\tau)$ erhält man

$$K = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{x\,(1-x)(1-\tau\tau x)}} = \sqrt{1-\tau}\int_{\tau\tau}^1 \frac{\frac{1}{2}\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^3)}}$$

$$= \sqrt{1-\tau}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^3)}} - \int_0^{\tau\tau} \frac{\frac{1}{2}\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^3)}} = \sqrt{1-\tau}\,(1-\tau\tau)\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^3)}}$$

$$= \sqrt{3\,(1-\tau\tau)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^3)}} = \frac{\tau\tau\sqrt{3\pi}}{\sqrt{i}}\;\frac{fac\,\frac{1}{3}}{fac(-\frac{1}{6})}$$

und also

$$\omega\, H'(0) = \sqrt[4]{i}\,2\sqrt{3}\,\sqrt[4]{3\pi}\,\frac{fac(\frac{1}{3})}{fac(-\frac{1}{6})}\sqrt{\frac{fac(\frac{1}{3})}{fac(-\frac{1}{6})}}.$$

Jena, 1881. J. Thomae.

P.S. Zwischen Einsendung und Druck dieser Notiz sind in Jena die beiden Dissertationen erschienen:

F. Lefler, Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{N(x)\,N(x)}}$ und seine Umkehrung. — O. Zimmermann, Das logarithmische Potential einer gleichseitig dreieckigen Platte.

Diese Schriften stehen in nahen Beziehungen zur vorliegenden Notiz.

Thomae.

---

## XII. Ueber Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften.

(Hierzu Taf. II Fig. 12—14.)

Ist ein Kegelschnitt $K$, sowie ein beliebig gelegener Punkt $P$ gegeben, so giebt es zwei reelle und ausserhalb $K$ verlaufende Gerade $xy$ von folgender Eigenschaft:

„Ist durch $P$ und den Berührungspunkt $A$ einer beliebigen Tangente $g$ des Kegelschnittes ein Spiegel senkrecht auf die Ebene der Zeichnung aufgestellt, sind ferner $XY$ die Schnittpunkte jener beiden Geraden mit $g$, so wird ein von $X$ nach $P$ gelangender Lichtstrahl vom Spiegel nach $Y$ reflectirt." (Vergl. Fig. 12.)

Die Existenz dieser beiden Geraden wird durch Angabe folgender Construction dargethan, die uns dieselben immer reell liefert.

**Erster Fall: $P$ ist ausserhalb $K$ gelegen.** (Fig. 12.)

Man bestimme unter den Strahlenpaaren der zu $P$ in Bezug auf $K$ gehörigen Involution das rechtwinklige und schneide dasselbe mit der Polaren von $P$. Von den beiden so erhaltenen Punkten ist der im Innern gelegene als zur weiteren Construction nicht mehr verwendbar zu verwerfen, der ausserhalb gelegene sei mit $M$ bezeichnet.

Dieser Punkt $M$ ist der Schnittpunkt der beiden zu bestimmenden Geraden.

Man verbinde nun einen beliebigen Punkt $N$ der Ebene mit $P$ und schneide die Polare von $N$ mit der in $P$ auf $NP$ errichteten Senkrechten; man erhält so einen Punkt $N'$ — und es werde $MN$ mit $n$, $MN'$ mit $n'$ bezeichnet.

Jeder Punkt von $n$ liefert, auf dieselbe Weise verwendet, einen Punkt auf $n'$. Die Verbindungslinien $N'N$ umhüllen einen Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt $P$, dessen Directrix $d$ mit $MP$ die Strahlen $nn'$ harmonisch theilt — derselbe berührt $nn'$ in jenen Punkten, in welchen eine in $P$ auf $MP$ errichtete Senkrechte die Strahlen $nn'$ schneidet — er ist identisch mit jenem Kegelschnitte, dessen Tangentenabschnitte zwischen $nn'$ von $P$ aus unter rechtem Winkel erscheinen.

Jeder Punkt auf $n$ und sein conjugirter auf $n'$ bilden, mit $P$ verbunden, einen rechten Winkel: gelänge es also noch, die getrennten Geraden $nn'$ zu einer Lage $x$ vereinigt zu sehen, so wäre die oben gestellte Aufgabe gelöst.

Nun überzeugt man sich leicht, dass eine Bewegung von $n$ eine dazu projectivische Bewegung von $n$ hervorruft, bei welcher jede Lage $nn'$ sich doppelt entspricht.

Die Doppelelemente $xy$ der Involution $nn'$ lösen also die Aufgabe.

Bei der Ausführung der Construction ist nicht zu übersehen, dass $PM$ und die Polare $p$ von $P$ der Involution $nn'$ angehören. Man hat also nur ein einziges Paar Strahlen $nn'$ zu construiren, um für die Bestimmung von $xy$ genügendes Material an der Hand zu haben.

**Zweiter Fall: $P$ liegt innerhalb $K$.**

Hier liefert der Beginn obiger Construction zwei Punkte $M$ ausserhalb $K$. Von diesen beiden Punkten liefert der eine reelle, der andere imaginäre Doppelelemente der zugehörigen Involution. Welcher von beiden Punkten $M$ zu verwerfen, welcher zu verwenden, kann nicht *a priori* entschieden werden. --

Diese beiden Geraden $xy$ spielen in der Theorie der Kegelschnitte ganz dieselbe Rolle, wie die Brennpunkte. Der willkürlich gewählte Punkt $P$ vertritt dabei mit seiner rechtwinkligen Involution die Stelle der unendlich entfernten Geraden mit ihren Kreispunkten.

Jeder Satz über Brennpunkte lässt sofort eine Uebertragung in Bezug auf diese beiden Geraden zu.*

Erstes Beispiel. Die beiden gebräuchlichsten Definitionen der Brennpunkte, nämlich erstens die aus ihrer optischen Eigenschaft hervorgehende, dann die des Senkrechtstehens je zweier conjugirter Strahlen des zum Brennpunkte eines Kegelschnitts gehörigen Strahlenbüschels müssen eine doppelte Fassung unseres am Eingange aufgestellten Problems möglich machen. Und in der That, die beiden Geraden $xy$ lösen auch die folgende Aufgabe: Man bestimme eine Gerade so, dass immer zwei auf ihr gelegene, in Bezug auf $K$ conjugirte Punkte von $P$ aus unter rechtem Winkel erscheinen.

Zweites Beispiel. Es sei folgender Satz zur Uebertragung nach unserem Princip vorgegeben:

„Schneidet man zwei homofocale Kegelschnitte ($AP$ Brennpunkte) durch eine Gerade $g$, die durch einen der gemeinschaftlichen Brennpunkte $A$ gelegt ist, in vier Punkten ($ABCD$) und verschafft sich die Tangenten der Kegelschnitte in diesen Punkten ($abcd$), so giebt es immer einen Kegelschnitt $K_3$, der den andern Brennpunkt $P$ zum Brennpunkte hat und die vier Geraden $abcd$ berührt; die beliebig gewählte Gerade $g$ wird für ihn zur Directrix. Er berührt die Geraden in vier Punkten $A'B'C'D'$, welche so auf $abcd$ gelegen sind, dass immer $AA'$, $BB'$ u. s. w. von $P$ aus unter rechtem Winkel erscheinen. Der Kegelschnitt $K_3$ selbst erscheint von $A$ aus unter rechtem Winkel. Er ist, beiläufig bemerkt, eine Parabel, welche die gemeinschaftliche kleine (imaginäre) Axe der homofocalen Kegelschnitte berührt.“

Derselbe liefert (Fig. 13):

„Sind zwei sich nicht schneidende Kreise $K_1 K_2$, ihre ideale Sehne $p$ gegeben, so ziehe man an dieselben vier Tangenten $abcd$ von der gleichen Richtung $G$, die zugehörigen Berührungspunkte seien $ABCD$.

Es giebt dann eine Hyperbel $K_3$, die durch $ABCD$ geht und $p$ in denselben imaginären Punkten schneidet, wie $K_1$ und $K_2$.

Um die Tangenten in den Punkten $ABCD$ zu erhalten, verlängere man $abcd$ bis zum Durchschnitt mit $p$, ($A'B'C'D'$). Die Polaren von $A'B'C'D'$ sind die zu den Punkten $ABCD$ gehörigen Tangenten des Kegelschnittes $K_3$.

Des Weiteren ist $p$ Durchmesser von $K_3$, $G$ selbst ist die zu $p$ conjugirte Durchmesserrichtung. Die Schnittpunkte der Hyperbel mit der unendlich entfernten Geraden gehören der Involution der Kreispunkte an: sie ist gleichseitig. Diese Hyperbel, Mittelpunkt auf $p$, geht durch jene zwei Punkte, von welchen aus die Punktepaare der von den Kreisen auf $p$ bestimmten Involution unter rechtem Winkel erscheinen.“

* Vergl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, § 385.

Für die beiden Kreise $K_1 K_2$ vertreten nämlich — und zwar für beide Kreise gleichzeitig — die ideale Sehne, sowie die unendlich ferne Gerade die Stelle unserer betrachteten Geraden $xy$. Sei $P$ ein Punkt, von welchem aus die Punktepaare der Involution auf $p$ unter rechtem Winkel erscheinen, dann erscheinen auch die durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennten Punktepaare der unendlich entfernten Geraden von $P$ aus unter rechtem Winkel — wie es ja für jeden Punkt der Ebene der Fall ist.

Anhang. Die Geraden $xy$ der Fig. 12 trennen die Geraden $PM$, $p$ harmonisch (nach der Construction).

Dies giebt ein Mittel, um die Aufgabe ersten Grades einfach zu lösen: Gegeben ein Kreis, $P$, gesucht $y$ ($x$ ist bekannt als die unendlich ferne Gerade). Man führt $y$ parallel der Polaren $p$ in der Mitte zwischen $P$ und $p$. So erhält man folgenden, der elementaren Geometrie zuzuweisenden Satz (Fig. 14):

„Ist $g$ eine Tangente an $K$, so wirft ein durch $PA$ gelegter Spiegel den Lichtstrahl $YP$ parallel mit $g$ zurück."

München. FRITZ HOFMANN.

---

## XIII. Erklärung.

Von Herrn Dr. Schlömilch bin ich nachträglich darauf aufmerksam gemacht worden, dass Herr Prof. Schröter in Breslau in einem Aufsatze des Jahrg. XVII (S. 508) ebenso, wie ich in dem vorigen Jahrgang XXVI (S. 333) dieser Zeitschrift, von dem Gedanken ausgeht, einen integrirenden Factor aufzusuchen. Indem ich versichere, dass ich von der Schröter'schen Arbeit keine Kenntniss gehabt habe, erkenne ich gern die Priorität des Herrn Prof. Schröter an und überlasse es den Sachverständigen, zu entscheiden, welche Methode zur Auffindung dieses Factors die naturgemässere ist.

Hamm i. W. MUCH.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Recensionen.

**Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden, nicht bestrahlten Atmosphäre, sowie die Höhe der Atmosphäre.** Bearbeitet auf Grund der dynamischen Gastheorie von WILHELM SCHLEMÜLLER, k. k. Hauptmann des 36. Lin.-Inf.-Reg., ehem. Lehrer der Cadettenschule zu Prag. 8°. 19 S. Prag, R. Dominikus. 1880, und

**Vier physikalische Abhandlungen**, von Demselben. 8°. 32 S. Ibidem 1881.

Der Verfasser beschäftigt sich mit dem Einflusse der Schwerkraft auf die Energie der Luftmolecule, welcher bekanntlich nach der kinetischen Theorie der Gase die Temperatur proportional ist. Er meint in der Einleitung, man habe bisher nicht einmal mit Sicherheit angeben können, warum die Temperatur der Luft mit wachsender Höhe abnehme, noch weniger das Gesetz der Abnahme durch Rechnung begründen können. Ohne lange nach noch älteren Arbeiten zu suchen, sei, dem entgegen, verwiesen auf die (Berliner) „Fortschritte der Physik im Jahre 1862", S. 315. — Der Verfasser berechnet auf seine Art das Gesetz der Temperaturabnahme, ebenso die grösstmöglichste Höhe der Atmosphäre, dann die Beziehungen zwischen Höhe und Luftdruck und zwischen Druck und Temperatur. Er gelangt zu sehr einfachen Ergebnissen; die Formel für barometrische Höhenmessung wird, selbst unter Berücksichtigung der Veränderung der Schwere, noch bequem; am kürzesten aber schildert man die Einfachheit der Resultate durch das Citat: „Die Drucke in zwei verschieden hohen Punkten einer Atmosphäre verhalten sich wie die sechsten Potenzen der absoluten Temperaturen." Es soll die theoretisch berechnete Höhe der Atmosphäre beinahe vollkommen genau übereinstimmen mit der aus Dämmerungsbeobachtungen abgeleiteten, es wird namentlich betont, dass die Rechnung eine Temperaturabnahme von 1° C. in der freien Atmosphäre (unabhängig von der Temperatur der untersten Gasschichte und von der geographischen Breite) für je 175,611 m ergiebt, was nur in der vierten Ziffernstelle unbedeutend von dem Mittelwerthe aus den Beobachtungen abweiche. Kann nun überhaupt aus der Be-

obachtung eine Stütze für die vorgetragene Lehre gewonnen werden? Der Berichterstatter denkt nein. In dem ersten Aufsatze des zweiten oben angeführten Schriftchens, welcher Prioritätsansprüche erörtert, hebt der Verfasser selbst hervor, dass, wie schon der Titel seiner Abhandlung angebe, seine Rechnungen sich auf eine ruhende, unbestrahlte Atmosphäre bezögen. Nun sind aber Beobachtungen in einer solchen nie gemacht und nicht möglich; fügt man hinzu, dass die Messungen auch nicht in trockener, sondern in wasserdampfhaltiger Luft ausgeführt wurden, die Theorie des Herrn Schlemüller aber für feuchte Luft erheblich andere Werthe liefert, so kann von einer Bestätigung durch die Erfahrung wohl nicht die Rede sein.

Wie steht es nun mit der theoretischen Begründung? Der Verfasser kann sich nicht verhehlen, dass seine Lösung der gestellten Aufgaben — „sonst wohl unanfechtbar — auf der Annahme beruht, dass die Molecule bei einem bestimmten Wärmezustand des Gases nicht alle möglichen, sondern nur Eine bestimmte, höchstens innerhalb enger Grenzen variirende Geschwindigkeit besitzen". Diese Annahme ist aber durchaus unstatthaft. Denn es ist leicht einzusehen, auch öfters schon bewiesen worden, dass, wenn zufällig in einem Augenblicke alle Molecule gleiche Geschwindigkeit besässen, sofort die grössten Verschiedenheiten eintreten müssten infolge der zahlreichen schiefen Zusammenstösse der nach allen möglichen Richtungen bewegten Molecule. Eine eigentliche Widerlegung des unbequemen Maxwell'schen Gesetzes wird gar nicht versucht, sondern nur gesagt: „Sobald das Gas dauernd eine bestimmte Temperatur angenommen hat, stehen gleich schwere Molecule unter dem Einflusse gleicher anziehender und gleicher bewegender Kräfte; da muss doch, wenn irgend gleichen Ursachen gleiche Wirkungen entsprechen, der Wärmezustand eines Körpers dadurch charakterisirt sein, dass alle seine Molecule eine bestimmte (höchstens innerhalb enger Grenzen variirende) Geschwindigkeit besitzen, deren Wachsen als Erwärmung, deren Abnahme als Abkühlung bezeichnet wird." Dieser Irrthum begegnet auch anderswo, und deshalb mag es nicht ganz überflüssig sein, kurz einen Beweis für die beständigen Veränderungen der Geschwindigkeiten zu geben. Seien $v_1$ und $v_2$ die Geschwindigkeiten zweier kugelförmiger Molecule von gleicher Masse, $i_1$ und $i_2$ die Winkel, welche die Richtungen ihrer Bewegungen mit der Normalen zur gemeinschaftlichen Berührungsebene im Augenblicke des Stosses machen, so sind die tangentialen Componenten $v_1 . Sin\, i_1$ und $v_2 . Sin\, i_2$ und diese bleiben (da Reibung nicht anzunehmen ist) ungeändert; die radialen Componenten sind $v_1 . Cos\, i_1$ und $v_2 . Cos\, i_2$. Nimmt man nun, wie gewöhnlich geschieht und zulässig ist, die Gesetze des vollkommen elastischen Stosses für giltig an, so tauschen sich die radialen Componenten aus und die Geschwindigkeiten nach dem Stosse sind bestimmt durch:

$$V_1^2 = v_1^2 . Sin^2 i_1 + v_2^2 . Cos^2 i_2,$$
$$V_2^2 = v_1^2 . Cos^2 i_1 + v_2^2 . Sin^2 i_2,$$

woraus hervorgeht, dass selbst bei der Annahme $v_1 = v_2$ die Geschwindigkeiten nach dem Stosse nur dann gleich sind, wenn dieser ein gerader centraler war, d. h. wenn $i_1 = i_2 = 0$. Die Formel lässt sofort erkennen, was von vornherein zu erwarten war, dass die Gesammtenergie der zwei Molecule durch den Stoss nicht abgeändert wird. Näheres über den schiefen Centralstoss frei beweglicher Körper findet man u. a. in Bohn, Ergebnisse physikalischer Forschung, S. 80.

Den Einfluss der Schwerkraft auf die Molecularbewegungen der Gase zu verfolgen, ist eine interessante, bereits mehrfach in Angriff genommene Aufgabe, deren Lösung aber nicht so leicht ist, als sie durch die unstatthafte Annahme gemacht wurde. Wie mittelst dieser die Höhe der Atmosphäre berechnet werden könnte, zugleich aber, dass dadurch ein unrichtiges Ergebniss gewonnen würde, kann man in O. E. Meyer, „Die kinetische Theorie der Gase", S. 24, nachlesen.

Herr Schlemüller findet den Schwerpunkt seiner Arbeit in der Ableitung des Gesetzes der Temperaturabnahme mit der Höhenzunahme aus der kinetischen Gastheorie (vergl. Sitzungsber. d. mathem.-physik. Classe d. k. b. Akad. d. W. z. München 1880, Heft II S. 109). Deshalb sei noch eines sehr überraschenden Satzes gedacht: „Die Wärmezunahme gegen das Innere eines cylindrischen" (senkrechten), „an einer Basisseite mit der Atmosphäre in Verbindung stehenden Röhre ist viermal so gross, wie in einer freien Atmosphäre". Demnach soll in Schachten, Brunnen u. dergl. die Lufttemperatur schon bei ungefähr 44 m Tiefe um 1° zunehmen und es wird befürchtet, dass viele Versuche, durch Messungen in solchen Räumen die Zunahme der Temperatur gegen das Erdinnere zu bestimmen, nichts Anderes ergeben, als die Zunahme der Lufttemperatur in seitlich geschlossenen Räumen. Der mitgetheilte Schluss gründet auf der Annahme, die Röhre sei so enge, dass die Molecule ihre Bewegungen nur in axialer Richtung ausführen könnten, die seitlichen Bewegungen werden als unausführbar wegen Platzmangel gedacht. Nun ist aber die mittlere Weglänge der Luftmolecule, bei mittlerer Temperatur der Atmosphäre, zwischen je zwei Zusammenstössen etwa der zehntausendste Theil eines Millimeter; wie enge wird also wohl der Schacht, Brunnen u. dergl. angenommen?

Die Zuverlässigkeit der Schlemüller'schen Arbeit lässt sich nach folgendem Theile der Einleitung bemessen. Aus der für alle Molecule gleich gross angenommenen Geschwindigkeit $V$ soll der Gasdruck berechnet werden. Man denkt durch den betreffenden Punkt eine Ebene und untersucht alle die von der einen Seite dieser Ebene her erfolgenden Stösse. Deren Bewegungsquantitäten können dargestellt werden

durch die Halbmesser $mV$ einer auf der Ebene errichteten, um den Punkt beschriebenen Halbkugel. Für die Druckberechnung sind aber nur die Componenten rechtwinklig zur Ebene von Bedeutung. „Alle möglichen Componenten dieser Art bilden die Ordinaten der früher erwähnten Halbkugel." Das ist mindestens in der Fassung zu beanstanden, denn die Ordinaten gehen ja nicht alle durch den betreffenden Punkt (das Centrum), wie doch die Componenten müssen; diese bilden also nicht die Ordinaten, sondern können nur hinsichtlich Grösse, Zahl und Vertheilung durch die Ordinaten dargestellt werden. „Da jede Richtung gleich möglich ist, so wird der Stoss, welcher gegen die Grenzwand ausgeübt wird, ausgedrückt werden durch den Mittelwerth aller möglichen Fälle, d. i. durch die mittlere Ordinate der Halbkugeloberfläche oder die Schwerpunktsordinate derselben." Das müsste wohl, um deutlich zu sein, etwa so ausgedrückt werden: in endlich grosser Zeiteinheit erfolgen Stösse in allen möglichen Richtungen und die für den untersuchten Druck wirksamen Componenten ihrer Bewegungsquantitäten sind nach Grösse und Zahl durch die Halbkugelordinaten darstellbar. Wie die Schwerpunktsordinate gleich dem Mittelwerthe aller Ordinaten ist, so kann sie auch der Grösse nach den Mittelwerth des Druckes darstellen, d. h. jenen, welcher, während der Zeiteinheit unverändert stark bleibend, dieselbe Wirkung hervorbrächte, wie die aus den verschiedenen Stössen hervorgehenden ausserordentlich rasch wechselnden Drucke. „Diese" (Schwerpunktsordinate) „liegt aber in der halben Höhe"; — das ist ein gröblicher Irrthum, denn die Schwerpunktsordinate der Halbkugel ist bekanntlich nicht dem halben Halbmesser, sondern drei Achteln desselben gleich.

In vermeintlicher Berichtigung der Schlussweise von Joule (und Anderer) findet Herr Schlemüller die Moleculargeschwindigkeit doppelt so gross, als bisher nach ziemlich verschiedenen Beweisarten angenommen wird, nämlich $= 2\sqrt{3gP_0V_0(1+\alpha t)}$, worin $g$ die Schwerebeschleunigung, $P_0$ den Normaldruck, $V_0$ das Volum von einem Kilogramm des Gases bei $0^0$ (Druck nicht angegeben), $\alpha$ den Ausdehnungscoefficienten, $t$ die Temperatur bedeuten. Statt auf den Irrthum in der Schlussweise einzugehen, sei erinnert, dass Clausius 1862 (Wien. Ber. 46, 2. S. 402) einen ganz ähnlichen aufgedeckt und widerlegt hat. Im weiteren Verlaufe der Untersuchung wird gesagt, in vorstehender Formel sei ein mit der Höhe veränderlicher Werth der Schwerebeschleunigung einzusetzen. Das ist aber nicht gerechtfertigt. Denn jene Formel ist, abgesehen vom irrthümlichen Factor 2 und für $t = 0$, die Umformung von $V^2$ gleich 3mal Normaldruck durch die Masse der Volumeinheit bei diesem Drucke und $0^0$; die Zahl $g$ kommt nur dadurch in die Formel, dass die Masse mittels eines Gewichts ausgedrückt wird. Dieses Gewicht ändert proportional mit $g$, nicht aber ist die Masse und ebensowenig ist der Normaldruck von der Intensität der Schwere abhängig.

Die mitgetheilten Beanstandungen und die Proben aus der Abhandlung dürften ausreichen zur Begründung der Ansicht, der Herr Verfasser habe die Aufgabe, welche er sich stellte, noch nicht befriedigend gelöst.

Die Abhandlung III des zweiten Schriftchens: „Die mittlere Jahrestemperatur eines Parallelkreises als Function der geographischen Breite", sucht, mit Hilfe von Potenzreihen, die bis zur 22. Potenz des Cosinus der geographischen Breite und des Sinus der jeweiligen Schiefe der Ekliptik enthält, die Differenz der (nach allen Richtungen gleich gross angenommenen) Ausstrahlung der Erde gegen den Himmel und die Absorption der vom Himmelraum kommenden Einstrahlung, in Gleichung zu setzen. Dabei werden gewisse ideale Verhältnisse vorausgesetzt und Verfasser meint selbst, die theoretischen Betrachtungen, welche zu seiner Formel führten, seien, da die Theorie der Wärmestrahlung nichts weniger als abgeschlossen sei, in Bezug ihrer Richtigkeit problematisch. Er leitet daher noch eine empirische Formel ab für die mittlere Jahrestemperatur, diese als Function der mittleren Sonnenstrahlungsintensität (durch die Reihen berechnet) ansehend. All' das ist nichts weniger als einfach und überzeugend. Sicher aber darf, da weder auf die Ungleichheit des Strahlungs- und Absorptionsvermögens, noch auf die vermittelnden Strömungen in Luft und Wasser, noch Leitung der Wärme u. s. w. Rücksicht genommen ist, eine Vergleichung mit der Beobachtung gar nicht vorgenommen werden, und wenn das mit den recht zweifelhaften Mittelwerthen aus Beobachtungen dennoch geschieht, so liegt dem eine Selbsttäuschung zu Grunde, ebenso wie der ausgeführten Berechnung, um wieviel im Mittel die Jahrestemperatur von Genf steigen würde, wenn es in die Parallele des St. Bernhard versetzt würde.

Die IV. Abhandlung betrifft „Eine Correction wegen der Temperaturabnahme mit wachsender Breite, anzuwenden beim barometrischen Höhenmessen". Die angestellte Betrachtung ist nur zulässig, wenn das Gesetz der Temperaturänderung der Luft mit der Höhe bekannt ist und die Barometerformel nach des Verfassers vermeintlichem Temperaturabnahmegesetz eingerichtet ist. Keinesfalls aber darf sie, wie geschehen, auf die gewöhnliche Barometerformel begründet werden, welche in Ermangelung besserer Kenntniss annimmt, die Temperatur der Luftschichte zwischen den zwei Stationen sei das Mittel aus den dort gleichzeitig beobachteten. Das ist sofort einleuchtend, wenn man wirklich gleichzeitig angestellte Beobachtungen (oder auf gleiche Zeit reducirte) verarbeitet; es gilt aber auch, wenn Jahresmittel von Temperatur und Druck in die Rechnung gestellt werden, denn immer muss man annehmen, diese beständen gleichzeitig zusammen.

Die Abhandlung II: „Die specifische Wärme der Gase bei constanten Volumen, sowie bei constantem Drucke und das Verhältniss beider zu einander, berechnet nach der dynamischen Gastheorie", ist entschieden

die interessantere. Der Grundgedanke ist, dass zwei Körper nur dann gleich warm sind, wenn die Arbeit der Molecule an der Grenzfläche in gleichen Zeiten gleich gross ist. Es wird daher die in einer bestimmten Zeit gegen die Grenzfläche geleistete Arbeit gesucht, wobei benutzt wird, dass die Zahl der Stösse der Molecule gegen die Grenzfläche der Moleculargeschwindigkeiten proportional sei. Die mathematische Ausführung leitet dann zu dem Ergebnisse: „die specifischen Wärmen eines Gases bei constantem Volumen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den absoluten Temperaturen“. Auch die specifische Wärme bei constantem Drucke wird mit der Temperatur veränderlich gefunden, jedoch in geringerem Grade, als die specifische Wärme bei constantem Volumen, also auch das Verhältniss der beiden genannten Wärmecapacitäten. Bei $0^0$ C. soll dieses ($k$) sein $1+\frac{4}{9}$, bei der absoluten Temperatur $T$ aber $1+\frac{4}{9}\left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$. Verfasser scheint zufrieden damit, dass seine Theorie das Verhältniss zwischen $0^0$ und $100^0$ doch nahezu constant (1,444 bis 1,3802) ergiebt, während man sonst es auf Grund der Messungen für constant ansieht. Das Bemerkenswertheste, was bei des Verfassers Vorstellungen herauskommt, ist, dass der ganze Betrag der einem Gase zugeführten Wärme zur Vermehrung der Energie der fortschreitenden Molecularbewegung verwendet werde, nicht, wie Clausius fand, weniger als zwei Drittel desselben; die Annahme, das fehlende Drittel vermehre die Bewegungen innerhalb der Molecule, wird hiernach also hinfällig.

Bohn.

---

**Die stereographische Projection** von E. Reusch, Prof. d. Physik in Tübingen. 4°, 32 S. Mit 8 Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1881.

Unter den verschiedenen Projectionsverfahren ist das des Grund- und Aufrisses das älteste und das auch jetzt gebräuchlichste. Sein Ursprung kann nicht nachgewiesen werden; es ist offenbar so alt, als die Ausführung verwickelterer Gebäude aus behauenen Steinen. Vitruv führt es als durchaus bekannt an. Die perspective und die stereographische Projection verdanken wir aber den Griechen. Die erstere wäre nach Vitruv's Zeugniss, soweit sie durch die Kenntniss des Fluchtpunktes bezeichnet wird, zur Zeit des Aeschylus (525—456 v. Ch.) durch Agatharchus zur Darstellung von Gebäuden auf Bühnengemälden erfunden worden; und die aufgegrabenen Wandmalereien in Rom weisen uns die Kenntniss des Fluchtpunktes bei den Alten sicher nach. Die stereographische Projection dagegen wurde nicht durch künstlerische, sondern durch wissenschaftliche Zwecke ins Leben gerufen, indem sie von dem grossen Hipparch (um 161—126 v. Chr. thätig) zum Zwecke der Herstellung des jetzt noch gebräuchlichen Planisphäriums erfunden

wurde*, welches auf der Sternkarte vermittelst des ausgeschnittenen Horizontkreises die zu einem gewissen Zeitpunkte über dem Horizonte eines Ortes stehenden Gestirne anzeigt und die Zeit des Auf- und Unterganges der Gestirne abzulesen gestattet. Die zu diesem Zwecke so sehr geeignete stereographische Projection projicirt die Himmelskugel aus einem Pole auf die Aequatorebene und besitzt die hervorragenden Eigenschaften, dass sich Kreise der Kugel wieder als Kreise projiciren und dass die Abbildung mit der wahren Gestalt in den kleinsten Theilchen ähnlich ist oder dass sich alle Winkel ungeändert abbilden.

Diese auch für manche andere Zwecke, als für Stern- und geographische Karten, nützliche Projectionsweise hat nun der Verfasser in dem vorliegenden kleinen Werke einer eingehenden und mit Sorgfalt und Liebe ausgeführten Bearbeitung unterzogen, und zwar sowohl auf dem Gebiete der Theorie, wie auf dem der Anwendung. Nachdem die Hauptsätze entwickelt sind, werden die Abbildungen der grossen und kleinen Kugelkreise in ihren wesentlich verschiedenen Lagen construirt und die Formeln für deren Elemente abgeleitet. Es wird dann das sphärische Dreieck und sein Polardreieck abgebildet und die graphische Auflösung desselben in einigen Fällen gegeben, wobei aber der Verfasser mit Recht die sonst gebräuchlichen Auflösungen mittelst senkrechter Projection für einfacher erklärt. Darauf folgt die Anwendung auf das Gebiet der Astronomie und es werden die Elemente zur astronomischen Ortsbestimmung, Azimuth und Höhe, Rectascension und Declination, Länge und Breite in einfacher Weise dargestellt und das Zurückweichen der Aequinoctialpunkte veranschaulicht.

Das Schriftchen macht auf die mannichfaltige Anwendbarkeit, z. B. auch in der Krystallographie aufmerksam, zu denen es sich wegen der oben angeführten ausgezeichneten Eigenschaften eignet. Dabei ist die Behandlung des Stoffes eine eingehende und doch kurze, die Erörterungen sind sorgfältig und die Lösungen der Aufgaben einfach, so dass sich das Schriftchen zum Studium und zur Benutzung bei Anwendung der stereographischen Projection auf weitere Gebiete bestens empfiehlt.

Karlsruhe, im October 1881. Chr. Wiener.

---

**An introduction to the ancient and modern geometry of conics**, by Charles Taylor, M. A. fellow of St. John's college Cambridge. 379 S.

Das unter dem vorliegenden Titel veröffentlichte Werk über Kegelschnitte hat das Motto:

*ἐν τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσιν ἐστιν ὁδὸς μία,*

---

* Wolf, Geschichte der Astronomie, 1877, S. 162.

einen Ausspruch, den einst Euklid seinem Könige Ptolemaeus gegenüber brauchte, der das mühsame Studium der „Elemente“ abschreckend fand.

Es giebt in einer Einleitung eine Uebersicht über die Entwickelung der alten und neuen Geometrie, welche als die Wissenschaft des Euklid, Archimedes und Apollonius, des Kepler, Desargues, Newton und Poncelet charakterisirt wird. Auffallend wird es jedem deutschen Leser sein, in der Zahl dieser Männer den Namen eines der grössten Geometer aller Zeiten, der vielleicht nur von Apollonius übertroffen wird, unseres grossen Landsmannes Jacob Steiner nicht zu finden, der in der Ausbildung der modernen Theorie der Kegelschnitte nicht minder bahnbrechend und grundlegend war, als Apollonius in der alten.

Die Einleitung zerfällt in vier Abschnitte, welche die Zeit vor Euklid, von Euklid bis Serenus, diejenige von Kepler, Desargues, Newton und endlich die moderne Geometrie behandeln.

Bevor der Verfasser in die Behandlung der Kegelschnitte eintritt, giebt er die Definitionen des Kegelschnittes und der wichtigsten Hauptelemente desselben, ohne diese, wie es natürlich ist, begründen zu können.

Der Kegelschnitt wird definirt als Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein constantes Verhältniss haben. Recensent erlaubt sich hier die Bemerkung, dass er in einem kleinen Werkchen: „Die Kegelschnitte, behandelt für die oberen Classen höherer Lehranstalten“, von A. Milinowski, Berlin bei Calvary, aus derselben Definition die hauptsächlichsten Eigenschaften, Brennpunktseigenschaften sowohl wie Polareigenschaften, auf 28 Seiten, allerdings in anderer Art, als Verfasser des vorliegenden Buches, abgeleitet hat. Mit dieser Behandlungsart schlägt der Verfasser einen ganz andern Weg ein, als ihn Steiner in seinen Vorlesungen über elementare Behandlung der Kegelschnitte zu gehen pflegte, indem Letzterer jede der drei Arten der Kegelschnitte besonders definirte und nur nachwies, dass sie sämmtlich auch auf dieselbe Weise erzeugt werden können.

Das constante Abstandsverhältniss wird Excentricität genannt, im Widerspruch mit der gewöhnlich diesem Worte beigelegten Bedeutung, nämlich der Entfernung der Brennpunkte.

Durchmesser eines Kegelschnittes ist der Ort der Mitten eines Systems von parallelen Sehnen. Da der Leser an dieser Stelle noch nicht weiss, in wieviel Punkten eine Gerade von einem Kegelschnitte getroffen und welche Form der Ort der Mitten hat, so wäre es wohl besser, diese Definition und manche andere, wie z. B. die der Polare eines Punktes, an die Stelle zu setzen, an welcher sie aus vorher bewiesenen Eigenschaften abgeleitet werden kann; denn Definitionen, soweit sie nicht selbstverständlich oder Namenserklärungen sind, sollen in einem Lehrbuche gefolgert und nicht unbewiesen aufgestellt werden.

Der systematische Theil beginnt mit der Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von welchem man Brennpunkt, Leitlinie und Excentricität kennt.

Diese Aufgabe wird dadurch gelöst, dass die Schnittpunkte auf einer zur Leitlinie parallelen Geraden bestimmt werden. Hat $g$ von der Leitlinie den Abstand $d$ und ist $\varepsilon$ die Excentricität, so schneidet ein Kreis um den Brennpunkt mit dem Radius $r = \varepsilon \,.\, d$ die Gerade $g$ in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte.

Bei der Parabel ist die Construction des Schnittpunktes einer zur Leitlinie senkrechten Geraden sehr bekannt, welche unmittelbar zu einigen Haupteigenschaften der Tangenten führt. Es soll hier angeführt werden, dass die Ausdehnung dieser Construction auf Ellipse und Hyperbel, wie sie in dem vorhin angegebenen Werkchen von Milinowski durchgeführt ist, wesentliche Eigenschaften der doppelt berührenden umschliessenden Kreise und der Tangenten hervortreten lässt.

Mit Hilfe des excentrischen Kreises eines Punktes $P$, unter welchem derjenige Kreis um den Punkt $P$ verstanden ist, dessen Radius gleich ist dem Producte aus der Excentricität $\varepsilon$ und der Entfernung des Punktes von der Leitlinie, werden die Schnittpunkte einer Geraden und die Tangenten eines Punktes mit dem durch Brennpunkt, Leitlinie und Excentricität bestimmten Kegelschnitte construirt. Aus dieser Construction ergiebt sich Ordnung und Classe des Kegelschnittes.

Der excentrische Kreis eines Punktes $P$ ist also durch Brennpunkt, Leitlinie und Excentricität bestimmt; jedem Punkte des ersteren entspricht ein Punkt des Kegelschnittes, jeder Tangente des Kreises eine solche des Kegelschnittes. Mittelst derselben Beziehung lässt sich aber jedem Punkte und jeder Geraden der Ebene ein anderer Punkt und eine andere Gerade der Ebene zuordnen. Dadurch sind die Punkte und Geraden der Ebene in eine Beziehung gebracht, welche „Reversion“ genannt wird (S. 321 etc.).

Es lässt sich leicht zeigen, was im Buche nicht geschehen, dass die reversen Elemente von vier harmonischen Elementen auch harmonisch sind; aus diesem Satze folgen dann, falls man sie für den Kreis als bewiesen annimmt, die Polareigenschaften des Kegelschnittes.

Zur Ableitung derselben schlägt der Verfasser einen andern Weg ein, der sich allerdings eng an die Methode der alten Geometrie anschliesst, dafür aber auch die Einfachheit vermissen lässt, welche die Anwendung der harmonischen Gebilde, überall wo sie auftreten, in so hohem Grade auszeichnet. Wenn man erkannt hat, wie einfach sich die Polareigenschaften beim Kreise ableiten und sich vermittelst einer geometrischen Verwandtschaft, z. B. der Reversion oder auch der Perspective, auf den Kegelschnitt übertragen lassen und dann vergleicht, welcher Aufwand von Sätzen, die eine weitere Anwendung nur selten ge-

statten, nothwendig ist, um diese Eigenschaften im Sinne der alten Geometrie herzuleiten, so kommt man zu der Ueberzeugung, dass die Herleitung auf dem letzteren Wege derjenigen Einfachheit entbehrt, welche stets als erstes Erforderniss einer zweckmässigen Darstellung verlangt werden muss. Es soll damit eine elementare Behandlung der Kegelschnitte, welche also die Projectivität nicht in Anspruch nimmt, nicht etwa missbilligt werden; eine solche ist im Gegentheile aus vielfachen Gründen durchaus wünschenswerth. Sie muss sich aber der harmonischen Eigenschaften ohne Umwege bedienen dürfen, sonst werden die Nachweisungen harmonischer Beziehungen so lang und ausgedehnt, dass sie den Reiz verlieren, der elegante geometrische Erörterungen so anziehend macht.

Zum Beweise der Polareigenschaften benutzt der Verfasser folgende Sätze:

1. Wenn man durch einen beliebigen Punkt $P$ auf einem Kegelschnitte mit dem Brennpunkte $B$ und der Leitlinie $b$ die Tangente zieht und von einem Punkte $T$ derselben die Perpendikel $TN$ und $TL$ auf $b$ und $PB$ fällt, so ist das Verhältniss $LB:TN$ gleich der Excentrität.

2. Ist ein $O$ ein beliebiger Punkt der Berührungssehne $PQ$ eines Punktes $T$, $OM$ senkrecht auf der Leitlinie und schneidet das Perpendikel von $O$ auf $TB$ ($B$ Brennpunkt), die Gerade $BP$ (oder $BQ$) in $L$, so ist das Verhältniss $BL:OM$ gleich der Excentricität.

3. Fällt man $TN$ senkrecht auf die Leitlinie, so steht das Product $BO.BL$ zum Producte $QM.TN$ in einem constanten Verhältnisse.

4. Wenn man von den Punkten eines Durchmessers Tangenten zieht, so sind die Berührungssehnen parallel und werden durch den Durchmesser halbirt.

5. Sind $O$ und $O'$ zwei Punkte einer Tangente mit dem Berührungspunkte $T$, $PQ$ und $P'Q'$ irgend zwei parallele Sehnen durch sie, so ist $OT^2:O'T^2 = OP.OQ:O'P'.O'Q'$.

Man erkennt, dass dieser Weg zu den Polareigenschaften sehr weitläufig ist. Referent erlaubt sich, darauf aufmerksam zu machen, dass in der kürzlich bei Teubner erschienenen „elementar-synthetischen Geometrie der Kegelschnitte von Milinowski“ eine kürzere Ableitung der Polareigenschaften, die unmittelbar aus der Erzeugung durch Brennpunkt und Leitlinie hervorgeht und sich nicht auf die Polareigenschaften des Kreises stützt, gegeben ist.

Uebrigens giebt das vorliegende Buch für den Satz, dass die Berührungssehnen aller Punkte einer Geraden sich in einem Punkte schneiden, einen andern, kürzern Beweis, der sich auf die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser stützt (S. 90 etc.).

Es treten dem Leser vielfach neue Beweise entgegen. So wird der bekannte Satz, dass die Brennstrahlen nach den Berührungspunkten zweier

Tangenten gleiche Winkel mit dem Brennstrahle nach ihren Schnittpunkten bilden, mit Hilfe des vorhin unter 1 genannten Satzes bewiesen, aus dem auch die polaren Beziehungen zwischen Brennpunkt und Leitlinie sich ergeben. Man gelangt jedoch zu jenem Satze, wie zu diesen Beziehungen mit Hilfe der einfachsten harmonischen Eigenschaften unmittelbar aus der Erzeugung durch Brennpunkt und Leitlinie.

In besonderen Capiteln (V und VI) werden die Asymptoten, die conjugirte Hyperbel und die gleichseitige Hyperbel abgehandelt; von letzterer wird auf elementarem Wege die Haupteigenschaft nachgewiesen, dass sie durch den Höhenpunkt jedes ihr eingeschriebenen Dreiecks geht. Der Beweis in dem ersten Theile der Steiner'schen Vorlesungen, besorgt von Geiser, beruht auf dem Pascal'schen Satze und derjenige im zweiten Theile, herausgegeben von Schroeter, wird dadurch geführt, dass man die gleichseitige Hyperbel in eine Parabel polarisirt.

Um die alte Behandlungsweise der Kegelschnitte erschöpfend darzustellen, durfte ihre Entstehung aus dem Kegel nicht fehlen. So wird denn auch im VII. Capitel gezeigt, wie der Schnitt eines geraden Kegels der Ort eines Punktes ist, dessen Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem constanten Verhältnisse stehen. Unmittelbar aus der Entstehung ergeben sich übrigens die Lage der Brennpunkte als die Berührungspunkte mit den Brennkugeln, die Lage der Leitlinien, die constante Grösse der Summe oder Differenz der Brennstrahlen eines Punktes, die Gleichheit der Winkel, welche eine Tangente mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes bildet etc.

Vom IX. Capitel an beginnt die moderne Behandlung der Geometrie der Kegelschnitte. Es werden der Reihe nach die Methoden der orthogonalen und conischen Projection, welcher letzteren ein Abriss der Eigenschaften des Doppelverhältnisses und der Involution vorhergeht, darauf die Verwandtschaften der Polarisation und Inversion oder Kreisverwandtschaft besprochen und zur Ableitung der Polareigenschaften, der conjugirten Durchmesser, der Poldreiecke etc. benutzt.

Sowie der grössere Theil des Werkes (228 Seiten von 379) der alten Geometrie eingeräumt ist, so scheint der Verfasser derselben auch ein grösseres Interesse noch, als der modernen zugewendet zu haben. Es fehlt nämlich die projectivische Behandlung, also gerade diejenige, welche von allen modernen Behandlungsarten der Kegelschnitte weitaus die wirkungsvollste gewesen ist. Wenngleich gezeigt wird, dass die Strahlen, welche einen veränderlichen Punkt eines Kegelschnittes mit vier festen Punkten verbinden, ein constantes Doppelverhältniss haben, was übrigens eine unmittelbare Folge der bekannten Kreiseigenschaft von der Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Bogen ist, so fehlt doch gänzlich der Nachweis für die Richtigkeit der Umkehrung, dass die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier vierstrahligen Büschel von demselben

Doppelverhältnisse mit den Scheiteln der Büschel auf einem Kegelschnitte liegen. Es fehlt gänzlich die Einführung in. denjenigen Theil der Geometrie, welchen wir Geometrie der Lage nennen, die Einführung in die v. Staudt'schen Methoden, jedenfalls ein Mangel bei einem Werke, welches auch in die moderne Geometrie einzuführen den Zweck hat.

Im Uebrigen sind die gegebenen Beweise und Methoden kurz und klar. Von grossem Interesse sind die historischen Notizen und die Fülle der dem Werke beigegebenen Aufgaben, die dem Leser reichhaltigen Stoff zu Uebungen und Ergänzungen des systematischen Theiles vorführen. Der Gesammteindruck des Buches ist ein günstiger und seine Lectüre durchaus zu empfehlen.

MILINOWSKI.

---

**Die Flächen zweiten Grades,** nach elementar-synthetischer Methode bearbeitet vom Oberlehrer Dr. J. P. H. WEINMEISTER. Programm der Realschule I. O. zu Leipzig. 1880 und 1881.

Während die Curven II. O. vielfach auf elementarem Wege untersucht worden sind, hat sich die elementare Behandlung den Oberflächen II. O. im Ganzen nur vereinzelt und wenig eingehend zugewendet. Wenn auch das vortreffliche Werk von Schröter: „Theorie der Oberflächen II. O.", das Bestreben hat, die Eigenschaften der Flächen II. O. mit den einfachsten Mitteln abzuleiten, so ruhen seine Methoden doch auf den Steiner'schen Principien, auf der Projectivität, und können deshalb nicht elementar genannt werden. Daher ist die obige kleine Schrift, in welcher der Verfasser mit einfachen und elementaren Methoden die wesentlichsten Eigenschaften der Oberflächen II. O. ableitet, von grossem Interesse für jeden Freund elementarer Geometrie. Der Begriff der letzteren lässt sich vielleicht als nichtprojectivische Geometrie definiren. Und in der That benutzt der Verfasser eigentlich nur die Euklidische Geometrie, indem er bei seinen Beweißen nicht einmal von dem elementaren harmonischen Gebilde Gebrauch macht. Es fehlt daher auch die Ableitung der polaren Eigenschaften der Flächen II. O. Die übrigen bekannteren metrischen Eigenschaften finden sich in grosser Vollständigkeit vor.

Den Ausgangspunkt bildet das Dandelin-Quetelet'sche Theorem, welches die Eigenschaften der Kegelschnitte am Rotationskegel entwickeln lässt. Es werden nacheinander behandelt: 1. die Rotationskegel, 2. die Cylinder, 3. die Rotationsflächen, 4. die allgemeinen Kegel, 5. die allgemeinen Flächen.

Der Rotationskegel führt zu den bekanntesten Eigenschaften der Kegelschnitte, dann aber auch zu den weniger bekannten der Brennkugeln und Brennkreise, unter letzteren diejenigen Kreise verstanden, welche einen Kegelschnitt doppelt, reell oder imaginär berühren und

deren Mittelpunkte auf der Hauptaxe liegen. Alle durch einen Brennkreis gelegten Kugeln sind Brennkugeln des Kegelschnittes. Eine zweite Art von Brennkreisen, deren Mittelpunkte auf der Nebenaxe liegen, wird später besprochen. Man gelangt zu ihnen am einfachsten, wenn man die Strecken zwischen einem Brennpunkte und seiner Leitlinie harmonisch im Verhältniss der Excentricität theilt und über der Entfernung der Theilpunkte einen Kreis beschreibt. Ueber die Brennkreise hat schon Steiner im 37. und 45. Bande des Crelle'schen Journals eine Reihe von Sätzen ohne Beweis mitgetheilt; ihre Haupteigenschaft ist diejenige, dass die Tangente von einem Kegelschnittspunkt an einen Brennkreis zu seinem Abstande von der Leitlinie in einem constanten Verhältnisse steht, welches gleich der Excentricität des Kegelschnittes ist.

In dem Abschnitte über Cylinder wird die Methode der Parallelprojection und ihre Anwendung auf Kegelschnitte erörtert.

Der Abschnitt über Rotationsflächen behandelt getrennt die Rotationsflächen, welche die Hauptaxe, und diejenigen, welche die Nebenaxe zur Rotationsaxe haben. In einfacher Weise ergiebt sich, dass jeder ebene Schnitt ein Kegelschnitt ist und dass diejenigen Brennkugeln einer Rotationsfläche, welche diese also in einem reellen oder imaginären Kreise und die Schnittebene berühren, dies in einem Brennpunkte der Schnittfigur thun, dass ferner die Tangenten von jedem Punkte der Fläche an eine Brennkugel zu den Abständen von der Berührungsebene in einem constanten Verhältnisse stehen. Auf dem einschaligen Rotationshyperboloide werden die beiden Schaaren von Geraden, die auf ihm liegen, und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ermittelt.

Recht eingehend ist der allgemeine Kegel behandelt. Zunächst wird gezeigt, dass jeder schiefe Kreiskegel sich als gerader elliptischer und umgekehrt darstellen lässt. Weitere Eigenschaften folgen aus der Einführung des Polarkegels.

Nennt man diejenige Ebene, welche die Spitze eines Kegels mit einer Leitlinie seiner Grundfläche verbindet, eine Leitebene des Kegels und die Höhe des Polarkegels eine Brennlinie, so folgt, dass alle Punkte des Polarkegels von der Brennlinie und der Leitebene dasselbe Abstandsverhältniss haben. Mit Hilfe hiervon ergiebt sich, dass jeder Schnitt eines schiefen Kreiskegels und auch eines jeden Kegels II. O. ein Kegelschnitt ist.

Auf die Kreisschnitte eines beliebigen Kegels ist leider nicht eingegangen. Wenn auch die Aufgabe, einen beliebigen Kegel in einem Kreise zu schneiden, kubischen Charakters ist, so hätte doch wenigstens das Vorhandensein von Kreisschnitten erwiesen werden sollen.

Die Focaleigenschaften des Kegels, deren Analogie mit den Brennpunktseigenschaften des Kegelschnittes nach Schroeter durch eine uneingeschränkte Dualität wesentlich ergänzt wird, werden durch eine

geometrische Verwandtschaft, die „Polarverwandtschaft", abgeleitet. Schroeter nennt zwei polarverwandte Gebilde „reciprok" (Theorie der Oberflächen II. O., S. 52), Reye „rechtwinklig aufeinander bezogen" (Geometrie der Lage I., S. 159). Denkt man sich nämlich alle durch einen Punkt gehenden Geraden und Ebenen paarweise so miteinander verbunden, dass jeder Geraden die zu ihr senkrechte Ebene und umgekehrt zugeordnet wird, so sind zwei derartige Gebilde polarverwandt.

Von speciellen Kegeln werden noch der gleichseitige und der orthogonale Kegel näher untersucht. Es wird nachgewiesen, dass ein Kegel unendlich viele Tripel senkrechter Seitenlinien hat, wenn er ein solches besitzt, dass ein solcher Kegel von jeder Ebene, welche auf einer Seitenlinie senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird, dass die Höhenebenen eines beliebigen eingeschriebenen Dreikants sich in einer Seitenlinie des Kegels schneiden. — Neben anderen Eigenschaften des orthogonalen Kegels werden folgende bekannten bewiesen: „Drehen sich die Schenkelebenen eines rechten Flächenwinkels um zwei sich schneidende Gerade, so durchläuft die Scheitelkante einen Kegel" und „der Ort aller Punkte, welche von zwei sich schneidenden Geraden ein bestimmtes Entfernungsverhältniss haben, ist ein Kegel".

In dem Abschnitte „Allgemeine Focalgebilde des ebenen Kegelschnittes" werden aus den Eigenschaften des allgemeinen Kegels Focaleigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet, so namentlich auch die von Salmon herrührende Erzeugung der Kegelschnitte (vergl. Schroeter, Theorie der Oberflächen II. O., S. 646). Da sie weniger bekannt ist, so sei sie hier angeführt: „Bewegt sich in einer Ebene ein Punkt so, dass das Quadrat seiner Entfernung von einem beliebigen Punkte im Raume zum Producte seiner Entfernungen von zwei Geraden in der Ebene in unveränderlichem Verhältnisse steht, so beschreibt er einen Kegelschnitt."

Den Uebergang zur allgemeinen Fläche II. O. bildet der Satz: „Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so, dass seine Potenz in Beziehung auf einen Kreis in der Ebene oder auf eine Kugel im Raume in unveränderlichem Verhältnisse steht zum Producte seiner Abstände von zwei festen Geraden der Ebene, so durchläuft er einen Kegelschnitt." Wird dieser Satz auf den Raum ausgedehnt, so liefert er eine Definition der Fläche II. O., von welcher die Salmon'sche Definition (Schröter, Theorie der Oberflächen, S. 649) ein specieller Fall ist. Aus ihr ergeben sich ungezwungen die Haupteigenschaften der Oberflächen II. O. Auf dem einschaligen Hyperboloide und dem hyperbolischen Paraboloide werden die beiden Schaaren von Geraden ermittelt und ihre Eigenschaften nachgewiesen.

Die kleine, 77 Seiten starke Schrift leitet in klarer, übersichtlicher Weise und mit einfacher, ungezwungener Methode auf elementarem Wege einen grossen Theil jener Eigenschaften der Oberflächen II. O. ab, welche

bisher nur vereinzelt der Elementargeometrie bekannt waren, und führt auf dem leichtesten Wege und in grosser Kürze in die Theorie der Oberflächen II. O. ein. Ihr ist eine recht weite Verbreitung sehr zu wünschen.

MILINOWSKI.

---

**Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen.** Ein Lehr- und Uebungsbuch von A. MILINOWSKI. I. Theil. Planimetrie.

„Unter den mathematischen Disciplinen hat die Geometrie unzweifelhaft die grösste bildende Kraft, und zwar liegt diese in der Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Die Stärkung desselben muss daher der Hauptzweck des geometrischen Unterrichts sein, die geometrische Wahrheit muss durch Anschauung erkannt werden. Alle Beweise, welche vorzugsweise der Rechnung sich bedienen, sind möglichst zu vermeiden. Der wirkliche Lernstoff ist in knapper, präciser Form und möglichst geringem Umfange zu geben; seine Anwendungsfähigkeit ist an zahlreichen Constructionsaufgaben zu zeigen. Die Constructionen selbst, als hauptsächlichstes Mittel zur Kräftigung des Formensinnes, sind auf den unteren Stufen auch in den Nebentheilen genau mit Zirkel und Lineal auszuführen."

Mit diesen Worten, welche gewiss den Beifall vieler erfahrener Schulmänner finden werden, leitet der Verfasser das vorliegende Buch ein. Bevor wir uns zu überzeugen suchen, das dasselbe wirklich nach diesen Grundsätzen bearbeitet ist, mag bemerkt werden, dass bei der „knappen, präcisen Form", „dem möglichst geringen Umfange" nicht blos die Skylla der Breitspurigkeit, sondern auch die Charybdis der Unverständlichkeit zu vermeiden ist, da schon der alte Kant Veranlassung nimmt, zu erinnern: manche Bücher seien gar nicht so lang, wenn sie nicht so verzweifelt kurz wären. Zu dieser ersten vorläufigen Bemerkung, gegen welche unser Buch an einigen Stellen, wo die Aufgaben ohne Andeutung der Lösung stehen, gesündigt hat, so dass mancher Schüler die Lösung umsonst aus dem Zusammenhange zu entnehmen sich anstrengen wird, mag die zweite treten, dass der Verfasser, welcher auf den unteren Stufen genaue Constructionen verlangt, in der Prima die genau gezeichneten Figuren nicht verdammen kann.

Das Buch bietet in 22 Paragraphen auf 118 Seiten einen reichen Lehrstoff und die achtunggebietende Zahl von 1181 Aufgaben dar. Dieselben sind dem theoretischen Vortrage so eingefügt, dass sie bald die natürliche Folge der neuen Erkenntniss darstellen, bald neue Gesichtspunkte darbieten, aus denen die fernere Untersuchung ihren Pfad weiterhin erspäht.

Das Buch zerfällt ungezwungen in drei Abschnitte, die zwar nicht bezeichnet sind, sich aber erkennbar genug gegen einander abheben.

Der erste umfasst die §§ 1 bis 13; er behandelt die elementare Geometrie bis zur Aehnlichkeit. Da der Winkel als Maass für den Richtungsunterschied zweier Geraden definirt ist (§ 2), so erscheinen die Parallelen als Gerade gleicher Richtung (§ 9, II), und nun ergiebt sich ungezwungen, dass sie mit einer dritten gleiche Richtungsunterschiede haben müssen. Es kann meine Aufgabe einem Mathematiker von der Bedeutung Milinowski's gegenüber nicht sein, ihm an dieser Stelle theoretische Vorhaltungen zu machen; um so weniger, da bei einem Lehrbuche der pädagogische Gesichtspunkt der leitende ist. Und unter den Versuchen, die betreffende Barrière, welche ja die ersten Elemente durchsetzt, zu nehmen, gefällt mir kaum eine besser, als dieser hinreichend bewährte. Aus der Beschäftigung mit dem gleichschenkligen Dreiecke (§ 7) ergeben sich die Lösungen der bekannten Grundaufgaben, die Sätze, welche sich auf symmetrische Lage beziehen, geometrische Oerter, eine Reihe von Kreistheoremen (die Ueberschrift: „Lehre vom Kreise" verschwindet jährlich mehr — Gott habe sie selig!) und eine Menge von Aufgaben. Hier schon werden an einen Kreis von einem gegebenen Punkte die Tangenten gezogen (113), es erscheinen eine Reihe von Tactionsaufgaben (126, 127, 134, 135 u. s. w.), ja (144) der Kreis, welcher einen Halbkreis in einem bestimmten Punkte und den Durchmesser berührt. § 8 enthält die Congruenzsätze, § 10 behandelt die Parallelogramme, § 11 bestimmt die Winkelsumme des Dreiecks, § 12 enthält die Lehre vom Centri- und Peripheriewinkel. Dem hier gegebenen Beweise habe ich keinen Geschmack abgewinnen können. Der erste Theil enthält 484 Aufgaben.

Der zweite Theil geht vom § 13 bis § 16. Er umfasst die Lehre von der Aehnlichkeit, die Flächensätze, den Lehrsatz des Pythagoras und die Sätze über die Mittellinie und die Halbirungslinie des Winkels. Dass sich hieran der Sehnen-Tangenten-Secantensatz (Potenz) natürlich schliesst, scheint mir zweifellos; demnach sollte § 18 dem § 17 meines Erachtens inhaltlich vorangehen. In diesem Theile findet die Geometrie der Grössenvergleichungen ihren Abschluss, es eröffnen sich Ausblicke in die Geometrie der Lagenverhältnisse. So Aufg. 771. Die hier gestellten Aufgaben sind zum Theil sehr interessant, so insbesondere eine Reihe von Maximumaufgaben, Einschreibungen der einen Figur in eine andere, Verwandlungen und Theilungen. Ob man in der Beschränkung der algebraischen Hilfsmittel auf das Nöthige so enthaltsam sein will, wie der Verfasser, ist Geschmackssache. 871 und 826, ebenso 852 und 873, 663 und 665 sind nur durch den Wortlaut verschieden. Vielleicht ist es besser, den Schüler diese Umformungen selbst finden zu lassen. Als fehlerhaft sind mir A. 659 und 670 aufgefallen.

Der letzte Theil unseres Buches behandelt die harmonischen Punkte und Strahlen, die harmonische Verwandtschaft, die Kreisverwandtschaft,

dann etwas lose im Zusammenhange des Uebrigen die Kreisrechnung und als Schlussstein des Ganzen die ausgezeichneten Punkte des Dreiecks. Die glückliche geometrische Begabung des Verfassers tritt hier in besonders günstigem Lichte hervor. Die Umrisse der dargelegten Dinge erscheinen in jener lebendigen Klarheit, welche sie nur unter dem Einflusse eigener Forschung auf irgend einem Wissensgebiete annehmen.

Coesfeld, im August 1881. K. Schwering.

---

Schwering, **Mathematische Miscellen.** Progr. Coesfeld. 1881.

Von den drei in dieser Arbeit vereinigten kleinen Aufsätzen beschäftigt sich der erste mit der bekannten elementaren Aufgabe: das Volumen einer Halbkugel durch eine dem Grundkreise parallele Ebene zu halbiren. Ist $x$ der Abstand der Schnittebene vom Grundkreise, so erhält man die Gleichung $x^3 - 3r^2x = -r^3$. Die Lösung dieser Gleichung durch die Cardani'sche Formel giebt, wenn man die darin auftretenden Coefficienten $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ durch *cos*, resp. *sin* $(120^0 + 2n\pi)$ $(n = 0, 1, 2)$ ersetzt und den Moivre'schen Satz benutzt, die einfachen Werthe $x_1 = 2r.cos\,40^0$, $-x_2 = 2r.cos\,20^0$, $x_3 = 2r.cos\,80^0$. Dieselben lassen sich mittelst eines regulären dem Grundkreise einbeschriebenen Neunecks sehr leicht construiren. Der dritte giebt die eigentliche Lösung der Aufgabe, während die beiden anderen einer etwas allgemeineren Fassung des Wortlautes derselben entsprechen. Am Schluss wird auf die Verallgemeinerung der Aufgabe durch Forderung einer andern Theilung der Halbkugel hingewiesen.

Der zweite Aufsatz: „Directe Bildung der Gleichung, welche die Doppeltangenten einer Curve vom Geschlechte Null finden lässt", ist eine Umarbeitung eines früheren, in Bd. XXI S. 130 dieser Ztschr. publicirten Aufsatzes. Wird nach der über die Curve gemachten Voraussetzung $x = \frac{\varphi\lambda}{\psi\lambda}$, $y = \frac{\vartheta\lambda}{\psi\lambda}$ gesetzt, so lautet die gesuchte Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varphi\nu, & \varphi\lambda, & \varphi'\lambda \\ \vartheta\nu, & \vartheta\lambda, & \vartheta'\lambda \\ \psi\nu, & \psi\lambda, & \psi'\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

worin $\lambda$ und $\nu$ die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten sind. Durch sehr sinnreiche Transformationen gelangt nun der Verfasser dazu, gleich anfangs die fremden Factoren der Determinante zu beseitigen, dann ihren eigenen Grad, und denjenigen ihrer Discriminante, in $\lambda$ zu bestimmen, wodurch als Anzahl der Doppeltangenten $2(n-2)(n-3)$ ermittelt wird. Besonders einfach, und sogar auf elementare Gleichungen führend, gestaltet sich das Problem bei der Lemniskate und Cardioide, nächst dem bei der allgemeinen Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

An dritter Stelle wird die Aufgabe behandelt: Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise zu finden, welche einem Kreissegmente, sich gegenseitig berührend, eingeschrieben sind. Es handelt sich hierbei um die Bestimmung des Ausdruckes

$$A = \frac{1}{\mathfrak{Cos}^4 \frac{\varphi}{2}} + \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{\mathfrak{Cos}^4 \left( \frac{\varphi}{2} - n\alpha \right)} + \frac{1}{\mathfrak{Cos}^4 \left( \frac{\varphi}{2} + n\alpha \right)} \right),$$

von welchem sogleich gezeigt wird, dass er convergent ist und den Charakter einer elliptischen Function hat. In der Herstellung dieser Function liegt der Schwerpunkt der Arbeit. Es wird zunächst die Hyperbelfunction $1 : \mathfrak{Cos}^4 \left( \frac{\varphi}{2} \mp \alpha \right)$ durch den gleichwerthigen Exponentialausdruck ersetzt, alsdann der Factor $1 : (1 + e^{\varphi - 2\alpha})^4$ nach der Binomialformel entwickelt und endlich die Summation für $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ ausgeführt. Der so entstandene Ausdruck zeigt bereits Aehnlichkeit mit der Reihenentwickelung der Function $\wp\, u$, und erweist sich schliesslich (bis auf einen Zahlfactor) als identisch mit $\wp''(\varphi + \varkappa i) - \wp(\varphi + \varkappa i) + \frac{\eta i}{\pi}$, worauf noch $\frac{\eta i}{\pi}$ durch $\vartheta$-Functionen ersetzt wird. Der Verfasser macht mit Recht darauf aufmerksam, dass hier der Zusammenhang einer geometrischen Aufgabe mit elliptischen Functionen ohne das Hilfsmittel der Integralrechnung hergestellt ist. — Während zuerst das kleinere der beiden durch eine Sehne entstehenden Segmente zu Grunde gelegt war, zeigt der Verfasser am Schlusse durch eine analog an dem grösseren geführte Untersuchung, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Fällen nicht besteht. — Im Ganzen charakterisirt sich die Arbeit als ein neuer sehr beachtenswerther Beitrag zur geometrischen Anwendung der elliptischen Functionen, deren Auftreten auf einem so elementaren Gebiete, wie das der vorliegenden Aufgabe, man sonst nicht zu erwarten pflegt.

Waren. V. Schlegel.

---

**Exposition géométrique des propriétés générales des courbes.** Par Ch. Ruchonnet (de Lausanne). Quatrième édition augmentée. Lausanne, 1880. 8°. 174 S. 6 Tafeln.

Das Werk des Herrn Ruchonnet, welches schon in vierter Auflage vorliegt, verfolgt eine ähnliche Tendenz, wie die Schrift des Herrn Schell: „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung" (Leipzig, 1859. 8°. 106 S.), und das ziemlich voluminöse Werk des Herrn Aoust: „Analyse infinitésimale des courbes dans l'éspace" (Paris, 1876. 8°. XX, 564 S.). Die Behandlungsweise des Gegenstandes ist eine rein geometrische, alle vorkommenden metrischen Relationen sind auf geometrische Betrachtungen basirt. Die Schrift des Herrn Ruchonnet

zerfällt in zwei Theile. Der erste behandelt auf S. 7—42 die ebenen Curven; in weit ausführlicherer Darstellung sind auf S. 43—172 die Curven doppelter Krümmung geometrisch untersucht. Da die Darstellungen der ebenen Curven und der Raumcurven eine Art Parallelismus zeigen, so soll nur die zweite Abtheilung in Betracht gezogen werden. Nach einigen Stellen des Buchs zu schliessen (S. 50 u. S. 96), scheinen Vorträge über die Geometrie des Raumes, welche Herr Bertrand 1856 und 1857 in Paris gehalten hat, nicht ohne Einfluss auf das Buch geblieben zu sein, der Herr Verfasser giebt immer mit grosser Sorgsamkeit alle Schriften an, denen Sätze oder Beweise entlehnt sind.

Der eigentlichen Theorie der Curven gehen einige Sätze über krumme Flächen voraus, die sich wesentlich auf windschiefe und specieller developpabele Flächen beziehen. Hierbei zeigt sich eine Eigenthümlichkeit in der Darstellung, welche hin und wieder im Buche auftritt, nach einem Theorem erst die nöthige Definition folgen zu lassen. So z. B. wird auf S. 44 gesagt, dass die berührende Ebene im Punkte $P$ einer windschiefen Fläche die Generatrix enthält, welche durch den Punkt $P$ geht. Mitten im Satz ist die Definition einer windschiefen Fläche in Klammern angegeben. Nach einigen Sätzen über die Tangente (S. 46—48) folgt die Definition der Schmiegungsebene. Diese beiden geometrischen Elemente in Verbindung mit dem Contingenzwinkel und dem Torsionswinkel sind auf S. 46—74 sehr ausführlich behandelt. Es finden sich dabei manche interessante metrische Relationen entwickelt. Auf S. 74—90 ist der Krümmungskreis betrachtet, sowie die Geraden, welche Hauptnormale und Binormale heissen. Bei Gelegenheit der Aufstellung des Winkels der ganzen Krümmung ist die von Lancret gegebene Deduction mitgetheilt. Die windschiefe Fläche der Hauptnormalen giebt S. 86 Veranlassung, allgemein die Strictionslinie einer windschiefen Fläche zu definiren. Auf S. 90—103 sind die windschiefen Flächen in einer weiteren Darstellung behandelt. Wenn auch nicht zu leugnen ist, dass die Lehre von den windschiefen Flächen erst durch Zuziehung der Theorie der Curven doppelter Krümmung sich in manchen Punkten sehr vereinfachen lässt, so möchte doch dem Referenten scheinen, dass eine kurze Darlegung der wesentlichsten Eigenschaften windschiefer Flächen einer grösseren Theorie der Raumcurven vorangehen muss, während der Herr Verfasser Definitionen und Sätze vorbringt, wo es ihm gerade gefällt. Auf S. 104 ist die geodätische Linie einer developpabeln Fläche dadurch bestimmt, dass sie durch Abwickelung der Fläche in eine Gerade übergeht. Es ist dieses bekanntlich ein specieller Fall eines schönen von Gauss aufgestellten Satzes. Bei dieser Gelegenheit ist zu bedauern, dass der Herr Verfasser keine allgemeinen geometrischen Betrachtungen über geodätische Linien mitgetheilt hat, was bei seiner klaren Darstellungsweise sehr erwünscht gewesen wäre. An die Betrachtungen über

windschiefe Flächen schliesst sich die Untersuchung der developpabeln Fläche an, welche von den Normalebenen einer Curve eingehüllt wird (Polarfläche, Surface polaire), woran sich Ausführungen über die Curve reihen, welche von den Mittelpunkten der osculatorischen Kreise gebildet wird. Auf S. 116—131 ist die Schmiegungskugel behandelt. Bei dieser Anordnung ist nicht zu vermeiden, dass zuweilen Sätze und Relationen unter etwas anderen Benennungen in doppelter Weise auftreten; so findet sich auf S. 109 eine Distanz bestimmt, die sich auf S. 119 einfach als Distanz der Mittelpunkte des osculatorischen Kreises und der osculatorischen Kugelfläche erweist. Die Evoluten basirt der Herr Verfasser auf einen einfachen Satz, welcher mit grosser Sorgfalt ausgeführt ist. Sehr vollständig sind die Evoluten, Evolventen und die rectificirende Fläche einer Raumcurve auf S. 131—154 behandelt. Abgesehen von einem Zusatz schliesst das Werk mit einer eingehenden Untersuchung der Schmiegungshelix. Auf S. 110 findet sich in einer Anmerkung „*Le théorème qu'exprime cette formule a été, je crois, donné pour la première fois par Jacobi en* 1835, *dans un article inséré au Journal de Crelle, tome XIV*". Die bemerkte Formel enthält die Entfernung zwischen den Mittelpunkten von Krümmungskreis und Schmiegungskugel. In dem Aufsatze von Jacobi: „Zur Theorie der Curven" (Crelle, Journal XIV, S. 56—63) ist die bemerkte Distanz S. 61 unter der Bezeichnung: „Länge der Krümmungsaxe $CK$" enthalten. Jacobi hatte versucht, die hauptsächlichsten Formeln aus der Curventheorie aufzustellen, wobei indess noch der Begriff des Torsionsradius fehlt. Bei dieser Gelegenheit möchte Referent auf eine Abhandlung von Jacobi aufmerksam machen, deren Inhalt in den Schriften über Raumcurven noch keine Beachtung gefunden hat. Die Abhandlung: „Demonstratio et amplificatio theorematis Gaussiani de quadratura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati (Crelle, Journal XVI, S. 344—350) hatte, ungeachtet einer geometrischen und analytischen Beweisführung, bei Clausen Bedenken an der Richtigkeit der gefundenen Resultate hervorgerufen. Man vergleiche hierüber Clausen: „Berichtigung eines von Jacobi aufgestellten Theorems" (Astronomische Nachrichten Nr. 457, Bd. XX S. 13—16, Altona 1843). In dem Aufsatze „Ueber einige merkwürdige Curventheoreme" (Astr. Nachr. Nr. 463, Bd. XX S. 115—120) wies Jacobi die unbegründeten Bedenken durch sehr einfache geometrische Betrachtungen zurück, die wohl verdienten, in die Curventheorie aufgenommen zu werden. In einer Anmerkung citirt der grosse Mathematiker einige sein Theorem betreffende Worte von Steiner. Der kleine Aufsatz von Steiner: „Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Curven doppelter Krümmung" (Berichte der k. preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1839, S. 76—80) scheint von geometrischen Schriftstellern wenig beachtet zu sein, obgleich derselbe eine Menge wichtiger

Sätze enthält. So findet man u. A.: „Rollt eine Ebene $E$, ohne zu gleiten, als Tangentialebene auf der Fläche $F$ (also eine der vorgenannten Normalebenen), so wird sie stets im nämlichen Punkte $P$ von der Curve $C$ geschnitten, oder so beschreibt ein bestimmter Punkt $P$ derselben die Curve $C$.“ Die von Steiner durch $F$ bezeichnete Fläche ist die Polarfläche der Curve $C$. Genau derselbe Satz findet sich S. 131 bei Herrn Ruchonnet und wird als Basis der Theorie der Evoluten genommen. „*Si l'on fait rouler le plan tangent sur la surface polaire, ce plan, qui dans son mouvement reste toujours normal à la courbe considérée est traversé par elle constamment au même point.*“ Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass Steiner seine Sätze ohne Beweis mitgetheilt hat. Schliesslich kann Referent nicht umhin, die Schrift des Herrn Ruchonnet in mehr wie einer Hinsicht der Beachtung der Mathematiker zu empfehlen. Die Darstellung ist sehr klar und präcise, das Werk enthält, soweit die Gegenstände behandelt sind, einen grossen Reichthum an Sätzen, die namentlich in Form metrischer Relationen erscheinen. Es sind weniger eine grössere Anzahl von Sätzen behandelt, die sich auf Raumcurven und windschiefe Flächen beziehen, als die mitgetheilten fundamentalen Theoreme ausführlich behandelt, was der Schrift nur zum Vortheil gereicht.

Göttingen. ENNEPER.

---

**Analytische Geometrie**, bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER, Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden. Breslau 1880/81, bei Eduard Trewendt. 380 S. [Encyklopädie der Naturwissenschaften, Bd. V, 1—380.]

Das Wort „Analytische Geometrie“ ist ein ungemein dehnsames. Wir haben in den Bänden dieser Zeitschrift über manche so benannte Schrift berichtet, welche eines Lobes würdig erschien, und deren Inhalt doch recht kurz bei einander war. Es waren das meistens Schulbücher, Bücher zur Einleitung in die analytische Geometrie, die sich der Aufgabe entschlagen durften, ihre Leser mit denjenigen Methoden bekannt zu machen, welche insbesondere seit 1828, dem Erscheinungsjahre von Plücker's Analytisch-geometrischen Entwickelungen, den hervorragenden Geometern gedient haben, Untersuchungen anzustellen, deren Gegenstände einer nur um Weniges früher gelegenen Zeit so gut wie unbekannt waren. Wer gerade diese modernen Methoden in Anwendung auf die analytische Geometrie der Ebene kennen lernen will, den verweist man auf die durch vollendete Eleganz sich auszeichnenden kürzer gefassten Bücher von Hesse oder Joachimsthal, auf das nicht minder elegante, vollständige Werk über Kegelschnitte von Salmon, dessen Bearbeitung in deutscher Sprache durch Fiedler in der vierten Auflage bereits die

Stärke von 700 Seiten erreicht hat, welche von der fünften Auflage, an deren Erscheinen nicht zu zweifeln ist, noch überboten werden dürfte. Herr Heger hatte sonach für die Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, deren Behandlung auf verhältnissmässig geringfügigem Raume ihm übertragen worden ist, eine reiche Auswahl von Musterwerken. Er durfte nicht ausser Augen lassen, dass die Voraussetzung eines Handbuches der Mathematik — denn als Theil eines solchen erschien diese analytische Geometrie in der Encyklopädie der Naturwissenschaften — darin besteht, dass dem Leser kein anderes mathematisches Werk zu Händen sei, dass also zwar nicht alle Feinheiten von Sonderuntersuchungen Aufnahme zu finden haben, aber doch auch nichts Wesentliches, an Ergebnissen wie an Methoden, fehlen darf. Er liess sich denn auch von diesem uns richtig erscheinenden Gedanken leiten und schloss sich unter den nothwendigen Kürzungen an die Werke an, welche wir als die moderne analytische Geometrie enthaltend bezeichnen dürfen. Die symbolische Bezeichnung von Gleichungspolynomen durch einen einfachen Buchstaben, die Anwendung von Determinanten, die neben einander stattfindende Benutzung von Punkt- und Liniencoordinaten, die Einführung homogener Coordinaten treten der Reihe nach auf, und ihre Wirkungsweise bewährt sich wie an den gewöhnlichen Eigenschaften der Geraden und der Kegelschnitte, so auch an den projectivischen Sätzen über diese ebenen Gebilde und über Curven dritten Grades. An die analytische Geometrie der Ebene schliesst sich die des Raumes unmittelbar an. Hier war eine grosse Sparsamkeit in der Auswahl aus dem überreichen Stoffe noch mehr geboten und doch zugleich schwieriger. Wenn in der analytischen Geometrie der Ebene recht viel ohne Infinitesimalrechnung oder mit verkleideter Infinitesimalrechnung geleistet werden kann, so ist es in der analytischen Geometrie kaum möglich, der neueren Untersuchungen zu gedenken, ohne den Begriff und die Bezeichnung von Differentialquotienten zu benutzen. Man könnte wohl Zweifel aussprechen, ob es zweckmässig sei, überhaupt mehr als nur die Lehre von dem Punkte, der Geraden und der Ebene im Raume zu behandeln, bevor die Differentialrechnung dem Leser die fast auf Schritt und Tritt unentbehrlichen Werkzeuge geliefert hat. Herr Heger ist dieser Ansicht nicht. Er hat nicht nur, was auch unserer Meinung nach thunlich ist, die Ausdehnung der früheren Methoden zu Punkt- und Ebenencoordinaten, sowie zu homogenen Raumcoordinaten vollzogen und projectivische Eigenschaften der vorgenannten einfachen Raumgebilde entwickelt, er hat auch die Lehre von den Flächen zweiter Ordnung, von den Raumcurven dritter Ordnung, von den abwickelbaren Flächen dritter Ordnung so vollständig geliefert, als es mit ausschliesslich elementaren Hilfsmitteln überhaupt thunlich war. Hat er mit dieser Ausdehnung des Stoffes Recht gehabt, was wir, wie gesagt, nicht zu behaupten im Stande sind,

so ist die Art, wie er seiner Aufgabe gerecht wurde, gewiss nur rühmend anzuerkennen, und wir sind überzeugt, dass der Verleger keinen Fehlgriff thun würde, falls er die Heger'sche Analytische Geometrie auch als besonders verkäufliches Buch heften liesse, welches manchen Abnehmer bei Solchen finden möchte, die sich zur Anschaffung der ganzen Encyklopädie der Naturwissenschaften, beziehungsweise deren mathematischer Abtheilung, nicht entschliessen können. Bei einer solchen Sonderabgabe wäre es vielleicht auch möglich, einen Neudruck des ersten Druckbogens zu veranstalten, der sich durch zahlreiche sinnentstellende Druckfehler unvortheilhaft von den folgenden Bogen unterscheidet.

Cantor.

---

**Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen", und verwandter merkwürdiger Probleme**, von Dr. Oscar Simony, a. ö. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur, Privatdocent an der Wiener Universität. III. erweiterte Auflage (mit 42 Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln). Wien, Verlag von Gerold & Comp. 1881.

Referent hat diese kleine Schrift mit um so grösserem Interesse gelesen, als durch eigenthümliches Zusammentreffen gerade zur Zeit, als der Wunsch ausgesprochen wurde, wir möchten über den Inhalt uns äussern, der Gegenstand in dem Heidelberger Mathematischen Vereine experimentell erörtert wurde. Herr Georg Wallenberg aus Danzig hat mittels steifer Papierbänder, die an den Enden gummirt waren, die wichtigsten Simony'schen Versuche zur Anschauung gebracht und uns so unser Urtheil wesentlich erleichtert, während ohne die Fingerfertigkeit dieses jungen Studirenden der Mathematik unser persönlicher Mangel an Raumphantasie auch trotz der vortrefflichen Abbildungen mit den Ergebnissen sich nicht genügend vertraut zu machen gewusst hätte. Vielleicht ist es auch anderen Lesern ähnlich gegangen und dadurch eine Befangenheit gegen Dinge erzeugt worden, die sie sich nicht vorzustellen vermochten.

Es handelt sich um die Aufgabe: in ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen, eine in wissenschaftlichen Kreisen übel berüchtigte Aufgabe, weil sie in den von Herrn Slade gegebenen Vorstellungen durch *salva venia* Geisterhände gelöst worden sein soll. Mit Geistern hat aber die uns vorliegende Abhandlung Nichts zu thun, so wenig, als mit einer objectiv vorhandenen vierten Dimension des Raumes. Geistreich ist sie nur im guten Sinne des Wortes. Herr Simony zeigt nämlich mittels sehr sinnreicher Versuche, dass ein vor dem Schlusse einer ungeraden Anzahl von Torsionen unterworfenes Band eine oder mehrere Verschlingungen darbietet, sobald man es zwar nicht der Quere,

aber der Länge nach durchschneidet. Die Anzahl der Torsionen lässt sich aus den erzeugten Verschlingungen gewissermassen ablesen. Herr Simony beruft sich mit Recht auf Listing's Topologie, als einer frühzeitig erschienenen Vorläuferin dieser Untersuchungen. Verwandt sind denselben auch zahlentheoretisch-geometrische Betrachtungen, welche insbesondere einige französische Mathematiker in den letzten Jahren angestellt haben und über welche z. B. Herr Ed. Lucas in einer italienisch geschriebenen Abhandlung „Principii fondamentali della geometria dei tessuti" in dem sechsten Jahrgange der zu Turin erscheinenden Monatsschrift „L'Ingegneria Civile e le Arti Industriali" berichtet hat.

CANTOR.

---

**La science de l'espace** par LUCIEN BUYS, capitaine du génie. Bruxelles 1881, Librairie Européenne C. Muquardt Merzbach & Falk. 608 S.

Wir haben seiner Zeit in kurzen Worten über die „Science de la quantité" desselben Verfassers berichtet, als einem Werke, dessen Hauptmerkmal darin zu erkennen sei, dass complexe Grössen grundsätzlich nicht verkommen, weil sie nach des Verfassers muthmasslich von keinem anderen Mathematiker getheilter Meinung nur nutzlose Erzeugnisse einer ganz subjectiven Einbildungskraft darstellen. Heute liegt uns die erste, 38 Druckbogen starke Abtheilung der Raumwissenschaft vor, welcher nach der Absicht des Verfassers noch zwei weitere Abtheilungen nachfolgen sollen. Wie der gegenwärtige Band Linien, Oberflächen und Körper in elementarer Weise nach Form und Grösse betrachtend den Elementen der Geometrie und der Trigonometrie der verbreiteten Lehrbücher entsprechen soll, so ist die Absicht des Verfassers, in einer zweiten Abtheilung der analytischen, in einer dritten der descriptiven Geometrie sich zuzuwenden. Erstere wird es mit dem allgemeinen Studium von Linien, Oberflächen und Körpern zu thun haben, gegründet auf die Messung der Entfernung ihrer Punkte von gegebenen festen Raumgebilden; letztere wird ihre Aufgabe darin sehen, Eigenschaften von Linien und Oberflächen des Raumes aus ihren ebenen Projectionen kennen zu lernen. Man sieht, es ist ein weitangelegter Plan, den Herr Buys gefasst hat. Weniger deutlich ist uns die Absicht, welche seine Veröffentlichungen leitet. Will er dem schon fertigen Mathematiker zeigen, welche Anordnung der Wissenschaft die streng richtige wäre, oder will er mittels seiner Schriften selbst Mathematiker bilden? Der grosse Umfang scheint die erstere Auffassung auszuschliessen, aber eine Willensäusserung des Verfassers muss uns, wenn sie vorhanden sein sollte, entgangen sein. Im Zweifel nehmen wir an, der Verfasser sei zum Mindesten der Meinung, an seinen Werken könne ein Leser

sich zum Mathematiker ausbilden, und von diesem Gesichtspunkte aus beurtheilen wir das uns vorliegende Buch.

Es ist eine missliche Sache, in einem ersten Bande Lücken nachweisen zu wollen. Der Verfasser kann regelmässig erwidern, er habe das Vermisste im zweiten oder dritten Bande nachholen wollen. Wir nehmen also diese Einrede vorweg und bemerken nur, dass demnach den folgenden Bänden angehören muss die zusammenhängende Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks, die Lehre von der harmonischen Theilung, die Erklärung der Archimedischen Körper, der Euler'sche Satz über Vielflächner u. s. w., welche im ersten Bande nicht mit einem Buchstaben Erwähnung finden, während gegenwärtig kaum eine bessere Schulgeometrie diese Gegenstände vermissen lässt.

Schwerer wird die Vertheidigung des wirklich Gebotenen sein, wenn von Seiten folgerichtiger Strenge ein Sturm geführt wird, und dazu fehlt es keineswegs an geeigneten Angriffspunkten.

S. 14—15. Eine Ebene entsteht aus den Punkten sämmtlicher Geraden, welche zwei beliebige Punkte zweier einander schneidender Geraden verbinden. Wir lassen die Definition gelten. Nun heisst es weiter: Eine Gerade, welche irgend zwei Punkte dieser Oberfläche verbindet, gehört ganz der Oberfläche an. Wir lassen diese Fortsetzung nicht gelten. Sie muss erst bewiesen werden!

S. 26. Das Zusammenfallen zweier Dreiecke, deren Seiten einzeln einander gleich sind, ist evident. Wirklich? Dem Verfasser scheinen doch selbst Zweifel an dieser Ersichtlichkeit aufgestossen zu sein, denn er lässt einen Beweis nachfolgen; aber dann musste der Vordersatz einfach gestrichen werden, welcher geeignet ist, den Anfänger zu verführen, auch sonst Sätze als ersichtlich anzunehmen, die vielleicht gar nicht wahr sind.

S. 32. Die Verbindungslinien der Endpunkte der Grundlinie eines Dreiecks mit einem Punkte im Innern des Dreiecks haben eine kleinere Summe, als die sie umschliessenden Dreiecksseiten. Das sei ersichtlich!

S. 45. Ein Vieleck ist regelmässig, falls alle Seiten und Winkel unter einander gleich sind. Wenn aber nun der Schüler fragen würde, ob es auch solche Vielecke giebt?

S. 57. Nachdem der Begriff der Krümmung in der Weise, wie man ihn in der Differentialrechnung zu entwickeln pflegt, aus dem Winkel auf einander folgender Berührungslinien hergeleitet ist, wird der Kreis als Linie von überall gleicher Krümmung definirt. Das ist eine neue, aber sehr interessante Einführung dieser krummen Linie. Aus ihr folgt die Existenz eines Mittelpunktes, wie S. 54 bewiesen wird. Nun soll aber auch bewiesen werden, dass umgekehrt jede Linie, deren Punkte gleich weit von einem gegebenen Punkte abstehen, ein Kreis sein muss. Zu diesem Zwecke werden an die betreffende Curve Berührungslinien

gelegt und es sei evident, dass die Berührungspunkte dem festen Punkte näher liegen, als irgend andere Punkte der Berührungslinie!

S. 68. Drei Winkelpaare $AA'$, $BB'$, $CC$ hängen nothwendig durch $A=A'$ oder $A+A'=180^0$, $B=B'$ oder $B+B'=180^0$, $C=C'$ oder $C+C'=180^0$ unter einander zusammen. Herr Buys meint, da gebe es nur drei denkbare Fälle: 1. $A+A'=180^0$, $B+B'=180^0$, $C+C'=180^0$; 2. $A=A'$, $B+B'=180^0$, $C+C'=180^0$; 3. $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$. Wo bleibt der Fall 4: $A=A'$, $B=B'$, $C+C'=180^0$?

Wir wollen nicht eine uns und unsere Leser ermüdende Vollständigkeit dieses Sündenregisters anstreben. Wir heben nur noch eine unbewiesene Behauptung hervor. S. 300—301 ist von der Krümmung der Oberflächen die Rede und ohne Weiteres der Satz ausgesprochen, der Ort der Berührungslinien an alle durch einen Punkt einer Oberfläche auf der Oberfläche gezogenen Curven in dem gemeinsamen Punkte sei eine Ebene. So darf man die Augenscheinlichkeit doch nicht missbrauchen!

Wir haben mit diesen Ausstellungen im Einzelnen das Urtheil begründen wollen, welches wir nun zum Schlusse aussprechen. Das Buch besitzt, namentlich durch die Art, wie der Kreis in die Betrachtungsreihe eingeführt ist, manche nicht uninteressante Eigenthümlichkeit, wimmelt aber derartig von Stellen, die der heute mit Recht verlangten Strenge der Darstellung nicht entfernt genügen, dass man auch ihm, wenn auch vielleicht nicht ganz in dem Maasse, wie der „Science de la quantité" den Vorwurf nicht wird ersparen können, eine anachronistische Erscheinung zu bieten.

Cantor.

---

B. Zuckermann, **Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung im Talmud.** Beilage zum Jahresbericht des jüdisch-theologischen Seminars Fränkel'scher Stiftung. Breslau, am Gedächtnisstage des Stifters, den 27. Januar 1882. 68 S.

Wir haben gewiss kaum nöthig, den regelmässigen Lesern unserer Zeitschrift ins Gedächtniss zurückzurufen, dass wir schon einmal 1878 (Bd. XXIII, Histor.-literar. Abtheil. S. 88—92) über talmudisch-mathematische Forschungen des gleichnamigen Verfassers berichten durften. Die heute uns vorliegende Untersuchung ist chronologischen Inhalts und, wenn auch in mancher Hinsicht voller Interesse, doch für den Mathematiker, selbst für den, welcher die Geschichte seiner Wissenschaft mit Vorliebe studirt, ohne sonderliche Ausbeute. Handelt es sich doch in diesem Schriftchen nicht um die schon entwickelte jüdische Zeitrechnung, sondern um die Periode jüdischer Geschichte, während welcher den Schwierigkeiten der Vermittelung zwischen dem Mondjahre von 12 Monaten, die je 29 oder 30 Tage in sich schlossen, und dem Sonnenjahre

rein empirisch begegnet wurde. Durch zweier Zeugen Mund wurde festgestellt, ob die neue Mondsichel an diesem oder jenem Abende zuerst gesehen worden war, ob also an diesem oder jenem Tage der alte Monat abschliessen, der neue beginnen musste. So erwuchs alljährlich zwischen den beiläufig 354 Tagen des Kalenderjahres und den etwa 365¼ Tagen, nach welchen die Jahreszeiten wiederkehrten, ein Unterschied, welcher in drei Jahren selbst über einen Monat betrug und die Einschaltung eines Schaltmonats zur Nothwendigkeit machte. In der That zur Nothwendigkeit, denn die an gewissen Festen, welche innerhalb eines gegebenen Kalendermonats an fest bestimmten Tagen (wie Ostern am 14. Nissan) lagen, vorgeschriebenen religiösen Handlungen, Opfer von junger Feldfrucht u. dergl. konnten nicht vollzogen werden, wenn der Monat selbst die Jahreszeiten durchwandelte. Aus landwirthschaftlich-religiösen Gründen wurden also Schaltjahre gebildet, und wenn Herr Zuckermann auch wahrscheinlich zu machen sucht, dass daneben bereits in früher Zeit eine Berechnung irgendwelcher Art (S. 54) stattgefunden haben muss, die freilich mehr die Monatslänge, als die Ausgleichung der beiden Jahresgattungen betroffen zu haben scheint, so sind das doch so schwankend gehaltene Behauptungen, dass der Mathematiker ihnen, wie wir schon andeuteten, zwar Geschmack, aber nicht gar viel Belehrung abgewinnen kann.

CANTOR.

---

**Proklos über die Definitionen bei Euklid.** 1. Theil. Definition 1—7. Mit 2 Tafeln Abbildungen. Von Prof. Dr. LUDWIG MAJER. Programm des königl. Gymnasiums in Stuttgart zum Schlusse des Schuljahres 1880/81. 4°. 28 S.

Wir haben 1876 im XXI. Bande dieser Zeitschrift (hist.-literar. Abtheilung S. 181—183) ein Tübinger Schulprogramm des gleichen Verfassers zu besprechen das Vergnügen gehabt. Damals beschäftigte sich Herr Majer mit den Auseinandersetzungen des Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid; heute giebt er uns eine auszugsweise Uebersetzung und Erklärung dessen, was Proklos über die ersten sieben Definitionen Euklid's zu sagen weiss, uns als nächste Gabe eine ähnliche Bearbeitung des Proklos'schen Commentars zu den übrigen Definitionen im I. Buche der Elemente in Aussicht stellend. „Wir hoffen so, mit der Zeit das leider unvollendet auf uns gekommene Werk des Neuplatonikers allen Denen vollständig zu erschliessen, die das Original zu lesen nicht im Stande sind oder nicht Zeit und Lust dazu haben." Wir nehmen gern Act von dieser Zusage, mit welcher der Verfasser sein diesjähriges Programm abschliesst, möchten aber unsererseits den Wunsch daran knüpfen, die Fortsetzungen in etwas beschleunigterer Aufeinander-

folge erscheinen zu sehen. Zur Veröffentlichung in Bruchstücken nach je fünfjähriger Pause reicht ein Menschenleben kaum aus!

Nächst dieser auf die Zukunft berechneten Mahnung haben wir die angenehme Pflicht, unsere rückhaltlose Anerkennung der Art und Weise auszusprechen, in welcher Herr Majer als Uebersetzer und Erklärer sowohl dem griechischen Originale, als dem heutigen Leser gerecht zu werden versteht. Die vierte Definition z. B., um nur eine Einzelheit hervorzuheben, war bisher oft übersetzt, nie aber, wie uns nach Majer's Uebersetzung klar wird, verstanden worden. Soll die gerade Linie *ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις* liegen, so muss die Abhängigkeit des Dativs *τοῖς σημείοις* von *ἐξ ἴσου* in der Uebersetzung hervortreten, es muss heissen: „Die Gerade liegt in gleicher Weise da, wie die Punkte auf ihr, d. h. mit irgendwelchen Punkten auf ihr, also auch schon mit zweien ist die Gerade gegeben“ (S. 27). Von feinem Verständnisse zeugt auch die Einschaltung, welche der Uebersetzer S. 11 Z. 24—26 in den Text einzufügen wusste. Unbegreiflich dagegen ist uns sein Skrupel S. 25 bezüglich des Alters der von Eudoxus erfundenen Hippopede gegenüber den von Perseus herrührenden spirischen Schnitten. Der schleifenartige spirische Schnitt ist ja keine Hippopede, sondern gleicht ihr nur — *ἐοικυῖα τῇ τοῦ ἵππου πέδῃ* — und kann sehr wohl um einige Jahrhunderte nach der ersteren Curve bemerkt worden sein, wie er selbst im Datum um mehr als anderthalb Jahrtausende der jüngeren an Gestalt beiden vergleichbaren Lemniscate vorausging.

Cantor.

---

**Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.** E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg, Dr. phil. Leipzig, bei B. G. Teubner. Vol. I. 1880 (XII, 499). Vol. II. 1881 (VIII, 468). Vol. III. 1881 (LXXXIX, 525).

Georg Valla, ein gelehrter italienischer Philologe, welcher 1499 starb, besass eine Handschrift der Werke Archimed's, welcher von Denen, die sie noch sahen, hohes Alter nachgerühmt worden ist. Abschriften dieses Codex sind nach den in der Vorrede zum III. Bande vorliegender Ausgabe enthaltenen eingehenden Untersuchungen des Herrn Heiberg einige Pariser Codices (*B*, *C*) und der berühmte Florentiner Codex (*F*), welcher demnach nicht, wie man bisher annahm, dem XIII. S. angehören würde, auch nicht der ehemals Valla'sche Codex selbst wäre, wie Herr Heiberg in seinen Quaestiones Archimedeae S. 125 flgg. noch vermuthete, sondern dessen Entstehung etwa auf 1491 oder kurz darauf zu bestimmen wäre. Sei dem, wie da wolle, und möge man an einem Irrthum von $2\frac{1}{2}$ Jahrhunderten in der älteren Zeitbestimmung von *F* Anstoss nehmen oder nicht, jedenfalls sind *F*, *B*, *C* Handschriften der gleichen Familie und unter ihnen *F* am sorgfältigsten hergestellt, sogar unter

Festhaltung weit älterer Buchstabenformen, als das Jahr 1500 zu benutzen pflegte, die vielmehr auf das IX. bis X. S. zurückverweisen sollen, ein Umstand, der von Fachleuten vielleicht gegen die Heiberg'sche Annahme so später Entstehung verwerthet werden möchte. Auf dieselbe Handschriftenfamilie weisen alle Ausgaben und Uebersetzungen des Archimed zurück, letztere anfangend mit der lateinischen Bearbeitung, welche Jacob von Cremona um 1450 für Papst Nicolaus V. anfertigte, und die durch Tartaglia 1543 im Drucke veröffentlichte Uebersetzung keineswegs ausschliessend. Man möchte zwar gegen diese letztere Behauptung einwenden, in den Valla'schen Texten, wie wir alle jene Codices kurz nennen wollen, fehlten bekanntlich die zwei Bücher von den schwimmenden Körpern, während aus Tartaglia's Papieren auch sie in lateinischer Sprache erschienen, gegenwärtig die einzige ältere Form, welche, von einem kleinen griechischen Bruchstücke abgesehen, als Original dienen muss. Herr Heiberg räumt diese Einwendung dadurch aus dem Wege, dass er annimmt, Tartaglia habe jene beiden Bücher selbst auch nie griechisch gesehen, sondern eine alte lateinische Uebersetzung, deren Verfasser durchaus unbekannt ist, abgeschrieben. Er folgert diese Thatsache aus der wesentlich andern Latinität dieser Bücher, als der übrigen bei Tartaglia, und wer Tartaglia's Persönlichkeit betrachtet, ohne sich ausschliesslich auf seine selbstbiographischen Redensarten zu verlassen, wird eine Unmöglichkeit in dieser freilich eine Anklage in sich schliessenden Vermuthung nicht finden. Handschriften anderer Entstehung hat auch Herr Heiberg bei dieser neuen Ausgabe nicht benutzen können, aber er hat mit der doppelten Sachkenntniss, welche wir ihm früher schon nachzurühmen wussten, als Philologe und Geometer Handschriften, Ausgaben und Uebersetzungen benutzt und uns nicht blos Archimed's Schriften, sondern auch die vorhandenen Erläuterungen des Eutokius in handlicher Form mit einander gegenüberstehenden griechischen und lateinischen Texten leicht zugänglich gemacht. Mag auch von dem deutschen Benutzer Nizze's noch immer vortreffliche Uebersetzung des Archimed neben dem Originale mitbenutzt werden, das Original ist darum nicht entbehrlich, und für die Erläuterungen des Eutokius vollends blieb man auf die unförmige, riesige Archimedausgabe von Torelli angewiesen, so dass in dieser Beziehung vollauf ein Bedürfniss zu befriedigen war. Nicht minder wird der Benutzer der neuen Ausgabe in drei Bänden des bekannten Formates der Bibliotheca Teubneriana Heiberg für den fortlaufenden Commentar Dank wissen, als welchen die zahlreichen, unten an den Seiten angebrachten Noten sich erweisen. War auch, insbesondere durch Nizze, in dieser Beziehung vielfach und gut vorgearbeitet, so hat doch Herr Heiberg noch zahlreiche eigene Zuthaten beigefügt, namentlich vielfache Verweisungen auf andere griechische Mathematiker, als z. B. Euklid,

Apollonius, Pappus, Verweisungen, welche das Verständniss des Wortlautes nicht wenig zu erleichtern sich eignen, da bei dem von sonstigen Schriftstellern abweichenden Sprachgebrauche der Mathematiker gewöhnliche Wörterbücher nicht selten im Stiche lassen. Damit ist zugleich auch die Nothwendigkeit eines Wortindex gegeben, und ein solches hat Herr Heiberg seinem III. Bande beigefügt, das Wortindex als Muster nehmend, welches eine Zierde der Hultsch'schen Pappus-Ausgabe bildet. Ueberhaupt war es jene klassische Ausgabe, der Herr Heiberg ausgesprochenermassen nacheiferte, und wenn wir auch glaubten, gegen beide Gelehrten, gegen den längst berühmten erprobten Meister, wie gegen den strebsamen, sich rasch aufschwingenden Jünger der Wissenschaft, ein Unrecht zu begehen, falls wir behaupteten, die Archimed-Ausgabe stehe der des Pappus schon ganz gleich, so können wir doch mit gutem Gewissen es aussprechen, dass wir künftigen Ausgaben griechischer Mathematiker — z. B. des Euklides — durch Herrn Heiberg jetzt mit gesteigerter Zuversicht entgegensehen.

CANTOR.

---

**Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti.** Eine mathematisch-historische Studie von Prof. Dr. HERMANN WEISSENBORN. Halle a. S. Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1882.

Vierhundert Jahre sind verflossen, seit im Mai 1482 die erste Druckausgabe der Campano'schen Uebersetzung der Euklid'schen Elemente aus dem Arabischen in das Lateinische durch Erhard Ratdolt vollendet wurde. Herr Weissenborn hat diese Säcularerinnerung durch eine interessante Studie gefeiert. Er schildert uns die Schicksale, welche die oben genannte Campano'sche Uebersetzung im Drucke erfuhr. Er zeigt, wie Zamberti (ein Venetianer, welcher im Jahre 1539 mindestens 66 Jahre alt war) eine Gegenausgabe veranstaltete, deren lateinischen Text er aus dem Griechischen übersetzte; wie der bekannte Freund des Lionardo da Vinci, Luca Paciolo, der Uebersetzung des Campano wieder den Vorzug gab und sie seiner Ausgabe zu Grunde legte; wie Jaques Lefèvre von Estaples beide Uebersetzungen vergleichsweise abdrucken liess, eine Sitte, welcher noch andere Herausgeber treu blieben, selbst nachdem der griechische Urtext 1533 in Basel erschienen war. Herr Weissenborn giebt bibliographisch genaue Schilderungen dieser verschiedenen, meistens recht selten gewordenen Drucke und zieht aus ihren Eigenthümlichkeiten Folgerungen, welche allgemeineres Interesse besitzen, als etwa nur für den Freund alter Ausgaben. Wir heben als theilweise schon früher festgestellt, aber neu bekräftigt hervor: 1. dass Euklid, der Verfasser der Elemente, bis in das XV. Jahrhundert hinein mit dem Philosophen aus Megara verwechselt zu werden pflegte; 2. dass

Euklid nur als Verfasser der Lehrsätze galt, während man die Beweise von Theon von Alexandria herrühren liess. Dazu hat Herr Weissenborn noch weiter behauptet und, wie uns scheint, bewiesen, dass 3. schon 1482 der Umstand nahezu vergessen war, dass Campano nicht unmittelbar aus dem Griechischen, sondern aus dem Arabischen übersetzte, eine Bemerkung, welche ihre Wichtigkeit darin besitzt, dass sie die Bitterkeit der Angriffe erklärt, welche die humanistisch geschulten Kenner des Urtextes gegen Campano's Irrthümer richteten, Angriffe, die eigentlich an die Adresse des Arabers zu richten waren, welcher Campano's Missverständnisse ganz oder doch zum grossen Theile verschuldet hatte.

Wir können uns über weitere Einzelheiten, welche die kleine, $4\frac{1}{4}$ Druckbogen starke Abhandlung enthält, nicht weiter verbreiten, sondern begnügen uns damit, im Allgemeinen unser Einverständniss auszusprechen, etwa mit Ausnahme einer Stelle (S. 42), wo Herr Weissenborn, wie wir glauben, einen Satz des Luca Paciolo missverstanden und darauf ihn, den verdienten Minoriten, eines Irrthums beschuldigt hat, der ihm nicht zur Last fällt.

Cantor.

---

**Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galileo** per Antonio Favaro. Venezia 1881. 51 S.

Ist die sogenannte vollständige und correcte Ausgabe der Werke des Galilei, welche unter der Aufsicht von Alberi im Laufe der vierziger Jahre unseres Jahrhunderts erschien, berechtigt, sich jene schmückenden Bezeichnungen beizulegen? Die Verneinung dieser Frage steht unter den Männern des Faches vollkommen fest. Lohnt es sich, eine wirklich vollständige, wirklich correcte Ausgabe zu veranstalten? Wir würden fürchten, die Mahnen des grossen Gelehrten des XVII. Jahrhunderts zu beleidigen, wenn wir diese Frage als zweifelhafter Beantwortung fähig ansähen. Zweifelhaft ist in unseren Augen nur Eines: ob nämlich gegenwärtig schon der Moment gekommen ist, die Wünsche zu befriedigen, welche Herr Favaro ausspricht und für welche er der Zustimmung Aller gewiss sein kann, welche für die Geschichte der Wissenschaften Interesse empfinden.

Gerade die letzten 18 Jahre — seit der dritten Säcularfeier von Galilei's Geburt im Februar 1864 — haben die Galileiforschung in kräftigeren Aufschwung gebracht. Die politisch-kirchlichen Kämpfe unserer Zeit haben vielleicht am meisten dazu beigetragen und haben insbesondere Veranlassung gegeben, immer und immer wieder auf den Inquisitionsprocess gegen Galilei zurückzukommen. Aber zugleich mit Schriftstücken, welche auf das Jahr 1633 sich beziehen, kamen andere in ungeahnter Menge aus dem Staube der Archive hervor, und Herr Favaro gehört neben Herrn Campori zu den Männern, welche

am eifrigsten und erfolgreichsten der Nachstüberungsmühe sich unterzogen.

Darf dieses Suchen als beendigt betrachtet werden? Nur in diesem Falle halten wir es für richtig, mehr als den Gedanken einer neuen Gesammtausgabe von Galilei's Werken auszusprechen. Freilich werden die Vorbereitungen zum Drucke unter allen Umständen geraume Zeit in Anspruch nehmen, und inzwischen kann noch Manches geschehen. Aber für einzelne unentbehrliche Forschungen handelt es sich auch noch darum, ob sie zur Zeit möglich sind, und insbesondere der Besitzer von Ashburnham ist ein zum Voraus unberechenbarer Factor, ohne den die Rechnung selbst nun einmal nicht zum Stimmen gebracht werden kann. Wir meinen, um uns deutlicher auszudrücken, die Benutzung der in Ashburnham befindlichen Papiere sei unerlässliche Vorbedingung für die wirkliche Inangriffnahme der neuen Ausgabe.

Sollte es erst einmal so weit sein, so wird die Auswahl des Mannes, der die Ausgabe zu leiten hat, nicht schwierig sein. Die Nothwendigkeit, dass es ein Italiener sei, dass er mit Galilei's Arbeiten hinlänglich vertraut sei, dass geschichtliche Arbeiten ihm geläufig seien, schliesst so Viele von dem Wettstreite aus, dass diejenige Behörde, welche die eigentliche Bestimmung zu treffen haben wird, kaum mehr nöthig haben dürfte, wirklich zu wählen, sie wird höchstens bestätigen.

Die Vorschläge von Herrn Favaro für die Anordnung der neuen Ausgabe billigen wir mit einer einzigen Ausnahme. Die Schriften der Gegner Galilei's auseinanderzureissen und in seinen eigenen Schriften da und dort einzuschalten, wo sie ihre Widerlegung finden, halten wir für ein an diesen Gegnern geübtes Unrecht. Die chronologische Reihenfolge scheint uns hier gleichfalls Pflicht und ebenso die getreue Wiedergabe. Ob die Gegner in Allem und Jedem Unrecht hatten, ob Galilei alle ihre Einwürfe auch mit den richtigen Gegengründen widerlegte, bei dem damaligen Stande der Wissenschaft widerlegen konnte, darüber kann nur der parteilos unveränderte Abdruck von Schrift und Gegenschrift in richtiger Zeitfolge ein Urtheil verstatten.

CANTOR.

---

**Magister Georg Samuel Dörffel.** Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie im XVII. Jahrhundert von CURT REINHARDT, Gymnasialoberlehrer zu Plauen i. V. (Sonderabdruck aus dem Jahresbericht des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. für 1881.) 77 S.

Das Programm der Annen-Realschule zu Dresden vom Jahre 1870 enthält eine wissenschaftliche Beilage von Gust. Hoffmann über die Entdeckung der wahren Bahnform der Cometen. Hevel ist in ihr als der Erste genannt, welcher 1668 in den Cometenbahnen Parabeln erkannte und stillschweigend annahm, dass deren Brennpunkt von der Sonne ein-

genommen werde. Dörffel habe sodann 13 Jahre später, 1681, die letztere Behauptung mit klaren Worten ausgesprochen. Newton's Verdienst endlich ist es, die Cometen als Weltkörper erkannt zu haben, die ihre Bahnen nicht minder als die Planeten infolge des Gravitationsgesetzes durchlaufen. Die Hoffmann'sche Abhandlung ist als Quellenschrift in Wolf's vortrefflicher Geschichte der Astronomie (S. 411) benutzt, wenn auch dort nur davon gesprochen wird, dass Hevel die Concavität und wahrscheinliche Paraboloität der Cometenbahnen erkannte, während Dörffel in glücklichster Weise ergänzte, dass wenigstens bei dem Cometen von 1680 der Brennpunkt der Bahn in die Sonne falle. Brückner, der Verfasser von Dörffel's kurzgedrängter Charakteristik in der Allgemeinen deutschen Biographie (V, 346), sagt nur, dass von ihm die Behauptung herrühre, dass die Cometen sich in sehr excentrischen parabolischen Bahnen um die Sonne bewegen; Newton habe ein Jahr später dasselbe ausgesprochen und die Gesetze jener Bewegung aufgestellt; Hevel's geschieht keine Erwähnung. Herr Reinhardt sucht nun in der vorliegenden Abhandlung auf Grund eingehenden Quellenstudiums festzustellen, wie weit Hevel und wie weit Dörffel als Vorgänger Newton's anzuerkennen seien, und kommt dabei zu Ergebnissen, die von den Hoffmann'schen einigermassen abweichen. Hevel (S. 32) habe gefunden: „Alle Cometen bewegen sich in krummlinigen Bahnen, die von der geraden Linie nur sehr wenig abweichen und deren concave Seite sich gegen die Sonne und die Ekliptik richtet. Nicht mehr und nicht weniger. Niemals hat er die Art dieser Krümmung aus den Beobachtungen zu bestimmen gesucht, noch weniger sich mit der Ebene der krummlinigen Cometenbahn beschäftigt.“ Freilich wird (S. 34) zugegeben, dass Hevel, von unrichtiger Begründung ausgehend, die Meinung geäussert habe, jene gekrümmte Cometenbahn sei meistens einer Parabel, unter Umständen einer Hyperbel ähnlich, könne auch genau geradlinig werden. Dörffel dagegen zeichnete seinen Beobachtungen entsprechend die Bahn des Cometen von 1680 und kam so zu seiner „neulichsten (obwohl noch unreiffen) Erfindung“, die er (S. 44) dem Leser zur Erwägung stellt: „Ob nicht dieses (und der andern) Cometen Bewegungslinie eine solche Parabole sey, dero Focus in das Centrum der Sonnen zu setzen?“ Dörffel's Verdienst dürfte also ein unbestreitbares sein, um so mehr, als dieser sich bei aller Anerkennung von Hevel's Bedeutsamkeit in Gegnerschaft zu ihm stellt, der zwar bereits die Parabel als Cometenbahn erkannt, aber nicht eingesehen habe, dass die Bahnebene durch die Sonne hindurchgehe, geschweige denn, dass die Sonne im Brennpunkte der Bahn sich befinde. Wir sind nicht in der Lage, die Originalschriften selbst prüfen zu können; doch scheint uns Herr Reinhardt, soviel aus den durch ihn abgedruckten Stellen hervorgeht, die richtige Würdigung Hevel's und Dörffel's vollzogen zu haben. Als weitere Verdienste Dörffel's weist er nach,

dass dieser den Cometen von 1682 (Halley's Comet) entdeckte und dass er die erste Höhenberechnung einer Feuerkügel aus zwei correspondirenden Beobachtungen ausführte.

CANTOR.

---

**Die Tachymetrie**, mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichý und Starke. (Bemerkungen zu der Recension des Herrn Bohn im 1. Hefte des 27. Jahrganges dieser Zeitschrift.)

Das in der mechanischen Werkstätte der Herren Starke und Kammerer in neuester Zeit hergestellte Tachymeter ist ein theodolithartig gebautes Instrument, welches, wie alle bisher bekannten Tachymeter, die Messung von Horizontal- und Verticalwinkeln, sowie die Ermittelung der schiefen Distanz gestattet. Indem das distanzmessende Fernrohr mit einer Libelle versehen ist, kann das Tachymeter von Tichý und Starke auch als Universalnivellirinstrument verwendet werden. Der Vorzug des genannten Tachymeters besteht darin, dass man mit demselben die für die Construction eines Planes nöthigen Elemente: „Horizontaldistanz und Höhe“ unmittelbar auf dem Felde erhalten kann. Dieser Zweck wird dadurch erreicht, dass das distanzmessende Fernrohr des Tachymeter-Theodolithen von Tichý und Starke mit einem Ocular-Filar-Schraubenmikrometer versehen ist, und an dem Verticalkreise ausser der gewöhnlichen Gradtheilung noch die beiden diametral gegenüberliegenden, je einen Bogen von 90° umfassenden Tachymetertheilungen angebracht sind, mittelst welcher man durch einfache Operationen zur Kenntniss der Horizontaldistanz und Höhe eines Punktes gelangen kann.

Durch diese Einrichtung ist es möglich, je nach Wunsch oder Bedürfniss die räumliche Bestimmung eines Punktes entweder nach der bisher gebräuchlichen Methode durch Ermittelung der schiefen Distanz und des Verticalwinkels, oder nach der Tichý'schen Methode durch die Bestimmung der Horizontaldistanz und Höhe vorzunehmen.

Herr Bohn unterzieht die Einrichtung und die besondere von Tichý angegebene Methode einer ausführlichen Kritik, in welcher eine Reihe von Unrichtigkeiten und falschen Auffassungen enthalten sind, bezüglich welcher ich mich veranlasst fühle, einige Bemerkungen zu machen. Hierbei will ich die eigenthümliche Ansicht des Herrn Bohn über den Zweck und die Leistungsfähigkeit eines anallatisch eingerichteten Fernrohres ganz unberücksichtigt lassen und nur nachstehende Punkte hervorheben.

1. Auf S. 20 schreibt Herr Bohn wörtlich: Die Ausstattung des Tachymeters von Tichý-Starke ist ohne Sparsamkeit gemacht, es kommen z. B. vier Libellen, wovon eine eine Reversionslibelle ist, vor; der Preis kann demgemäss kein geringer sein.

Dieser Ausspruch ist wohl an und für sich etwas naiv, aber insofern bemerkenswerth, als aus demselben klar hervorgeht, dass Herrn

Bohn die vielseitige Anwendung des Tachymeters von Tichý und Starke, welche das Vorhandensein dieser Libellen bedingt, gänzlich fremd geblieben ist. Herr Bohn ist entschieden der Ansicht, dass das fragliche Instrument nur zur tachymetrischen Aufnahme nach der Tichý-schen Methode geeignet sei, und bringt dies auch klar zum Ausdrucke auf S. 17, indem er sagt: „Der Verticalkreis des Tichý-Starke'schen Tachymeters hat drei verschiedene Theilungen. Die eigentliche Winkeltheilung wird regelmässig „gar nicht“ gebraucht, sondern nur die zwei anderen Theilungen, welche Werthe von Functionen des Höhenwinkels und des diastometrischen Winkels oder der Umdrehungszahl und Ganghöhe der den Faden verschiebenden Mikrometerschraube sind; diese Werthe sind durch näherungsweises Auflösen transcendenter Gleichungen zu gewinnen und dann nach den Abmessungen des Kreises in Bogenlängen umzurechnen und aufzutragen.“

Auf S. 11 der oben erwähnten Schrift wurde ausdrücklich hervorgehoben, dass die zur Ermittelung der Horizontaldistanz und Höhe dienenden Theilungstabellen mittelst der Gleichungen 11) und 12) erhalten werden. Die je einem Trommeltheile der Mikrometerschraube entsprechenden Theilungsintervalle, welche bis auf eine Bogensecunde scharf gerechnet sind, werden mittelst einer in Bezug auf Theilungsfehler genau untersuchten Kreistheilmaschine auf den Verticalkreis des Instrumentes übertragen, wobei noch besonders bemerkt werden mag, dass das bei der Kreistheilmaschine in Verwendung stehende Schraubenmikroskop die Einstellung der Mikrometerschraube bis auf 0,1 Bogensecunde gestattet. Von einer Umrechnung der Theilungstabellen nach den Abmessungen des Kreises in Bogenlängen kann demnach nicht die Rede sein.

2. Die auf S. 20 ausgesprochene Behauptung: „Das Tachymeter Tichý-Starke trägt nicht in sich die Möglichkeit einer scharfen Prüfung und Berichtigung“, ist falsch.

In der Tachymetrie wurden die Eigenschaften und die Rectification des fraglichen Tachymeters in ausführlicher Weise besprochen und jenes Verfahren angegeben, welches bei der Untersuchung dieses Instrumentes anzuwenden ist, um demselben die erforderlichen Eigenschaften zu verleihen. Das daselbst auf S. 33—40 angegebene Rectificationsverfahren setzt kein Hilfsinstrument voraus und gewährt, wie dies aus dem Vorgange der Prüfung und Berichtigung des Tachymeters von selbst erhellt, jenen Grad der Genauigkeit, welcher der Distanz- und Höhenmessung überhaupt zukommt. Wenn zum Schlusse dieses Capitels bezüglich der Stellung der anallatischen Linse auch der bekannten Gauss'schen Methode Erwähnung geschieht, deren sich der Besitzer eines Stampfer-schen Nivellirinstrumentes eventuell bedienen kann, weil die betreffende Untersuchung auf eine äusserst einfache und scharfe Weise im Zimmer

auszuführen ist; so kann hieraus keineswegs gefolgert werden, dass die Untersuchung bezüglich der Stellung der anallatischen Linse nur nach dieser Methode mit einem Hilfsinstrumente möglich ist.

3. Auf S. 20 heisst es weiter: „Die wichtigste Prüfung scheint die der Richtigkeit der zwei empirischen (?) Theilungen am Verticalkreise für die erforderlichen Schraubenstellungen zur Entfernungs- und zur Höhenmessung. Diese durchzuprüfen, scheint kein anderes Mittel vorhanden zu sein, als im Felde sehr zahlreiche Messungen an Punkten auszuführen, deren Entfernung und relative Höhe bereits anderweitig genau gekannt sind."

In Bezug auf diese sonderbare Methode der Untersuchung von Theilungsfehlern erlaube ich mir an Herrn Bohn die Bitte zu stellen, dieselbe recht bald praktisch zu erproben und die Resultate dieser Untersuchung bekannt zu geben.

4. Herr Bohn sagt auf S. 20: „Auf die Auswerthung der Genauigkeitsgrenzen ist im Schriftchen verhältnissmässig viel Raum verwendet. Der Berichterstatter kann sich aber nicht ganz einverstanden erklären mit der Art, wie die Untersuchung geführt wird. Da unerwähnt bleibt, wo und wann ein Annäherungswerth an Stelle der genauen Formel gesetzt wird, so lässt sich nicht entscheiden, ob ein Irrthum bei dem Differentiiren vorgefallen ist oder ungerechtfertigte Vernachlässigung von Gliedern stattgefunden hat. Das letztere ist wahrscheinlich."

Es ist selbstverständlich und bedarf keiner näheren Erörterung, dass man sich bei der Aufsuchung des relativen Fehlers der Horizontaldistanz und Höhe stets der einfachen Näherungswerthe der letzteren bedienen wird. Herr Bohn ist allerdings der Ansicht, dass auch bei der Fehlerberechnung die strengen, complicirten Formeln anzuwenden sind, indem er einen nicht zu rechtfertigenden Unterschied der diesbezüglichen Resultate zu erblicken glaubt. Zu diesem Behufe weist Herr Bohn auf das S. 43 der Tachymetrie angeführte Beispiel hin. Die von mir angewendeten Näherungsformeln ergeben für den relativen Fehler der Horizontaldistanz und Höhe den Werth

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta H}{D} = \frac{1}{3750},$$

während die strengen Formeln ergeben

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{3717,6}, \quad \frac{\Delta H}{D} = \frac{1}{3730,3}.$$

Ich weiss nun nicht, ob Herr Bohn mit diesen bis auf eine Decimale gerechneten Daten sich ein schärferes Urtheil über den Einfluss des betreffenden Fehlers auf Horizontaldistanz und Höhe zu bilden im Stande ist, als Derjenige, welchem dieser Fehler etwa mit $\frac{1}{3700}$ angegeben wird. Es muss selbstverständlich ganz Herrn Bohn überlassen bleiben, sich in

einem gegebenen Falle der strengen oder der Näherungsformeln zu bedienen und dieselben bis auf eine beliebige Anzahl von Decimalen zu berechnen. Wenn jedoch Herr Bohn glaubt, auch von mir fordern zu dürfen, den Nenner des relativen Fehlers der Horizontaldistanz und Höhe ebenfalls bis auf eine Decimale zu entwickeln, obschon für die Beurtheilung des betreffenden Genauigkeitsgrades die Kenntniss der Hunderter vollkommen hinreicht, so muss ich mich dagegen feierlichst verwahren.

5. Zum Schlusse erklärt Herr Bohn auf S. 21: „Die Formel $\alpha'' = 206265\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)\varphi$ sei unrichtig; der Factor 206265 muss fort, denn $\alpha$ und $\varphi$ sind in demselben Maasse ausgedrückt.“

Der blosse Anblick dieser Formel zeigt die Unwahrheit dieser Behauptung. Der Winkel $\alpha$ ist ausdrücklich mit dem Secundenzeichen versehen, während $\varphi$ im Bogenmaasse angegeben ist. Hätte Herr Bohn bei der Durchsicht dieses Schriftchens nur die geringste Aufmerksamkeit verwendet, so hätte er aus Gleichung 6) erfahren können, dass dieselbe den Winkel $\varphi$ im Bogenmaasse für den Halbmesser gleich Eins darstellt und dieser Bogenwerth, in die Gleichung 5) substituirt, den Winkel $\alpha$ in Secunden giebt.

Ant. Schell,
Professor a. d. k. k. technischen Militärakademie in Wien.

---

**Les prétendus problèmes d'Algèbre** du manuel du calculateur égyptien (papyrus Rhind) par Léon Rodet. 126 pages. Extrait du Journal Asiatique. Paris 1882.

Die in der Ueberschrift genannte Abhandlung sucht zu beweisen, dass weder der Herausgeber des mathematischen Papyrus, Prof. Aug. Eisenlohr, noch der Referent die sogenannten Seqem- und Hau-Aufgaben der Aegypter verstanden hätten. Wir sind der entgegengesetzten Meinung, welche wir nicht verfehlt haben, in unseren sogleich Mitte April an das Journal Asiatique eingesandten Entgegnungen zu begründen. Da der Abdruck dieser Entgegnungen nicht allzufrühe stattfinden dürfte, so sei einstweilen auf dieselben hingewiesen, um die Meinung nicht aufkommen zu lassen, als hätten die Rodet'schen Ausführungen unsere früher ausgesprochenen Ansichten irgendwie erschüttert.

Cantor.

# Bibliographie

vom 16. Februar bis 30. April 1882.

## Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem J. 1880. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1882. Heft 2. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 43. Bd. Wien, Gerold. 46 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Cl. II. Abth. 84. Bd., 3. u. 4. Heft. Ebendas. 3 Mk. 20 Pf.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1881. München, Franz. 1 Mk.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 10. Jahrg. 1882, 1. Heft. Berlin, Mittler & S. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen des physikalischen Centralobservatoriums. Jahrg. 1880, herausgegeben von H. Wild. Leipzig, Voss. 30 Mk.

Kleines nautisches Jahrbuch für das Jahr 1883. XXII. Jahrg. Bremerhaven, Vangerow. 60 Pf.

Journal f. reine u. angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. L. Kronecker u. K. Weierstrass. 92. Bd. (4 Hefte). 1. u. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

## Reine Mathematik.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Klein, F., Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber algebraische Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Lefler, F., Das Integral $\int \frac{dx}{[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]^{2/3}}$ und seine Umkehrung. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 1 Mk.

Spitzer, S., Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 2. Forts. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Winckler, A., Ueber die transcendenten Integrale von Differentialgleichungen I. O. mit quadrat. Coefficienten. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

SUCHSLAND, E., Systematische Entwickelung der gesammten Algebra. 3. Thl. Stolp, Schrader. 50 Pf.

FORDEMANN, A., Geometrische Betrachtungen über algebraische Gleichungen. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 60 Pf.

GÜNTHER, S., Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

MILINOWSKI, A., Elementar-synthetische Theorie der Kegelschnitte. Ebendas. 8 Mk. 80 Pf.

SCHÖFFLER, B., Synthetische Theorie der Curven II. O. Wien, Seidel & S. 2 Mk.

KANTOR, S., Ueber gewisse Configurationen und deren Zusammenhang mit den Curven III. O. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

SCHMID, TH., Ueber die Strictionslinie des Hyperboloids als Erzeugniss mehrdeutiger Gebilde. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

WEYR, E., Ueber mehrstufige Curven- und Flächensysteme. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

—, Ueber die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für cubische Involutionen beider Stufen. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

SCHUBERT, H., I. Lösung des auf trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätproblems. II. Elementarer Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Hamburg, Nolte. 2 Mk. 50 Pf.

BINDER, W., Die Centralprojection als Hilfsconstruction der Orthogonalprojection. Wien, Braumüller. 2 Mk.

SALMON, G., Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven; deutsch bearb v. W. FIEDLER. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

ABENDROTH, W., Anfangsgründe d. analyt. Geometrie d. Ebene. Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 80 Pf.

HOCHHEIM, A., Aufgaben aus der analyt. Geometrie der Ebene. 1. Heft (Punkt, Gerade und Kreis). Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

—, Auflösungen hierzu. Ebendas. 1 Mk. 50 Pf.

HEGER, R., Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 1. Thl.: Planimetrie. Breslau, Trewendt. 1 Mk. 50 Pf.

REIDT, J., Planimetrische Aufgaben. 2 Thle. Breslau, Trewendt. 1 Mk. 50 Pf.

STEINER, J., Gesammelte Werke, herausgegeben von K. WEIERSTRASS. 2. Bd. (Schluss.) Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

## Angewandte Mathematik.

AUSTERLITZ, L., Beitrag zum ballistischen Problem. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

TUMLIRZ, O., Ueber das Fliessen einer incompressibeln Flüssigkeit durch Röhren von kreisförmigem Querschnitt. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

—, Ueber die Rotation einer Flüssigkeit unter Einfluss der Reibung. (Akad.) Ebendas. 45 Pf.

Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. 2. Thl. (Dynamische Aufgaben.) 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie der Gasreibung. 3. Thl. (Ak.) Ebendas. 60 Pf.

Dronke, A., Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Theile, F., Anleitung zu barometrischen Höhenmessungen mittelst Quecksilberbarometer und Aneroid. Dresden, Axt. 1 Mk.

Gretschel, H., Lexikon der Astronomie. Leipzig, bibliogr. Inst. 5 Mk. 50 Pf.

Seeliger, H., Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem $\zeta$ Cancri. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Mk.

Gruss, G., Bahnbestimmung des Cometen V, 1877. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Hartmann, E., Der römische Kalender; herausgeg. v. L. Lange. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Zehden, F., Handbuch des terrestrischen und astronomischen Theils der Nautik. Wien, Hölder. 7 Mk. 60 Pf.

Hirn, G. A., Recherches sur la Relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. Colmar, Barth. 4 Mk. 80 Pf.

## Physik und Meteorologie.

Helmholtz, H., Wissenschaftliche Abhandlungen. 1. Bd. 2. Abth. Leipzig, Barth. 14 Mk.

Kirchhoff, G., Gesammelte Abhandlungen. 2. Abth. Leipzig, Barth. 9 Mk.

Exner, K., Ueber das Funkeln der Sterne und die Scintillation überhaupt. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

Brücke, E., Einige Consequenzen der Young-Helmholtz'schen Theorie. 2. Abhdlg. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Ettingshausen, A. v., Bestimmung der Diamagnetisirungszahl des Wismuths in absolutem Maasse. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Strouhal, V. u. C. Barus, Ueber den Einfluss der Härte des Stahls auf dessen Magnetisirbarkeit und des Anlassens auf die Haltbarkeit der Magnete. Würzburg, Stahel. 2 Mk. 40 Pf.

Tafel II.

$C_1$
$C$
$C_2$
P
A

**J. Scheible's Antiquariat in Stuttgart.**

Wir kaufen zu angemessenen **Baarpreisen** stets ganze Bibliotheken wie auch einzelne werthvollere Werke; **solche aus dem Gebiete der Naturwissenschaften und Mathematik besonders bevorzugt.** Von den Fachkatalogen unseres 500,000 Bände umfassenden Antiquariats-Lagers stehen die Kataloge 137: Naturwissenschaften (Zoologie und Botanik) und 142: Französische Literatur, auf Verlangen **gratis und franco** zu Diensten.

Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel.

Soeben erschien und ist von **B. G. Teubner** in Leipzig durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

OEUVRES COMPLÈTES

DE

NIELS HENRIK ABEL.

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR

MM. **L. SYLOW** et **S. LIE.**

2 TOMES. 4. M. 24.—

TOME PREMIER, CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL.
TOME SECOND, CONTENANT LES MÉMOIRES POSTHUMES D'ABEL.

CHRISTIANIA 1881.

**Leipzig, Kommissions-Verlag von B. G. Teubner.**

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
1882.

Soeben sind erschienen:

**Fuhrmann, Dr. Arwed,** ordentl. Professor am Königl. Polytechnikum zu Dresden, **Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** Ein Übungsbuch für Studierende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Teilen. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. [VI u. 222 S.] geh. n. M 3. 60.

Der I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper [VI u. 138 S.] n. M 2. 40, erschien 1879 in zweiter Auflage.

**Hochheim, Dr. Adolf,** Professor, **Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.** Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in zwei Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. M 1. 50. B. Auflösungen. [102 S.] n. M 1. 50. Zusammen M 3. —

**Salmon, George, analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilh. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweite verbesserte Auflage. gr. 8. [XVI u. 508 S.] geh. n. M 11. 20.

Leipzig, April 1882. **B. G. Teubner.**

# INHALT.


Seite

VI. Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Von Dr. Chr. Wiener, Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule in Karlsruhe (Taf. II Fig. 1—11) . . . 121
VII. Ueber Distanzrelationen. Von E. Study in Leipzig . . . 146
VIII. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Von Dr. O. Böklen in Reutlingen . . . 166

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Von W. Veltmann . . . 171
X. Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung. Von J. Thomae in Jena . . . 172
XI. Ueber specielle elliptische Functionen. Von J. Thomae in Jena . . . 181
XII. Ueber Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften. Von Fritz Hofmann in München (Taf. II Fig. 12—14) [illegible]
XIII. Erklärung. Von Much in Hamm i. W. . . . [illegible]

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Recensionen:

Schlemüller, Wilhelm, Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden, nicht bestrahlten Atmosphäre, sowie die Höhe der Atmosphäre. — Vier physikalische Abhandlungen. Von Bohn . . . [illegible]
Reusch, E., Die stereographische Projection. Von Chr. Wiener . . . [illegible]
Taylor, Charles, An introduction to the ancient and modern geometry of conics. Von Milinowski . . . [illegible]
Weinmeister, Dr. J. P. H., Die Flächen zweiten Grades. Von Milinowski . . . [illegible]
Milinowski, A., Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Von K. Schwering in Coesfeld . . . [illegible]
Schwering, Mathematische Miscellen. Von V. Schlegel in Waren . . . [illegible]
Ruchonnet, Ch., Exposition géométrique des propriétés générales des courbes. Von Enneper in Göttingen . . . [illegible]
Heger, Dr. Richard, Analytische Geometrie. Von Cantor . . . [illegible]
Simony, Dr. Oscar, Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen", und verwandter merkwürdiger Probleme. Von Cantor . . . 105
Buys, Lucien, La science de l'espace. Von Cantor . . . [illegible]
Zuckermann, B., Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung im Talmud. Von Cantor . . . [illegible]
Majer, Prof. Dr. Ludwig, Proklos über die Definitionen bei Euklid. Von Cantor . . . [illegible]
Heiberg, Dr. phil. J. L., Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Von Cantor . . . [illegible]
Weissenborn, Prof. Dr. Hermann, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti. Von Cantor . . . 110
Favaro, Antonio, Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galileo. Von Cantor . . . 111
Reinhardt, Curt, Magister Georg Samuel Dörffel. Von Cantor . . . 111
Die Tachymetrie, mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichý und Starke. Von Ant. Schell in Wien . . . 114
Rodet, Léon, Les prétendus problèmes d'Algèbre. Von Cantor . . . [illegible]

Bibliographie vom 16. Februar bis 30. April 1882:

Periodische Schriften . . . [illegible]
Reine Mathematik . . . [illegible]
Angewandte Mathematik . . . [illegible]
Physik und Meteorologie . . . [illegible]


Druck von B. G. Teubner in Dresden.

AUG 16 1882

CAMBRIDGE HARVARD COLLEGE LIBRARY MASS.

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**

BG

**27. Jahrgang. 4. Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 27. Juli 1882.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

*Verlag von Ferdinand Enke in Stuttgart.*

Soeben ist erschienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

# Geschichte der Physik

## von Aristoteles bis auf die neueste Zeit.

Von **Prof. Aug. Heller.**

*Zwei Bände.*

I. Band: **Von Aristoteles bis Galilei.**

gr. 8. geh. Preis 9 Mark.

---

## Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

### 1882.

**Abel, Niels Henrik, oeuvres complètes.** Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 tomes. 4. geh. n. ℳ 24. —
Tome premier [VIII und 621 S.] contenant les mémoires publiés par Abel.
Tome second [IV und 341 S.] contenant les mémoires posthumes d'Abel.

**Dronke,** Dr. **Adolf,** Direktor der Realschule I. O. zu Trier, **Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung.** Unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker. [IV und 97 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. —

**Durège,** Dr. **H.,** ordentl. Professor an der Universität in Prag, **Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse.** Dritte verbesserte Auflage [X und 268 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

**Fiedler,** Dr. **Wilhelm, Cyklographie** oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lithogr. Tafeln [XVI und 264 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 9. —

**Fuhrmann,** Dr. **Arwed,** ordentl. Professor am Königl. Polytechnikum zu Dresden, **Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** Ein Übungsbuch für Studierende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Teilen. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. [VI und 222 S.] geh. n. ℳ 3. 60.

Der I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper [VI und 138 S.] n. ℳ 2. 40, erschien 1879 in zweiter Auflage.

**Günther,** Dr. **Siegmund,** Professor am Königl. Gymnasium zu Ansbach in Bayern, **parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie.** Eine vergleichende Untersuchung. [IV und 99 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. 80.

**Heiberg,** Dr. **J. L., litterargeschichtliche Studien über Euklid.** [IV und 224 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 5. 60.

**Hochheim,** Dr. **Adolf,** Professor, **Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.** Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in zwei Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. ℳ 1. 50. B. Auflösungen. [102 S.] n. ℳ 1. 50. Zusammen ℳ 3. —

# IX.

## Die Fourier'sche Reihe.

Von

W. Veltmann

zu Frankenthal i. d. Pfalz.

Hierzu Taf. III Fig. 1 u. 2.

---

I. Wenn $a_0 + a_1 + a_2 \ldots$ eine endliche oder unendliche Reihe ist, so nennen wir die Summe von irgendwelchen aufeinanderfolgenden Gliedern derselben eine Theilsumme der Reihe. Eine Theilsumme, die mit dem Gliede $a_0$ anfängt, heisst ein Stufenwerth, die Summe der folgenden Glieder der zugehörige Rest. Der $n^{\text{te}}$ Stufenwerth ist derjenige, der mit dem Gliede $a_n$ schliesst, der $n^{\text{te}}$ Rest derjenige, der mit dem Gliede $a_{n+1}$ anfängt.

Eine Grösse $a$ nennen wir grösser oder kleiner als eine Grösse $b$, je nachdem $a-b$ positiv oder negativ ist. Dagegen sollen sich die Ausdrücke beträchtlich und gering, sowie mehr und weniger auf die Verschiedenheit von Null beziehen, so dass also eine Grösse um so geringer ist, je näher sie der Null ist. Für „grösser" und „kleiner" benutzen wir die gewöhnlichen Zeichen, für „beträchtlicher" und „geringer" die Zeichen ∽ und ∾. Das Unendliche kann positiv unendlich oder negativ unendlich sein; ersterer Ausdruck umfasst also beide letztere.

Für eine unendliche Anzahl von Werthen $x_1, x_2, \ldots,$ welche in irgend einer Weise definirt sind, sei eine bestimmte Reihenfolge festgesetzt, derart, dass, wenn man eine endliche Anzahl derselben beliebig herausgreift, die Reihenfolge derselben eindeutig feststeht. Das grösste der auf $x_n$ folgenden $x$ werde mit $g_n$ bezeichnet. Wenn die Grössen $g$, welche wir die Restmaxima der $x$ nennen, nicht $= +\infty$ sind, so ist keine derselben grösser als irgend eine vorhergehende. In diesem Falle können die Grössen $g$ gegen $-\infty$ divergiren, d. h., wie klein eine Grösse $k$ angenommen werden mag, es ist immer eine der Grössen $g$ angebbar, derart, dass alle auf dieselbe folgenden kleiner sind, als $k$. Wenn dieser Fall nicht stattfindet, so existirt eine bestimmte Grösse $g_\infty$ derart, dass $g - g_\infty$ für jedes $g$ positiv ist, dass aber, wie klein eine positive Grösse $\varepsilon$ angenommen werden mag, eine der Grössen $g$ angebbar ist, so dass für

alle auf sie folgenden die Differenz $g - g_\infty$ kleiner ist als $\varepsilon$. Die Beziehung der Grösse $g_\infty$ zu den $x$ können wir dann dadurch bezeichnen, dass wir sagen: Die Restmaxima der $x$ convergiren gegen $g_\infty$, oder: $g_x$ ist die obere Schranke der Reihe der $x$. Auf entsprechende Weise definiren wir die untere Schranke der Grössen $x$ oder die Grenze der Restminima derselben. Eine solche existirt, wenn die Restminima der Grössen $x$ nicht $= -\infty$ sind und nicht gegen $+\infty$ divergiren.

Eine unendliche Reihe nennen wir convergent, wenn die Stufenwerthe derselben in ihrer natürlichen Reihenfolge eine bestimmte obere und untere Schranke haben und beide Schranken gleich sind. Zur Convergenz ist es nothwendig und genügend, dass der Rest der Reihensumme von hinreichend hohem Index genommen werden kann, damit jede Theilsumme desselben geringer sei, als eine noch so geringe Grösse.

Die Reihe ist $= +\infty$ oder $= -\infty$, wenn resp. die Restminima der Stufenwerthe gegen $+\infty$ oder die Restmaxima derselben gegen $-\infty$ divergiren.

In allen anderen Fällen ist die Reihe unbestimmt. Die Unbestimmtheit kann eine beiderseits begrenzte, einseitig begrenzte oder beiderseits unbegrenzte sein, je nachdem die Stufenwerthe der Reihe eine bestimmte obere und untere Schranke oder nur eine von beiden, oder weder die eine, noch die andere haben.

Wenn eine Grösse $r$ kleiner als 1 und grösser als 0 ist und durch stetige Vergrösserung in 1 übergeht, so wollen wir dies andeuten durch $r <= 1$. Das Zeichen oder der Ausdruck für eine Grösse mit dem darüber gesetzten Pluszeichen soll immer den absoluten Werth derselben bedeuten.

**II.** Wenn $a_0 + a_1 + a_2 \ldots$ eine beliebige endliche oder unendliche Reihe ist und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ positive Grössen sind, derart, dass $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \ldots$, so ist der $n^{\text{te}}$ Stufenwerth der Reihe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 \ldots$ gleich dem Producte aus $\varepsilon_0$ mal einer Mittelgrösse der $n+1$ ersten Stufenwerthe der Reihe $a_0 + a_1 + a_2 \ldots$.

Dieser Satz ist von Abel in seiner Abhandlung über die Binomialreihe zwar nicht ausgesprochen, aber im Wesentlichen bewiesen. Abel setzt nämlich, wenn die Stufenwerthe der Reihe $a_0 + a_1 + a_2 \ldots$ mit $p_0$, $p_1, \ldots$ bezeichnet werden,

$$a_0 = p_0, \quad a_1 = p_1 - p_0, \quad a_2 = p_2 - p_1, \quad \ldots$$

also

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 \ldots + \varepsilon_n a_n &= \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) \ldots + \varepsilon_n (p_n - p_{n-1}) \\ &= p_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ldots + p_{n-1} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + p_n \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Da nun hier die mit den $p$ multiplicirten Grössen nicht negativ sind, so ist der Ausdruck gleich der Summe $\varepsilon_0$ dieser Grössen mal einem Mittelwerthe der $p$.

III. Wenn eine unendliche Reihe $S_1 = a_0 + a_1 \ldots$ convergent ist, so ist auch die Reihe $S_r = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \ldots$ für $1 > r > 0$ convergent. Letztere Reihe ist eine stetige Function von $r$ und wenn $r$ stetig in 1 übergeht, so geht der Werth der Reihe $S_r$ stetig in den von $S_1$ über.

Dieser Satz, der von Abel aufgestellt und bewiesen worden ist, folgt unmittelbar aus II. Da nämlich $n$ so gross genommen werden kann, dass jede Theilsumme des $n^{ten}$ Restes $R_1{}^{\underline{n}}$ von $S_1$ beliebig gering wird, die entsprechende Theilsumme von $S_r$ aber nach II gleich der in ihrem ersten Gliede vorkommenden Potenz von $r$ mal einem Mittleren aus den Stufenwerthen jener Theilsumme von $S_1$ ist, so werden auch die Theilsummen des $n^{ten}$ Restes $R_r{}^{\underline{n}}$ von $S_r$ beliebig gering. Um ferner zu erkennen, dass $S_r$ für $r <= 1$ in $S_1$ übergeht, nehme man $n$ so gross, dass die Theilsummen von $R_1{}^{\underline{n}}$ geringer werden, als eine sehr geringe Grösse $\varepsilon$. Dann ist nach II auch $R_r{}^{\underline{n}}$ für jedes zwischen 1 und 0 liegende $r$ geringer als $\varepsilon$ und unterscheidet sich von $R_1{}^{\underline{n}}$ um weniger als $\varepsilon$. Jetzt nehme man $r$ so nahe an 1, dass $S_r{}^{\underline{n}}$ von $S_1{}^{\underline{n}}$ sich um weniger als $\varepsilon$ unterscheidet. Die ganze Reihe $S_r$ unterscheidet sich daher jetzt von $S_1$ um weniger als $2\varepsilon$. Durch Verkleinerung von $1-r$ kann demnach der Unterschied von $S_r$ und $S_1$ beliebig gering gemacht werden.

IV. Wenn $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 \ldots$ eine unendliche Reihe $= +\infty$ oder $= -\infty$ ist, während für $1 > r > 0$ die Reihe $S_r = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \ldots$ stets convergent ist, so wird für $r <= 1$ auch $S_r = +\infty$ oder $= -\infty$.

Dieser Satz ist von Abel nicht aufgestellt worden; er folgt aber ebenfalls leicht aus II. Die Reihe $S_1$ sei gleich $+\infty$; für $S_1 = -\infty$ ist der Beweis nicht wesentlich verschieden. Man zerlege dieselbe in den $n^{ten}$ Stufenwerth $S_1{}^{\underline{n}}$ und den $n^{ten}$ Rest $R_1{}^{\underline{n}}$. Der kleinste Stufenwerth dieses Restes sei $R_1{}^{(n)}$, der grösste ist $+\infty$. Der convergente Rest $R_r{}^{(n)}$ von $S_r$ liegt also nach II für jedes $r \lessgtr {1 \atop 0}$ zwischen $R^{(n)}$ und $+\infty$; wir können ihn $= R^{(n)} + q$ setzen, wo $q$ eine positive Grösse. Nehmen wir jetzt $r$ so nahe an 1, dass $S_r{}^{\underline{n}}$ sich von $S_1{}^{\underline{n}}$ nur um eine beliebig geringe Grösse $\varepsilon$ unterscheidet. Dann ist also $S_r{}^{\underline{n}} = S_1{}^{\underline{n}} \pm \varepsilon$, $R_r{}^{\underline{n}} = R_1{}^{(n)} + q$, also $S_r = S_r{}^{\underline{n}} + R_r{}^{\underline{n}} = S_1{}^{\underline{n}} + R_1{}^{\underline{n}} \pm \varepsilon + q$. Die Grösse $q$ ist positiv, $\varepsilon$ beliebig gering, $S_1{}^{\underline{n}} + R_1{}^{(n)}$ aber wird $= +\infty$, wenn $n$ ins Unendliche wächst. Denn $S_1{}^{\underline{n}} + R_1{}^{(n)}$ ist nichts Anderes, als der kleinste der auf $S_1{}^{\underline{n}}$ folgenden Stufenwerthe von $S_1$; die Restminima der Stufenwerthe von $S_1$ aber divergiren der Annahme gemäss gegen $+\infty$.

V. Die Reihe $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 \ldots$ sei unbestimmt, $S_r = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \ldots$ aber für jedes $r \lessgtr {1 \atop 0}$ convergent. Für $r <= 1$ kann dann $\lim S_r$ eine bestimmte Grösse sein (z. B. $\lim [1 - r + r^2 - r^3 \ldots] = \frac{1}{2}$), oder auch nicht. Letzteres findet z. B. statt bei einer Reihe $r^{m_1} - r^{m_2} + r^{m_3} \ldots$, falls man die $m$ in geeigneter Weise stark wachsen lässt. In jedem Falle

hängt aber das Verhalten von $S_r$ für $r <= 1$ in folgender Weise von der Beschaffenheit der Reihe $S_1$ ab.

Die Unbestimmtheit der Reihe sei eine nach oben begrenzte und die obere Schranke, d. h. der Grenzwerth der Restmaxima der Stufenwerthe derselben, $= E$.

Der $n^{te}$ Stufenwerth der Reihe $S_r$ für ein beliebiges $r$ zwischen 0 und 1 ist nach II (da $\varepsilon_0$ hier $=1$ ist) nicht grösser, als der grösste der Stufenwerthe der Reihe $S_1$ vom nullten bis zum $n^{ten}$. Es können daher die Stufenwerthe von $S_r$ und somit $S_r$ selbst für $r \gtrless {0 \atop 1}$ nie grösser sein, als der grösste der Stufenwerthe von $S_1$. Lässt man also $r$ von $r=0$ bis $r=1$ wachsen, so haben die Werthe von $S_r$ in der Reihenfolge, wie sie dann erscheinen, bestimmte endliche Restmaxima, welche als eine stetige Function von $r$ betrachtet werden können. Diese Function nimmt nie zu und wenn sie nicht gegen $-\infty$ divergirt, so convergirt sie gegen eine bestimmte Grösse $E'$, welche wir als die obere Schranke der Werthe von $S_r$ für ein von 0 bis 1 wachsendes $r$ betrachten können. Dieselbe kann nicht grösser sein, als obiges $E$, d. h. als die obere Schranke der Stufenwerthe von $S_1$.

Beweis. Man nehme $n$ so gross, dass der $n^{te}$ und alle höheren Stufenwerthe von $S_1$ höchstens $= E + \varepsilon$ sind, wo $\varepsilon$ eine sehr geringe positive Grösse ist. Der grösste Stufenwerth des $n^{ten}$ Restes von $S_1$ sei $R'$. Dann ist

$$S_1^{\overset{n}{\smile}} + R' = E + \varepsilon.$$

Man setze $r = 1 - \delta$, wo $\delta$ positiv, und nehme $\delta$ so klein, dass $S_r^{\overset{n}{\smile}}$ für $r \lessgtr {1 \atop 1-\delta}$ von $S_1^{\overset{n}{\smile}}$ um weniger, als eine sehr geringe Grösse $\varepsilon_1$ verschieden ist. Der Rest $R_r^{\overset{n}{\smile}}$ ist jetzt nach II höchstens $= (1-\delta)^{n+1} R'$, übertrifft also den Werth $R'$, wenn er ihn übertrifft, höchstens um den Absolutwerth von $[(1-\delta)^{n+1} - 1] R'$. Man nehme nun ferner $\delta$ noch kleiner und so klein, dass das Product $[(1-\delta)^{n+1} - 1] R'$ so, wie es dann ist, und also um so mehr für ein noch weiter verkleinertes $\delta$ ebenfalls geringer als $\varepsilon_1$ wird. Dann ist also $S_r^{\overset{n}{\smile}}$ von $S_1^{\overset{n}{\smile}}$ und $R_r^{\overset{n}{\smile}}$ von $R'$ um weniger als $\varepsilon_1$ verschieden, mithin eine Grösse $\varepsilon_2$ geringer als $2\varepsilon_1$ angebbar, so dass

$$S_r^{\overset{n}{\smile}} + R_r^{\overset{n}{\smile}} = S_1^{\overset{n}{\smile}} + R' \pm \varepsilon_2$$

oder

$$S_r = E + \varepsilon \pm \varepsilon_2.$$

Man kann also $r$ so nahe an 1 nehmen, dass $S_r$ für alle der 1 noch näheren Werthe kleiner bleibt, als eine Grösse, welche von $E + \varepsilon$ beliebig wenig verschieden ist. Indem man aber $n$ grösser nimmt, wird auch $\varepsilon$ beliebig klein. Mithin kann die obere Schranke von $S_r$ für $r <= 1$ um keine noch so kleine positive Quantität die Grösse $E$ übertreffen.

Auf ähnliche Weise folgt, dass, wenn $S_1^{\overset{n}{\smile}}$ für $n = \infty$ eine untere Schranke hat, auch $S_r$ für $r <= 1$ eine solche besitzt, welche nicht klei-

ner ist, als diejenige von $S_1{}^{\underset{\smile}{n}}$. Man kann also allgemein sagen, dass mit unendlich kleinen Fehlern der Werth der Reihe $S_r$ für $r <= 1$ zuletzt zwischen denselben Schranken bleibt, welche $S_1{}^{\underset{-}{n}}$ bei hinreichend grossem $n$ nicht mehr überschreitet. Wenn $S_r$ für $r <= 1$ einen bestimmten Werth hat, so wird daher dieser ebenfalls zwischen den Schranken der Reihe $S_1$ liegen.

**VI.** Auf einer Kreislinie seien Theilpunkte definirt. Die Zahl derselben kann unendlich gross sein; jedoch soll in diesem Falle kein noch so kleiner Bogen in lauter unendlich kleine Theile zerlegt sein. Nothwendig giebt es aber dann einen oder mehrere, möglicherweise auch unendlich viele Punkte, nach welchen hin die Theilpunkte unendlich nahe zusammenrücken, die man also nicht in so kleine Bögen einschliessen kann, dass in diesen nicht unendlich viele Theilpunkte liegen. Diese Punkte nennen wir Häufungspunkte der Theilung. Durch die Häufungspunkte ist ebenfalls kein noch so kleiner Bogen in lauter unendlich kleine Theile zerlegt.

Sind auf einem Kreise zwei Theilungen $A$ und $B$ gegeben und wird durch keine von beiden irgend ein noch so kleiner Bogen in unendlich kleine Theile zerlegt, so geschieht dies auch durch beide zusammen nicht. Denn wenn irgend ein Bogen $b$ durch $A$ nicht in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist, so ist der Bogen entweder durch $A$ gar nicht getheilt oder es sind in demselben zwei benachbarte Theilpunkte der Theilung $A$ enthalten, welche einen endlichen Bogen zwischen sich fassen. Wäre dieser Bogen nun auch durch die Theilung $B$ nicht unendlich klein getheilt, so würde der Bogen $b$ überhaupt nicht lauter unendlich kleine Theile enthalten. Ebenso können beliebig viele Theilungen keinen Bogen unendlich klein theilen, wenn keine derselben dies für sich thut.

**VII.** Am Rande eines Kreises vom Radius $= 1$ sei eine reelle und nach dem Intervall $2\pi$ periodische Function $f(y)$ des von einem bestimmten Punkte an nach links gerechneten Winkels $y$ gegeben, welche an keiner Stelle $= \pm \infty$ wird. Wir nennen diese Function in irgend einem Punkte stetig, wenn dieser Punkt sich in einen so kleinen Bogen einschliessen lässt, dass in jedem Punkte dieses Bogens die Function einen einzigen bestimmten Werth hat und dass der grösste und kleinste dieser Functionswerthe sich beliebig wenig unterscheiden. In allen anderen Fällen ist sie in dem Punkte unstetig. Es sei ausdrücklich bemerkt, dass der Begriff der Unstetigkeit hier den der Unbestimmtheit mit umfasst. Ueberdies gehören zu den Unstetigkeitspunkten auch solche Punkte, die sich zwar in einen so kleinen Bogen einschliessen lassen, dass die Functionswerthe in demselben sich beliebig wenig unterscheiden, nicht aber, dass die Function überall einen bestimmten und nur einen Werth hat. Wir wollen jedoch solche Punkte als unechte Stetigkeitspunkte bezeichnen.

Wir schränken nun die Function ein durch die Bestimmung, dass auf der Kreislinie und auf jedem noch so kleinen Theile derselben Bögen angebbar sein müssen, in welchen die Function überall stetig ist, oder anders ausgedrückt, dass die Kreislinie nicht durch Unstetigkeitspunkte in lauter unendlich kleine Theile zerlegt sein darf. Aus dieser Einschränkung leiten wir Folgendes ab:

Die Function ist entweder überall stetig oder nicht. In letzterem Falle ist immer irgend ein Bogen angebbar, in welchem die Function überall stetig ist. Gehen wir von einem Punkte eines solchen Bogens nach rechts oder links, so treffen wir irgend einmal auf einen Unstetigkeitspunkt, während in jedem Punkte diesseits desselben die Function stetig ist. Den Bogen zwischen diesen beiden Grenzpunkten nennen wir einen Stetigkeitsbogen.

Wenn die Zahl der Unstetigkeitspunkte eine endliche ist, so theilen sie die Kreislinie in ebenso viele Stetigkeitsbögen, welche also zusammen die ganze Kreislinie ausmachen. Ist dagegen die Zahl der Unstetigkeitspunkte und also auch die der Stetigkeitsbögen unendlich gross, so können ganz andere Verhältnisse eintreten. Zunächst giebt es in diesem Falle einen oder mehrere Punkte, welche sich nicht in so kleine Bögen einschliessen lassen, dass die Zahl der Unstetigkeitspunkte in denselben nicht unendlich gross ist. Diese Punkte sind also die Häufungspunkte der Unstetigkeiten. Ist die Zahl derselben unendlich gross, so kann man ihre Häufungspunkte als solche zweiter Ordnung, deren etwaige Häufungspunkte als solche dritter Ordnung u. s. w. betrachten. Die Zahl der Ordnungen kann eine endliche sein, so dass also die höchste Ordnung eine endliche Anzahl enthält, oder sie ist ebenfalls unendlich gross.* Alle diese Unterschiede sind indess nicht von wesentlicher Bedeutung. Auf die wesentlichen Eigenthümlichkeiten, welche hier zu beachten sind, werden wir kommen, wenn wir die Stetigkeitsbögen nach ihrer Grösse ordnen. Ein Stetigkeitsbogen oder mehrere gleiche Stetigkeitsbögen sind grösser als alle übrigen. Denn greift man irgend einen heraus, so ist er entweder ein grösster, oder es giebt eine endliche Anzahl noch grössere, von welchen dann der oder die grössten auch von allen die grössten sind. Wir nennen diese die Stetigkeitsbögen erster Grösse oder auch die erste Einschaltung von Stetigkeitsbögen, und setzen ihre Summe $= b_1$. Auf gleiche Weise folgt, dass auf dem noch übrigen Theile der Kreislinie ein oder mehrere Stetigkeitsbögen die grössten sind, welche demnach als Stetigkeitsbögen zweiter Grösse die zweite Einschaltung darstellen und deren Summe wir $= b_2$ setzen. U. s. w. Bilden wir nun die Summe $b_1 + b_2 + b_3 \dots$ *in inf.*, so ist dieselbe nicht nothwendig gleich der Kreislinie, wie folgendes Beispiel zeigt.

* Man vergleiche die Abhandlung von Herrn Cantor in den Leipziger Mathematischen Annalen, Bd. V S. 122.

Wir theilen die Kreislinie in vier abwechselnd gleiche Bögen und betrachten zwei einander gegenüberliegende als Stetigkeitsbögen (erste Einschaltung). Jeden der beiden Zwischenbögen theilen wir in fünf abwechselnd gleiche Theile und nehmen auf den dem mittleren benachbarten die Function stetig (zweite Einschaltung). Die jetzt vorhandenen sechs Zwischenbögen behandeln wir auf gleiche Weise und fahren so fort, nach jeder Einschaltung jeden der vorhandenen Zwischenbögen in fünf abwechselnd gleiche Theile zerlegend, von denen dann die beiden dem mittleren benachbarten Stetigkeitsbögen werden und die nächste Einschaltung bilden. Bei jeder Einschaltung werden die Stetigkeitsbögen so gross genommen, dass die erste Einschaltung den vierten Theil der Kreislinie und jede folgende die Hälfte der vorhergehenden beträgt. Da überdies bei jeder folgenden Einschaltung die Zahl der Stetigkeitsbögen grösser ist als bei der vorhergenden, so sind die Stetigkeitsbögen $n^{ter}$ Einschaltung zugleich diejenigen $n^{ter}$ Grösse. Obige Summe $b_1+b_2\ldots$ wird hier $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ldots=\pi$; die Stetigkeitsbögen machen also zusammen nur die halbe Kreislinie aus. Die übrige Hälfte besteht aber nur aus Punkten, da in keinem noch so kleinen Bogen keine Stetigkeitsbögen oder Theile von solchen enthalten sind.

Man hat hier dreierlei Punkte zu unterscheiden: 1. innere Punkte der Stetigkeitsbögen, 2. Endpunkte derselben, 3. Punkte, welche bei noch so weit fortgesetzter Einschaltung nie auf einen Stetigkeitsbogen kommen oder Endpunkte eines solchen werden. Punkte der letztern Art sind vorhanden; jeder Punkt, der nach irgend einer Einschaltung den Zwischenraum zweier benachbarten Stetigkeitsbögen halbirt, bleibt auch nach jeder folgenden Einschaltung die Mitte zwischen zwei benachbarten Stetigkeitsbögen. Diese Punkte, sowie auch die Endpunkte eines jeden Stetigkeitsbogens sind Häufungspunkte der Unstetigkeit, da sie nicht in noch so kleine Bögen eingeschlossen werden können, in welchen nicht unendlich viele Stetigkeitsbögen liegen. Alle Unstetigkeitspunkte sind demnach hier ebensowohl, wie in dem Falle, wo dieselben die Kreislinie unendlich klein theilen, zugleich Häufungspunkte der Unstetigkeiten.

Wir nennen allgemein diejenigen Bögen, welche nach Absonderung der Stetigkeitsbögen von der ersten bis zur $n^{ten}$ Grösse übrig bleiben, Zwischenbögen $n^{ter}$ Ordnung oder $n^{te}$ Zwischenbögen.

Einen Bogen der Kreislinie werden wir künftig immer in der Weise bezeichnen, dass wir die Buchstaben an seinen Endpunkten in der Reihenfolge schreiben, in welcher sie beim Durchlaufen des Bogens von rechts nach links erscheinen.

**VIII.** Wir wollen jetzt die Function weiteren Einschränkungen unterwerfen, derart, dass sie durch die Werthe auf den Stetigkeitsbögen

vollständig bestimmt ist, soweit sie überhaupt bestimmte Werthe haben soll. Es sei also die Function zunächst nur im Innern der Stetigkeitsbögen definirt. Damit sie hierdurch in den Unstetigkeitspunkten und deren Häufungspunkten nicht mehr willkürlich, sondern mit definirt sei, setzen wir Folgendes fest.

Wenn man rechts von einem Punkte $P$ einen Punkt $Q$ so nahe an $P$ nehmen kann, dass die zwischen $P$ und $Q$ vorhandenen unmittelbar definirten Werthe der Function von einander und also auch von einer bestimmten Grösse beliebig wenig verschieden sind, so nennen wir diese Grösse den rechtsseitigen Werth der Function im Punkte $P$. Können dagegen, wie wenig auch $Q$ von $P$ abstehe, zwischen $P$ und $Q$ unmittelbar definirte Werthe gefunden werden, welche sich um mehr als eine vorher gegebene, wenn auch noch so geringe Grösse unterscheiden, so ist der rechtsseitige Werth im Punkte $P$ unbestimmt.

Ganz in derselben Weise ergiebt sich mittels eines links von $P$ angenommenen Punktes $Q$ der linksseitige Werth in $P$, welcher ebenfalls bestimmt oder unbestimmt sein kann. An dem gemeinsamen Endpunkte zweier zusammenstossenden Stetigkeitsbögen hat also die Function stets zwei verschiedene Werthe, insofern wir nämlich auch zwei unbestimmte oder einen bestimmten und einen unbestimmten Werth als verschieden betrachten. Dagegen können an einem Häufungspunkte beide Werthe gleich sein, wie z. B. wenn die Function, graphisch dargestellt, eine Art Treppe bildet, deren Stufenbreite und Stufenhöhe in einem Punkte (der dann ein Häufungspunkt ist) gegen Null convergirt. Im Innern der Stetigkeitsbögen sind der rechtsseitige und der linksseitige Werth überall gleich.

Auf einem Theilbogen $RS$ nennen wir den linksseitigen Werth in $R$ und den rechtsseitigen in $S$ innere, die beiden anderen Werthe in $R$ und $S$ äussere Endwerthe. Sämmtliche Functionswerthe auf einem Stetigkeits- oder Theilbogen einschliesslich der inneren Endwerthe nennen wir Theilbogenwerthe, die übrigen Zwischenwerthe.

Man wird bemerken, dass durch vorstehende Feststellungen ausser den Functionen, deren Unstetigkeitspunkte einen Theil der Kreislinie unendlich klein theilen, auch solche mit isolirten Werthen ausgeschlossen sind.

**IX.** Sehen wir jetzt, wie sich die in VIII beschriebenen Functionen bei dem Versuche verhalten, dieselben zu integriren. Das Integral derselben über irgend einem Bogen verstehen wir in folgender Weise. Der Bogen wird in eine endliche Anzahl Bögen getheilt, jeder Theil (Elementartheil) mit dem Functionswerthe in irgend einem seiner Punkte multiplicirt und die Producte (Elemente) addirt. In Punkten, wo die Function zwei verschiedene Werthe hat, kann man einen von beiden oder auch einen zwischenliegenden Werth nehmen. Ist einer derselben

oder sind beide unbestimmt, so hat man ebenfalls irgend einen Werth zu nehmen, welcher innerhalb der Grenzen liegt, in welchen die Function in unendlicher Nähe des Punktes bleibt. Die erhaltene Summe nennen wir einen Näherungswerth des Integrals Die Grösse des Näherungswerthes ist abhängig von der Anzahl der Elementartheile, dem Grössenverhältniss derselben und der Wahl des Functionswerthes auf jedem. Wir nennen dies die drei Argumente des Näherungswerthes. Die folgenden Näherungswerthe werden ganz auf dieselbe Weise erhalten, indem man von einem zum andern die drei Näherungsargumente sich in irgend einer Weise ändern lässt, mit der Einschränkung jedoch, dass die Zahl der Elementartheile stets zunehmen und alle zuletzt unendlich klein werden müssen. Je nachdem man also die Näherungsargumente von einem Näherungswerthe zum andern wählt, kann man verschiedene Reihen von Näherungswerthen erhalten. Führen diese nun alle zu ein und demselben bestimmten Grenzwerthe, so ist dieser der Werth des gesuchten Integrals. Im entgegengesetzten Falle hat das Integral keinen bestimmten Werth.

Die dieser Definition gemäss über irgend einen Bogen ausgeführte Integration führt immer zu demselben Resultate, als wenn man über den einzelnen Theilen des in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegten Bogens integrirt und die Ergebnisse addirt. Je nachdem das Gesammtintegral bestimmt oder unbestimmt ist, ist es auch diese Summe.

Um nun zu entscheiden, ob das Integral bestimmt oder unbestimmt ist, und um im ersteren Falle den Werth desselben zu erhalten, haben wir folgende beiden Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn $\delta$ eine beliebig geringe Grösse ist, so kann immer $n$ so gross genommen werden, dass die Summe derjenigen Zwischenbögen $n^{\text{ter}}$ Ordnung, in deren jedem die Differenz des grössten und kleinsten Functionswerthes geringer als $\delta$ ist, beliebig nahe $= 0$ wird. In diesem Falle hat das Integral einen bestimmten Werth.

Beweis. Wir nehmen $n$ gleich einer bestimmten Zahl und setzen die Summe derjenigen von den $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen, in welchen, d. h. in jedem einzelnen, die Differenz der Functionswerthe geringer als $\delta$ ist, $= B$, die Summe der übrigen $= b$. Alsdann bilden wir in irgend einer Weise die Näherungswerthe des Integrals. Jeden Näherungswerth zerlegen wir in folgende Theile: 1. die Summe der Elemente, welche weder ganz den Theilbögen von der ersten bis zur $n^{\text{ten}}$ Grösse, noch ganz den Zwischenbögen $n^{\text{ter}}$ Ordnung angehören; 2. die Summe der Elemente, welche ganz den Theilbögen angehören; 3. die Summe der Elemente, welche ganz auf denjenigen Zwischenbögen $n^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, deren Summe $= B$ angenommen ist; 4. die Summe der Elemente, welche ganz den übrigen $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen angehören, die zusammen $= b$ angenommen sind.

Die erste Summe hat in der Reihe der Näherungswerthe zur Grenze Null, weil die Zahl derselben nie grösser als die Zahl der Endpunkte der Stetigkeitsbögen von der ersten bis zur $n^{ten}$ Grösse, also eine bestimmte endliche Zahl ist. Aus demselben Grunde hat auch die zweite Summe eine bestimmte Grenze, nämlich das Integral über den Stetigkeitsbögen bis zur $n^{ten}$ Ordnung; denn es werden hierbei immer nur Theile der Elemente der vorigen Summe vernachlässigt. In der dritten Summe können irgend zwei Näherungswerthe nicht um mehr als $B\delta$ verschieden sein, und in der vierten nicht um mehr als $bD$, wenn $D$ die beträchtlichste Differenz von Functionswerthen ist, welche in der Function $f(\gamma)$ überhaupt vorkommt. Wenn man also die Näherungswerthe ins Unendliche verfolgt, so werden die Verschiedenheiten derselben zuletzt geringer, als eine von $\overset{+}{B}\overset{+}{\delta} + b\overset{+}{D}$ beliebig wenig verschiedene Grösse. Nun konnte aber $n$ beliebig gross genommen werden, und da hierdurch $b$ und $\delta$ beliebig gering werden, während $D$ constant ist und $B$ nicht grösser als $2\pi$ wird, so ist hiermit erwiesen, dass die Schwankungen der Näherungswerthe des Integrals zuletzt beliebig unbedeutend werden, dass demnach das Integral einen bestimmten Werth hat.

Ferner können wir nun auch ein Verfahren angeben, den Werth des Integrals in diesem Falle wirklich zu erhalten. Wir integriren über den Theilbögen in der Reihenfolge ihrer Grösse, also zuerst über der ersten Einschaltung $b_1$, dann über $b_2$ u. s. w. bis $b_n$ und bilden die Summe dieser Integrale:

$$\int\limits_1 f(\gamma)\,d\gamma + \int\limits_2 f(\gamma)\,d\gamma \ldots + \int\limits_n f(\gamma)\,d\gamma.$$

In jedem der Zwischenräume nehmen wir die Function constant und gleich irgend einem Mittelwerthe zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe der Function in diesem Zwischenraume. Wir integriren dann über sämmtlichen Zwischenräumen und bezeichnen das Integral mit $\int\limits^{\overset{n}{\smile}} f(\gamma)\,d\gamma$. Dann ist

$$\int\limits_1 f(\gamma)\,d\gamma + \int\limits_2 f(\gamma)\,d\gamma \ldots + \int\limits_n f(\gamma)\,d\gamma + \int\limits^{\overset{n}{\smile}} f(\gamma)\,d\gamma$$

eine Summe, welche, wenn $n$ ins Unendliche wächst, einen bestimmten Grenzwerth hat, nämlich den Werth des gesuchten Integrals. Es ergiebt sich dies unmittelbar aus obigem Beweise der Existenz des letzteren. Wenn man nämlich in jedem der $n^{ten}$ Zwischenbögen die Function gleich einem Mittelwerthe nimmt, so ist dieser in denjenigen Zwischenbögen, deren Summe $= B$ ist, von allen Functionswerthen um ein Geringeres als $\delta$ und in den übrigen, deren Summe $= b$ ist, um ein Geringeres als $D$ verschieden. Der bei der Integration begangene Fehler ist daher ge-

ringer als $B\overset{+}{\delta}+b\overset{+}{D}$ und wird somit für $n=\infty$ unendlich gering. Die Grenze obiger Summe für $n=\infty$ ist demnach in der That der Werth des vollständigen Integrals.

2. Nehmen wir jetzt an, es sei eine bestimmte Grösse $\delta$ angebbar, so dass die Summe der $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen, in welchen um mehr als $\delta$ verschiedene Functionswerthe vorkommen, bei noch so grossem $n$ nicht kleiner, als eine bestimmte Grösse $b$ wird. Wir theilen jeden der Theilbögen bis zur $n^{\text{ten}}$ Grösse in eine bestimmte Zahl $=m$ gleiche Theile und nehmen diese Theile, sowie die $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen als Elementartheile. Alsdann bestimmen wir zwei Näherungswerthe des Integrals, indem wir bei beiden in den auf den Theilbögen befindlichen Elementartheilen denselben Functionswerth, in jedem der Zwischenbögen aber das eine Mal den grössten, das andere Mal den kleinsten Functionswerth nehmen. Die Differenz dieser beiden Näherungswerthe ist dann mindestens $=b\,\delta$. Lassen wir jetzt $n$ und $m$ beide ins Unendliche wachsen, so werden sämmtliche Elementartheile unendlich gering und die Summe der Elemente müsste also eine bestimmte Grenze haben, wenn ein bestimmter Integralwerth existiren sollte. Nun bleiben aber jedesmal die beiden auf obige Weise bestimmten Näherungswerthe um mindestens $b\delta$ verschieden; mithin besteht ein bestimmter Integralwerth nicht.*

Um für solche Integrationen Beispiele zu geben, wollen wir auf der nach VI, S. 197, getheilten Kreislinie eine Function in folgender Weise definiren.

Auf der ersten Einschaltung nehmen wir die Function überall $=a+c$ und auf der $n^{\text{ten}}$ überall $=a+c^n$, wo $a$ eine beliebige reelle Grösse, $1>c>0$. Auf den Stetigkeitsbögen sind hierdurch die Werthe der Function sämmtlich bestimmt. Da diese aber zusammen nur die Hälfte der Kreislinie ausmachen, so ist die Function nur auf Bögen definirt, welche zusammen $=\pi$ sind. Die andere Hälfte, auf welcher die Function nicht unmittelbar definirt ist, besteht jedoch nur aus Punkten, da in keinem noch so kleinen zusammenhängenden Bogen die Function nicht definirt ist.

Es sei $P$ die Mitte zwischen zwei benachbarten Theilbögen irgend einer Einschaltung, also ein Punkt, der niemals, wie weit man auch die Einschaltungen fortsetzen mag, Endpunkt eines Theilbogens wird. Man kann denselben in einen so kleinen Bogen einschliessen, dass in diesem blos Theilbögen von beliebig späten Einschaltungen liegen, in einen Bogen also, in welchem sämmtliche definirte Werthe der Function beliebig nahe $=a$ sind. Beide Werthe im Punkte $P$ sind also, wenn die Function den Einschränkungen in VIII unterworfen sein soll, ebenfalls $=a$; der Punkt $P$ ist daher ein unechter Stetigkeitspunkt. Wenn ferner

* Man vergl. Riemann, Mathematische Werke, S. 226.

$P$ der Endpunkt eines Stetigkeitsbogens, so ist in demselben nur der äussere Werth nicht unmittelbar definirt. Zwischen $P$ und einem ausserhalb des Stetigkeitsbogens nahe an $P$ genommenen Punkte $Q$ hat aber die Function Werthe, welche durch Verkleinerung des Bogens $PQ$ beliebig nahe $= a$ werden; mithin ist auch der äussere Werth im Punkte $P = a$.

Obiger Bedingung der Integrirbarkeit genügt diese Function, da man $n$ so gross nehmen kann, dass in sämmtlichen Zwischenbögen die Functionswerthe beliebig wenig von $a$ und also auch von einander verschieden sind. Wenden wir nun das obige Integrationsverfahren an, so ist das Integral auf den $n^{\text{ten}}$ Theilbögen $= b_n(a + c^n)$. Nun ist aber (S. 199) $b_n = \frac{\pi}{2^n}$, also jenes Integral $= \frac{\pi}{2^n}(a + c^n) = \frac{a\pi}{2^n} + \pi\left(\frac{c}{2}\right)^n$, mithin das Integral über sämmtlichen Theilbögen bis zur $n^{\text{ten}}$ Grösse

$$= \frac{a\pi}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{c\pi}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^n}{1 - \frac{c}{2}}.$$

Die Theilbögen sind zusammen $= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$, die Zwischenbögen also $= 2\pi - \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = [1 + (\frac{1}{2})^n]\pi$. Wenn wir demnach in den Zwischenbögen überall $f(\gamma)$ constant $= a'$ nehmen, wo $a'$ eine Mittelgrösse der Zwischenwerthe, so ist das gesammte Integral

$$= a\pi[1 - (\tfrac{1}{2})^n] + c\pi \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^n}{2 - c} + a'[1 + (\tfrac{1}{2})^n]\pi,$$

welcher Ausdruck für $n = \infty$, also $a' = a$,

$$= 2a\pi + \frac{c\pi}{2 - c}$$

wird. Dies ist also der Werth des gesuchten Integrals.

Nehmen wir dagegen die Function auf der ersten, dritten, fünften u. s. w. Einschaltung etwa $= 1$, auf der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. $= 2$, so sind die grössten Verschiedenheiten der Functionswerthe in jedem der $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen, wie gross auch $n$ sei, $= 1$ und da die Summe dieser Zwischenbögen stets grösser als $\pi$ bleibt, so ist das Integral unbestimmt.

Es sei ferner die Function auf jedem Theilbogen durch eine Wellenlinie dargestellt. Die Wellenhöhe sei immer dieselbe, etwa $= 1$; die Wellenlänge sei auf jedem Theilbogen bei der mittelsten Welle etwa $=$ der halben Länge des Bogens, bei jeder folgenden nach beiden Seiten $\frac{1}{2}$ der vorigen, so dass also nach den Enden des Theilbogens hin die

Wellenlänge $=0$ wird. Die Zwischenwerthe behalten auch hier eine grösste Verschiedenheit $=1$ und das Integral ist deshalb wieder unbestimmt. Wenn dagegen auch die Wellenhöhe auf jedem Theilbogen nach seinem Ende hin bis zu Null abnimmt, oder wenn sie bis zu einer Grösse abnimmt, welche von der ersten Einschaltung an bis zur unendlichsten gegen Null convergirt, so werden die Zwischenwerthe unendlichster Ordnung $=0$ und das Integral hat einen bestimmten Werth.

Ganz in derselben Weise, wie das Integral $\int f(\gamma)\,d\gamma$, wird auch das Integral $\int f(\gamma).\varphi(\gamma)\,d\gamma$ gebildet, wenn $\varphi(\gamma)$ eine überall endliche und stetige Function, $f(\gamma)$ aber nur in der früheren Weise eingeschränkt ist. Die Theilbögen sind hier die nämlichen, wie für $f(\gamma)$ und die Bedingungen der Integrabilität stimmen mit denjenigen für $f(\gamma)$ allein überein, es sei denn, dass $\varphi(\gamma)$ auf irgendwelchen Bögen $=0$ wäre, wo dann auf diesen die Unstetigkeitspunkte fortfallen und die Bedingungen nur für die übrigen erforderlich sind.

Insbesondere haben Integrale von der Form $\int f(\gamma)\cos(\gamma-t)\,d\gamma$, wie sie in der Fourier'schen Reihe vorkommen, nur dann einen bestimmten Werth, wenn $\int f(\gamma)\,d\gamma$ einen solchen hat. In den jetzt folgenden Erörterungen über die Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe sollen deshalb die nicht integrablen Functionen ausgeschlossen sein.

**X.** In einem Punkte $P$ habe die Function $f(\gamma)$ den linksseitigen Werth $p$, in einem Punkte $Q$ links von diesem den Werth $q$. Man bilde den Quotienten $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ und lasse den Punkt $Q$ sich dem Punkte $P$ stetig nähern, so dass $f(q)$ alle Werthe von $f(\gamma)$ zwischen $Q$ und $P$ erhält. In solchen Punkten, wo $f(\gamma)$ nicht einen einzigen bestimmten Werth hat, darf man für $f(q)$ irgend einen der Werthe von $f(\gamma)$ und im Falle von Unbestimmtheit irgend einen Werth innerhalb der Schranken von $f(\gamma)$ setzen. Wenn nun, wie man auch die Werthe von $f(\gamma)$ wählen mag, obiger Quotient einen bestimmten Grenzwerth erhält, so nennen wir diesen den linksseitigen Werth des Differentialquotienten oder der Fluxion von $f(\gamma)$ im Punkte $P$. Hat der Quotient keinen bestimmten oder einen unendlich grossen Grenzwerth, so ist der linksseitige Werth der Fluxion im Punkte $P$ unbestimmt oder unendlich gross. In entsprechender Weise erhält man den rechtsseitigen Werth der Fluxion, indem man den Punkt $Q$ rechts von $P$ nimmt.

Die Fluxion von $f(\gamma)$ ist also eine Function von $\gamma$, die in jedem Punkte zwei Werthe hat, welche einzeln bestimmt, unbestimmt, endlich oder unendlich gross sein können. Ausserdem kommen Fälle vor, wo

die Fluxion in einem Punkte drei oder vier verschiedene Werthe hat, unter welchen dann aber ein oder zwei isolirte sind. Und zwar sind dies dann die auf obige Weise bestimmten, während die mit den benachbarten Werthen stetig zusammenhängenden durch letztere mit definirt sind. Wir nennen die Function $f(\gamma)$ in einem Punkte stetig oder unstetig fluent, je nachdem ihre Fluxion in diesem Punkte endlich und stetig ist oder nicht. In einem Bogen, in welchem die Function überall unstetig fluent ist oder welcher wenigstens durch Punkte unstetiger Fluenz in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist, nennen wir die Function fluxionslos.

**XI.** Am Rande der Kreisfläche vom Radius $=1$ sei eine reelle Function $f(\gamma)$ gegeben, welche den in VIII festgesetzten Einschränkungen unterworfen und überdies nach IX integrabel, sonst aber ganz beliebig ist. Wir wollen auf der Kreisfläche eine reelle Ortsfunction $v$ bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

Sie soll nebst ihren sämmtlichen nach beliebigen Richtungen genommenen Differentialquotienten überall endlich, bestimmt und stetig sein. Wird dieselbe nach zwei beliebigen auf einander senkrechten Richtungen, also nach den rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $y$ differenzirt, so sollen ihre zweiten Differentiale überall der Gleichung genügen

1) $$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} = 0.$$

Endlich wird verlangt, dass bei Annäherung eines Punktes an den Rand der Werth von $v$ in diesem Punkte gegen den von $f(\gamma)$ in dem Randpunkte convergirt oder, falls $f(\gamma)$ in diesem nicht einen bestimmten Werth hat, zuletzt immer zwischen den Werthen von $f(\gamma)$ in einem den Punkt einschliessenden beliebig kleinen Bogen bleibt.

Eine solche Function erhalten wir auf folgende Weise.

In dem Kreise Fig. 1 vom Radius $=1$ zählen wir den Centriwinkel $\gamma$ und den excentrischen Winkel $\delta$ von zwei parallelen Richtungen $MA$ und $OB$ aus nach links. Wir setzen, um den Werth von $v$ im Punkte $O$ zu erhalten,

2) $$v = \int \frac{f(\gamma)}{\pi} \left[ d\delta - \frac{d\gamma}{2} \right],$$

wo die Winkel $\gamma$ und $\delta$ und der Functionswerth $f(\gamma)$ zum Punkte $P$ der Kreislinie gehören und das Integral um den ganzen Kreis zu nehmen ist. Um das Verhalten dieser Function bei der Annäherung von $O$ an einen Randpunkt kennen zu lernen, legen wir durch $O$ eine Sehne $DE$ und integriren über den beiden Bögen, worin diese Sehne den Kreis theilt, einzeln. Da $d\delta$ stets grösser ist, als $\frac{d\gamma}{2}$, so erhalten wir das Integral über jedem der beiden Bögen, indem wir statt $f(\gamma)$ ein Mittleres zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe von $f(\gamma)$ auf dem

Bogen setzen. Nennen wir diese Mittelwerthe $M_1$ und $M_2$, so ist also das Integral über $DQE$

$$\int\limits_{DE}\frac{f(\gamma)}{\pi}\left(d\delta-\frac{d\gamma}{2}\right)=\frac{M_1}{\pi}\left(\pi-\frac{DQE}{2}\right)$$

und dasjenige über $ELD$

$$\int\limits_{ED}\frac{f(\gamma)}{\pi}\left(d\delta-\frac{d\gamma}{2}\right)=\frac{M_2}{\pi}\left(\pi-\frac{ELD}{2}\right).$$

Wenn nun auf irgend eine Weise der Punkt $O$ dem Rande unendlich nahe rückt und zugleich die Sehne $DE$ unendlich klein wird, so wird das Integral über dem grösseren Bogen gleich Null, dasjenige über dem andern gleich dem zu diesem gehörigen Mittelwerthe. In einem Randpunkte wird also die Function $v$ immer gleich einem Mittelwerthe der Function $f(\gamma)$ in unmittelbarer Nachbarschaft dieses Punktes, wobei es ganz gleichgiltig ist, ob $f(\gamma)$ hier einen oder zwei, bestimmte oder unbestimmte Werthe hat.

Der Punkt $O$ möge sich in der Richtung $OQ$ dem Rande nähern, während die Sehne $DE$ parallel fortrückt. Das Integral über dem Bogen $ELD$ wird $=0$, dasjenige über $DQE$ wollen wir in zwei zerlegen, über $DQ$ und $QE$. Wenn wir mit $w_1$ und $w_2$ wieder Mittelwerthe von $f(\gamma)$ resp. auf $DQ$ und $QE$ bezeichnen, so werden diese beiden Integrale resp.

$$=\frac{w_1}{\pi}\left(\mu-\frac{DQ}{2}\right)\text{ und }\frac{w_2}{\pi}\left(\nu-\frac{QE}{2}\right).$$

Wenn nun $f(\gamma)$ in $Q$ zwei bestimmte Werthe $D$ und $E$ hat, und man lässt $O$ in gerader Linie gegen $Q$ rücken bis zum Zusammenfallen mit diesem, so wird der Werth von $v$ im Punkte $Q$

$$V=\frac{\mu D+\nu E}{\pi}.$$

Geschieht die Annäherung von $O$ an einen Randpunkt in radialer Richtung (welcher Fall uns hier hauptsächlich interessirt), so wird, da hier $\mu=\nu=\frac{\pi}{2}$, der Werth von $v$ am Rande die halbe Summe aus den Werthen von $f(\gamma)$ in $Q$.*

Bei der Annäherung von $O$ an einen Randpunkt, in welchem die Function $f(\gamma)$ einen oder zwei unbestimmte Werthe hat, lässt sich über den Randwerth von $v$ allgemein nichts behaupten; derselbe kann eine bestimmte Grösse oder ebenfalls unbestimmt sein.

* Man vergleiche meine Arbeit „Ueber die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen" in Bd. 26 dieser Zeitschrift S. 122. Dass die Function $v$ der Gleichung 1) genügt, ist dort gezeigt.

Wenn wir obigen Winkel $\delta$ durch Polarcoordinaten $r$, $t$ ausdrücken, so wird die Gleichung 1)

$$v=\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\gamma-t)}\,d\gamma$$

oder, da $r<1$ ist,

$$v=\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{2\pi}\,d\gamma+r\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\cos(\gamma-t)+r^2\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\cos 2(\gamma-t)+\dots$$

Diese Reihe, welche für $r=1$ die aus $f(\gamma)$ abgeleitete Fourier'sche Reihe darstellt, wollen wir $S_r$ nennen, den Ausdruck, woraus sie entstanden ist, $V$. Die Reihe $S_r$ ist absolut convergent und daher stets $=V$. Der Ausdruck $V$ aber geht am Rande überall da, wo $f(\gamma)$ keinen unbestimmten Werth hat, in $\frac{f(t+o)+f(t-o)}{2}$ über, wenn $r$ gegen 1 convergirt. Die Reihe $S_r$ wird daher ebenfalls für $r<=1$ gleich der halben Summe der Randwerthe.

An Stellen dagegen, wo $f(\gamma)$ unbestimmt ist, ist $\lim\int\frac{f(\gamma)}{\pi}\left[d\delta-\frac{d\gamma}{2}\right]$ = einem Mittelwerthe der $f(\gamma)$ in der Nähe des Randpunktes; es wird also $\lim v$ nicht grösser als der grösste und nicht kleiner als der kleinste Werth von $f(\gamma)$ innerhalb eines beliebig kleinen, den Randpunkt einschliessenden Bogens. Da nun die Reihe $S_r$ stets $=V$ bleibt, so kann auch $\lim S_r$ nur ein Mittelwerth von $f(\gamma)$ sein. In keinem Falle ist also der Randwerth von $S_r=+\infty$ oder $=-\infty$. Hieraus folgt aber, dass auch die Fourier'sche Reihe

$$S_1=\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{2\pi}\,d\gamma+\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\cos(\gamma-t)\,d\gamma+\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\cos 2(\gamma-t)\,d\gamma+\dots$$

$$=\lim_{m=\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma$$

an keiner Stelle, d. h. für keinen Werth von $t$ unendlich gross ist. Denn wenn die Reihe $S_r$ für $r=1$ einen unendlich grossen Werth hätte, so müsste sie auch für $r<=1$ nach IV unendlich gross werden. Wenn demnach die Fourier'sche Reihe nicht convergent ist, so kann sie nur unbestimmt sein, was freilich nicht ausschliesst, dass sie einerseits oder beiderseits unbegrenzte Unbestimmtheit habe.

Wir werden künftig immer einen Randpunkt und den zugehörigen Werth von $\gamma$ mit gleichnamigen Buchstaben bezeichnen. Insbesondere soll in der Fourier'schen Reihe der Randpunkt, für welchen die Reihe genommen wird, immer mit $T$, der zugehörige Werth von $\gamma$ mit $t$ bezeichnet werden. Den dem Punkte $T$ diametral gegenüberliegenden Punkt nennen wir $T'$. Wenn die Integrale der Reihe nicht über der ganzen Kreislinie, sondern nur über einem Theile derselben genommen werden, so sagen wir, die Reihe sei über diesem Theile genommen.

**XII.** Die Fourier'sche Reihe werde über einer endlichen Anzahl von Bögen genommen, in welchen und an deren Enden der Punkt $T$ nicht liegt. Die Function $f(\gamma)$ sei in jedem dieser Bögen überall bestimmt und stetig. Der Differentialquotient derselben sei überall endlich und er habe entweder in allen Punkten nur einen bestimmten Werth oder in einer endlichen Anzahl von Punkten zwei verschiedene endliche Werthe. Die Fourier'sche Reihe ist dann $=0$. Wenn ferner die Reihe über einem solchen Bogen $AB$ genommen wird und dieser ein Theil des Bogens $TT'$ ist, so ist der $m^{\text{te}}$ Stufenwerth der Reihe, wenn man mit $f$ und $f'$ die beträchtlichsten Werthe resp. von $f(\gamma)$ und $\frac{df(\gamma)}{d\gamma}$ bezeichnet, um weniger als

$$\frac{2\overset{+}{f}+(\overset{+}{f'}+\tfrac{1}{2}\overset{+}{f})(b-a)}{\pi(2m+1)\sin^2\frac{a-t}{2}}$$

von Null verschieden.

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen ist theilweise Integration zulässig und man erhält durch diese, wenn man $\frac{df(\gamma)}{d\gamma}=f'(\gamma)$ setzt,

$$\int_a^b \frac{f(\gamma)}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma$$

$$=-\frac{f(b)\cos\frac{2m+1}{2}(b-t)}{\pi(2m+1)\sin\frac{b-t}{2}}+\frac{f(a)\cos\frac{2m+1}{2}(a-t)}{\pi(2m+1)\sin\frac{a-t}{2}}$$

$$+\int_a^b \frac{f'(\gamma)\sin\frac{\gamma-t}{2}-\tfrac{1}{2}f(\gamma)\cos\frac{\gamma-t}{2}}{\pi(2m+1)\sin^2\frac{\gamma-t}{2}}\cos\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)\,d\gamma.$$

Da $f(\gamma)$, $f'(\gamma)$ und $\frac{1}{\sin\frac{\gamma-t}{2}}$ innerhalb des Integrationsintervalles bestimmte Schranken nicht übersteigen, so wird dieser Ausdruck $=0$ für $m=\infty$. Wird die Reihe über mehreren solchen Bögen genommen, so ist sie für jeden einzelnen, daher auch für alle zusammen $=0$. Nimmt man sie aber nur über einem solchen Bogen $AB$, welcher ein Theil von $TT'$ ist, so ist $\sin\frac{a-t}{2}$ der kleinste Werth von $\sin\frac{\gamma-t}{2}$. In obiger Gleichung ist dann das Resultat der ausgeführten Integration geringer als

$$\frac{2\overset{+}{f}}{\pi(2m+1)\sin\frac{a-t}{2}}.$$

Das nicht ausgeführte Integral ist gleich einem Mittelwerthe des Integranden mal $\int_a^b d\gamma = b-a$, mithin geringer als $\frac{(\overset{+}{f'}+\frac{1}{2}\overset{+}{f})(b-a)}{\pi(2m+1)\sin^2\frac{a-t}{2}}$.

Der $m^{\text{te}}$ Stufenwerth der Reihe ist also geringer als

$$\frac{2\overset{+}{f}+(\overset{+}{f'}+\frac{1}{2}\overset{+}{f})(b-a)}{\pi(2m+1)\sin^2\frac{a-t}{2}}.$$

**XIII.** Lassen wir die Function $f(\gamma)$ wieder von der allgemeinen, in XI festgesetzten Beschaffenheit sein. Wir nehmen in jedem der Theilbögen bis zur $n^{\text{ten}}$ Grösse zwei Punkte nahe an den Enden. Den Bogen zwischen zwei solchen Punkten nennen wir Theilbogenausschnitt, die übrig bleibenden Stücke Theilbogenreste. Wie gross auch $n$ sein mag und wie klein die Theilbogenreste sind, es kann immer eine überall stetige und stetig fluente Function bestimmt werden, welche in allen Theilbogenausschnitten überall um weniger als eine vorher gegebene noch so geringe Grösse $\varepsilon$ von $f(\gamma)$ verschieden ist. Diese Function wird dargestellt durch die Werthe von $v$ auf den entsprechenden, d. h. durch dieselben Radien begrenzten Ausschnitten eines zum Rande concentrischen Kreises und sie erhält obige Eigenschaft dadurch, dass man diesen Kreis dem Rande hinreichend nahe nimmt.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass bei stetiger Vergrösserung des concentrischen Kreises in jedem Punkte eines Theilbogenausschnittes ohne Ausnahme die Werthe von $v$ auf demselben stetig in die Werthe von $f(\gamma)$ übergehen. Die Annahme, dass in irgend einem Punkte $v$ dem Randwerthe nicht beliebig nahe komme, würde hiermit in Widerspruch stehen.

**XIV.** Wenn wir den Punkt $T$, für welchen die Fourier'sche Reihe genommen wird, in einen beliebig kleinen Bogen $AB$ einschliessen, so ist die Reihe über dem ganzen übrigen Bogen $BA = 0$.

Beweis. Der Bogen $BA$ enthält entweder nur ganze Theilbögen oder an seinen Enden Stücke von solchen; in letzterem Falle nehmen wir diese mit zu den Theilbögen von $BA$ und ordnen diese sämmtlich nach ihrer Grösse. Alsdann nehmen wir auf sämmtlichen Theilbögen von $BA$ bis zur $n^{ten}$ Grösse Ausschnitte, die wir zusammen mit $A$, die Summe der Reste mit $R$ bezeichnen wollen. Auf diesen Ausschnitten setzen wir die Function $f(\gamma) = \varphi(\gamma) + \psi(\gamma)$, wo $\varphi(\gamma)$ eine überall stetige und stetig fluente Function nach XIII und $\psi(\gamma)$ überall geringer ist, als eine sehr geringe Grösse $\varepsilon$. Setzen wir nun über den Ausschnitten

$$1)\qquad \int \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma - t)}{2\sin\frac{\gamma - t}{2}} d\gamma = \frac{\eta}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}},$$

so können wir nach XII $m$ so gross nehmen, dass $\eta$ ein beliebig geringer Werth wird.

Da ferner $\psi(\gamma)$ geringer als $\varepsilon$, so ist, unter $\alpha$ den kleineren der Bögen $AT$ und $TB$ verstanden,

$$\int \frac{\psi(\gamma)}{\pi} \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma - t)}{2\sin\frac{\gamma - t}{2}} d\gamma$$

über den Ausschnitten genommen, für jedes $m$ geringer als

$$2)\qquad \frac{\varepsilon}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}} \int_0^A d\gamma = \frac{\varepsilon A}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Nehmen wir jetzt das Integral über den Resten der Theilbögen. Wenn wir den beträchtlichsten Werth, welchen die Function $f(\gamma)$ überhaupt hat, $G$ nennen, so ist der $m^{te}$ Stufenwerth der Reihe über den Theilbogenresten für jedes $m$ geringer als

$$3)\qquad \frac{GR}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

In den $n^{ten}$ Zwischenbögen setzen wir die Function $f(\gamma)$ wieder aus zwei Theilen $\varphi_1(\gamma)$ und $\psi_1(\gamma)$ zusammen. $\varphi_1(\gamma)$ sei in jedem Zwischenbogen constant und gleich dem kleinsten Werth von $f(\gamma)$ in dem Zwischenbogen; $\psi_1(\gamma)$ ist daher überall positiv. Es sei $\zeta$ eine sehr geringe positive Grösse. Diejenigen Zwischenbögen, in welchen $\psi_1(\gamma)$ überall kleiner

als $\zeta$ ist, wollen wir zusammen $=Z$, die übrigen, in welchen der grösste Werth von $\psi_1(\gamma)$ nicht kleiner als $\zeta$ und nicht beträchtlicher als $2\overset{+}{G}$ ist, zusammen $=z$ nehmen. Wenn wir nun über sämmtlichen Zwischenbögen

$$4)\qquad \int \frac{\varphi_1(\gamma)}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma = \frac{\varkappa}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}$$

setzen, so kann nach XII $m$ so gross genommen werden, dass $\varkappa$ beliebig nahe verschwindet.

Ueber den Zwischenbögen, deren Summe $=Z$, ist für jedes $m$

$$5)\qquad \int \frac{\psi_1(\gamma)}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma \lesssim \frac{Z\zeta}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}},$$

und über denjenigen, deren Summe $=z$,

$$6)\qquad \int \frac{\psi_1(\gamma)}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma \lesssim \frac{2zG}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Der ganze $m^{te}$ Stufenwerth der Reihe ist daher geringer, als die Summe der Werthe 1) bis 6) zusammen, mithin geringer, als

$$7)\qquad (\overset{+}{\eta}+\overset{+}{\varepsilon}A+\overset{+}{G}\overset{-}{R}+\overset{+}{\varkappa}+Z\zeta+2z\overset{+}{G})\frac{1}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Die Function $f(\gamma)$ ist nun integrirbar, d. h., wie gering auch $\zeta$ genommen sein mag, man kann immer $n$ so gross nehmen, dass $z$ ebenfalls beliebig gering wird. Um nun in dem Ausdrucke 7) alle sechs Glieder beliebig gering zu machen, nehmen wir zuerst $\zeta$ sehr gering, dann $n$ so gross, dass $z \lesssim \zeta$ wird. Ferner nehmen wir die Ausschnitte der Theilbögen bis zur $n^{ten}$ Ordnung so gross, dass $R<\zeta$, und den concentrischen Kreis dem Rande so nahe, dass $\varepsilon \lesssim \zeta$ wird. Endlich geben wir dem $m$ einen hinreichend grossen Werth, damit auch $\eta$ und $\varkappa$ zusammen geringer als $\zeta$ werden. Der Ausdruck 7) ist also dann geringer, als

$$(1+A+3\overset{+}{G}+Z)\frac{\zeta}{2\pi\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Da nun $A$, $G$ und $Z$ über bestimmte Werthe nicht hinausgehen, so kann offenbar der ganze Ausdruck beliebig gering gemacht werden. Der Gesammtwerth der Reihe ist also geringer, als jede noch so unbedeutende Grösse, d. h. er ist $=0$.

**XV.** Wenn die Function $f(\gamma)$ eine Constante $= c$ ist, so besteht die über dem Bogen $TT'$ genommene Fourier'sche Reihe blos aus dem ersten Gliede und alle Stufenwerthe derselben sind gleich dem halben Werthe von $f(\gamma) = \frac{c}{2}$. Nimmt man aber die Reihe blos über einem Bogen $TU < TT'$, so ist der $m^{te}$ Stufenwerth derselben von $\frac{c}{2}$ um weniger als

$$\frac{c}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}}$$

verschieden.

Beweis. Der $m^{te}$ Stufenwerth über dem Bogen $TU$ ist

$$1)\qquad S_m = \int_t^u \frac{c}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}}\,d\gamma$$

$$= \frac{c}{\pi}\left[\frac{u-t}{2} + \frac{\sin(u-t)}{1} + \frac{\sin 2(u-t)}{2} \ldots + \frac{\sin m(u-t)}{m}\right].$$

Die vollständige Reihe $(m=\infty)$ über dem Bogen $TT'$ ist $= \frac{c}{2}$. Denselben Werth erhält sie aber, wenn man sie blos über dem Bogen $TU$ nimmt, da sie nach XIV über dem Bogen $UT'$ Null ist. Es ist also

$$2)\qquad \frac{c}{2} = \frac{c}{\pi}\left[\frac{u-t}{2} + \frac{\sin(u-t)}{1} + \frac{\sin 2(u-t)}{2} + \ldots\right].$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die Gleichung 1), so erhält man

$$\frac{c}{2} - S_m = \frac{c}{\pi}\left[\frac{\sin(m+1)(u-t)}{m+1} + \frac{\sin(m+2)(u-t)}{m+2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{c}{\pi}\,\frac{1}{2\sin\frac{u-t}{2}}\left[\frac{\cos(m+\frac{1}{2})(u-t)}{m+1} - \frac{\cos(m+1\frac{1}{2})(u-t)}{(m+1)(m+2)}\right.$$

$$\left. - \frac{\cos(m+2\frac{1}{2})(u-t)}{(m+2)(m+3)} - \frac{\cos(m+3\frac{1}{2})(u-t)}{(m+3)(m+4)} - \ldots\right].$$

Die Reihe in der Klammer ist geringer als

$$\frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots = \frac{2}{m+1}.$$

Demnach ist

$$\frac{c}{2} - S_m \lessgtr \frac{c}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}}.$$

**XVI.** Wenn links von $T$ ein Punkt $U$ angenommen werden kann so nahe an $T$, dass in dem Bogen $TU$ die Function $f(\gamma)$ nie zu- oder

nie abnimmt, so ist die Fourier'sche Reihe, über dem Bogen $TT'$ genommen, convergent und gleich dem halben linksseitigen Werth $f(t+0)$ von $f(y)$ im Punkte $T$. Der $m^{te}$ Stufenwerth der blos über dem Bogen $TU$ genommenen Reihe ist von $\frac{1}{2}f(t+0)$ um weniger als

$$\frac{\overset{+}{f}(t+0)}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}}+\overset{+}{H}N$$

verschieden, wo $H$ der beträchtlichste Werth von $f(y)-f(t+0)$ in dem Bogen $TU$ und $N$ eine von $m$, $u$ und der besondern Beschaffenheit der Function $f(y)$ unabhängige Constante ist.

Beweis. Wir setzen $f(y)=f(t+0)+f_1(y)$, wo also $f(t+0)$ der linksseitige Werth von $f(y)$ im Punkte $T$ und $f_1(y)$ eine Function ist, welche in $T=0$ ist und in dem Bogen $TU$ entweder nie zu- oder nie abnimmt, also auch entweder nie grösser als Null oder nie kleiner als Null ist. Nehmen wir die Reihe blos über $TU$, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(y-t)}{2\pi\sin\frac{y-t}{2}}=Q_m \text{ setzen,}$$

1) $$\int_t^u f(y)\,Q_m\,dy=\int_t^u f(t+0)\,Q_m\,dy+\int_t^u f_1(y)\,Q_m\,dy.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist von $\frac{1}{2}f(t+0)$ nach XV um weniger als

2) $$\frac{f(t+0)}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}}$$

verschieden. Das zweite zerlegen wir in mehrere, so dass in dem Intervall eines jeden $\sin\frac{2m+1}{2}(y-t)$ dasselbe Zeichen behält, setzen also

$$\int_t^u f_1(y)\,Q_m\,dy=\int_t^{t+\frac{2\pi}{2m+1}} f_1(y)\,Q_m\,dm+\int_{t+\frac{2\pi}{2m+1}}^{t+2\frac{2\pi}{2m+1}} f_1(y)\,Q_m\,dy+\ldots+\int_{t+p\frac{2\pi}{2m+1}}^{u} f_1(y)\,Q_m\,dy.$$

Bezeichnen wir mit $m_0, m_1, \ldots m_p$ Mittelwerthe von $f_1(y)$ in den einzelnen Integrationsintervallen und mit $k_0, k_1, \ldots k_p$ die Werthe, welche die Integrale erhalten, wenn man aus den Integranden $f_1(y)$ fortlässt, so kann man obige Summe darstellen durch

$$\begin{aligned}&m_0k_0+m_1k_1+\ldots+m_pk_p\\=\tfrac{1}{2}[&m_0(2k_0+k_1)+m_1(k_1+k_2)+m_2(k_2+k_3)\ldots+m_{p-2}(k_{p-2}+k_{p-1})\\&+m_{p-1}(k_{p-1}+k_p)-(m_0-m_1)k_1-(m_1-m_2)k_2\ldots-(m_{p-2}-m_{p-1})k_{p-1}\\&-(m_{p-1}-2m_p)k_p].\end{aligned}$$

Die Integrale $k$ nehmen absolut beständig ab, sind aber abwechselnd positiv und negativ. Die Mittelgrössen $m$ nehmen entweder nie zu oder nie ab und sind im ersten Falle alle positiv, im zweiten alle negativ. Die Grössen $2k_0+k_1$, $k_1+k_2$, ... sind also alle positiv, $m_0-m_1$, $m_1-m_2$, ... $(m_{p-1}-2m_p)$ alle von gleichem Zeichen. Daher Obiges

$$3)\qquad =\tfrac{1}{2}M(2k_0+2k_1+\ldots+2k_{p-1}+k_p)-\tfrac{1}{2}(m_0-2m_p)K,$$

wo $M$ und $K$ Mittelwerthe resp. der $m$ und der $k$ sind. Die Reihe $2k_0+2k_1\ldots+2k_{p-1}+k_p$ ist abnehmend alternirend, also geringer als $2k_0$, dieses aber

$$=2\int\limits_t^{t+\frac{2\pi}{2m+1}}\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}},$$

also nach XV von 1 um weniger als

$$\frac{2}{\pi(m+1)\sin\frac{2\pi}{2m+1}}$$

verschieden, mithin geringer als

$$4)\qquad 1+\frac{2}{\pi(m+1)\sin\frac{2\pi}{2m+1}}.$$

Die Grösse $m_0-2m_p$ ist geringer als $2m_p$. Ferner ist $K$ geringer als $k_0$, also geringer als die Hälfte des Ausdrucks 4). Mithin ist der ganze Ausdruck 3) geringer als

$$\tfrac{1}{2}(\overset{+}{M}+\overset{+}{m}_p)\left[1+\frac{2}{\pi(m+1)\sin\frac{2\pi}{2m+1}}\right].$$

Die Grössen $M$ und $m_p$ liegen beide zwischen 0 und dem beträchtlichsten Werthe von $f_1(\gamma)$ in dem Bogen $TU$. Nennen wir letzteren $H$, so ist also $\int\limits_t^u f_1(\gamma)\,\varrho_m\,d\gamma$ geringer als

$$H\left[1+\frac{2}{\pi(m+1)\sin\frac{2\pi}{2m+1}}\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer bleibt endlich, wenn $m$ ins Unendliche wächst. Nennen wir den grössten Werth desselben $N$, so ist $\int\limits_t^u f_1(\gamma)\,\varrho_m\,d\gamma$

für jedes $m$ geringer als $HN$. Nehmen wir dies mit dem Ausdrucke 2) zusammen, so ist $\int_t^u f(\gamma)\, Q_m\, d\gamma$ von $\frac{1}{2}f(t+0)$ um weniger als

5) $$\frac{\overset{+}{f}(t+0)}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}} + \overset{+}{H}N$$

verschieden. Setzen wir nun $\int_u^{t'} f(\gamma)\, Q_m\, d\gamma = w'$, so ist der $m^{te}$ Stufenwerth der über dem ganzen Bogen $TT'$ genommenen Reihe von $\frac{1}{2}f(t+0)$ um weniger als

$$\frac{\overset{+}{f}(t+0)}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}} + \overset{+}{H}N + \overset{+}{w'}$$

verschieden. Wenn nun $m$ ins Unendliche wächst, so convergirt das erste Glied dieses Ausdrucks und nach XIV auch $w'$ gegen 0. Wir können also für $m$ einen so grossen Werth $m'$ nehmen, dass für $m = m'$ und für jedes $m > m'$ $\frac{\overset{+}{f}(t+0)}{\pi(m+1)\sin\frac{u-t}{2}} + \overset{+}{w'}$ geringer als $H$ wird. Dann ist also der $m^{te}$ und jeder höhere Stufenwerth der Reihe von $\frac{1}{2}f(t+0)$ um weniger als $HN+H$ verschieden. Lassen wir nun den Bogen $TU$ sich verkleinern, so wird $H$, d. h. der beträchtlichste Werth von $f(\gamma) - f(t+0)$ in dem Bogen $TU$, immer näher $= 0$. Obige Grösse wird also beliebig gering, woraus folgt, dass die über $TT'$ genommene Reihe sich von $\frac{1}{2}f(t+0)$ gar nicht unterscheidet.

**XVII.** Links von $T$ möge kein Punkt $U$ so nahe an $T$ genommen werden können, dass die Function in dem Bogen $TU$ nie zu- oder nie abnimmt. Dagegen möge der linksseitige Werth des Differentialquotienten von $f(\gamma)$ im Punkte $T$ eine bestimmte endliche Grösse sein. In diesem Falle ist die Reihe über dem Bogen $TT'$ ebenfalls $= \frac{1}{2}f(t+0)$.

Beweis. Wir führen denselben blos für den Fall, dass die Function $f(\gamma) = 0$ ist für $\gamma = t$. Denn wenn das nicht der Fall ist, so können wir sie wieder zusammensetzen aus einer Function, welche diese Eigenschaften hat, und einer Constanten, für welche letztere der Satz gilt.

Wir geben dem über $TU$, wo $U$ zwischen $T$ und $T'$, genommenen $m^{ten}$ Stufenwerthe die Form

$$\int_t^u \frac{(\gamma-t)\,f(\gamma)}{2\pi\sin\frac{\gamma-t}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)}{\gamma-t}\, d\gamma.$$

Die Function $\frac{(\gamma-t)f(\gamma)}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}}$, welche wir $F(\gamma)$ nennen wollen, wird dann ebenfalls $=0$ für $\gamma=t$. Auch hat der für den Bogen $TU$ genommene Differentialquotient von $F(\gamma)$ bei unendlich kleinem $TU$ einen bestimmten Grenzwerth, und zwar denselben, wie derjenige von $f(\gamma)$. Dies kann selbst in dem Falle, wo $f(\gamma)$ links von $T$ irgend eine Strecke weit stetig und stetig fluent ist, nicht durch Differenziren dargethan werden. Hierdurch würde man nur die etwaige Grenze erhalten, gegen welche der in einem Punkte $A$ links von $T$ genommene Differentialquotient convergirt, wenn $A$ dem $T$ unendlich nahe rückt. Es giebt aber Functionen (ähnlich der in Fig. 2, wo $A$ ein Berührungspunkt der beiden punktirten Curven ist, graphisch angedeuteten), bei welchen man hierdurch keinen bestimmten Werth erhält, während der unmittelbar in $T$ genommene Differentialquotient sehr wohl einen bestimmten Grenzwerth hat. Dieser ist dann als ein isolirter Werth des als Function von $\gamma$ betrachteten Differentialquotienten anzusehen. Um im gegenwärtigen Falle den linksseitigen Werth des Differentialquotienten von $F(\gamma)$ im Punkte $T$ zu erhalten, hat man ohne Rücksicht auf die besondere Beschaffenheit von $f(\gamma)$ die Function $F(\gamma)$ (da sie $=0$ ist für $\gamma=t$) durch $\gamma-t$ zu dividiren und $\gamma=t$ werden zu lassen. Hierbei wird $\lim\frac{\gamma-t}{2\sin\frac{\gamma-t}{2}}=1$ und $\frac{f(\gamma)}{\gamma-t}$ erhält, wie vorausgesetzt, einen bestimmten Werth. Nennen wir diesen $g$ und setzen wir

$$F(\gamma)=g(\gamma-t)+(\gamma-t)F_1(\gamma),$$

so ist $F_1(\gamma)$ eine Function, welche dadurch, dass man $U$ hinreichend nahe an $T$ nimmt, in dem ganzen Bogen $TU$ beliebig klein gemacht werden kann, da sonst $\frac{\Delta F(\gamma)}{\Delta\gamma}$ für $\gamma=t$ und $\Delta\gamma=0$ nicht $=g$ wäre. Setzen wir obigen Ausdruck für $F(\gamma)$ in den Integranden ein und zerlegen das Integral in die beiden

$$\int_t^u \frac{g}{\pi}\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)\,d\gamma \text{ und } \int_t^u \frac{F_1(\gamma)}{\pi}\sin\frac{2m+1}{2}(\gamma-t)\,d\gamma,$$

so ist unabhängig von $m$ das zweite geringer als

$$\frac{\mu}{\pi}\int_t^u d\gamma=\frac{\mu}{\pi}(u-t),$$

wenn $\mu$ ein Mittelwerth von $F_1(\gamma)$ für Werthe von $\gamma$ zwischen $t$ und $u$ ist.

Das erste aber convergirt offenbar mit wachsendem $m$ gegen Null. Dasselbe ist nach XIV mit dem $m^{\text{ten}}$ Stufenwerthe der Fourier'schen

Reihe über dem Bogen $UT'$ der Fall. Man kann also $m$ hinreichend gross nehmen, damit diese beiden Theile zusammen geringer werden als $F_1$, unter $F_1$ den beträchtlichsten Werth von $F_1(\gamma)$ in dem Bogen $TU$ verstanden. Da nun auch $\mu$ geringer ist als $F_1$, so ist der $m^{te}$ Stufenwerth der Fourier'schen Reihe über dem Bogen $TT'$ geringer als $F_1 \cdot \left(1 + \frac{u-t}{\pi}\right)$. Man kann nun $U$ so nahe an $T$ nehmen, dass alle Werthe von $F_1(\gamma)$ zwischen $T$ und $U$ und daher auch $F_1$ beliebig gering werden. Demnach kann $m$ so gross genommen werden, dass der $m^{te}$ und alle höheren Stufenwerthe der Fourier'schen Reihe beliebig nahe $= 0$ werden. Mithin ist in diesem Falle die Fourier'sche Reihe $= 0$.

Die Sätze XV bis XVII beziehen sich nur auf den linksseitigen Werth von $f(\gamma)$ im Punkte $T$ und die Integration über der einen Hälfte der Kreislinie. Die Resultate gelten ohne Weiteres auch für den rechtsseitigen Werth von $f(\gamma)$ und die andere Hälfte der Kreislinie und man erhält dann durch einfache Addition das Gesammtergebniss in Bezug auf beide Werthe von $f(\gamma)$ und die ganze Kreislinie.

**XVIII.** Der im Punkte $P$ links genommene Differentialquotient möge keinen bestimmten (auch keinen unendlichen) Werth haben. Jedoch soll links von $T$ ein Punkt $U$ so nahe an $T$ genommen werden können, dass kein Theil des Bogens $TU$ durch fluxionslose Punkte in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist. In diesem Falle kann die Fourier'sche Reihe convergent oder auch divergent sein. Letzteres hat Herr Du Bois-Reymond (Abhandlungen der bayerischen Akademie) durch ein Beispiel gezeigt. Die Reihe wird aber dann nur unbestimmt, da sie nach XI nicht unendlich gross sein kann.

**XIX.** Der Punkt $T$ sei innerer Punkt eines Bogens, der durch unstetig fluente Punkte in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist. In diesem Falle kann die Fourier'sche Reihe convergent sein, wo auch der Punkt $T$ in dem Bogen liegen mag, da ja Herr Weierstrass durch trigonometrische Reihen Functionen dargestellt hat, welche in allen Punkten fluxionslos sind. Dass aber die Reihe auch divergent sein kann in Punkten, welche den Bogen in lauter unendlich kleine Theile zerlegen, soll jetzt durch ein Beispiel gezeigt werden.

Wir stellen die Function durch eine unendliche Reihe dar, deren einzelne Glieder von folgender Beschaffenheit sind.

Um den Kreis wird eine senkrechte Cylinderfläche gelegt und auf dieser eine Function graphisch durch eine Wellenlinie dargestellt, deren halbe Wellenlänge ein aliquoter Theil der Kreislinie ist und deren Halbwellen abwechselnd über und unter der Kreislinie liegen. Die Anzahl der Halbwellen ist ungerade, so dass also die Curve an einer Stelle statt des Wendepunktes eine Spitze hat. Die beiden Halbwellen, welche in

der Spitze zusammenstossen, sollen oberhalb der Kreislinie liegen. Die einzelnen Halbwellen sind Parabelbögen mit dem Scheitel im höchsten oder tiefsten Punkte und der Axe parallel zu der des Cylinders. Die Function ist also bestimmt, sobald die Wellenhöhe, die Anzahl der Halbwellen und die Lage der Spitze gegeben ist. Wenn $h$ die Wellenhöhe, $n$ die Anzahl der Halbwellen, also $\frac{2\pi}{n}$ die halbe Wellenlänge ist, so wollen wir eine solche Function mit $F(h, n)$ bezeichnen, wo dann die Lage der Spitze noch besonders angegeben werden muss. Die Punkte der Kreislinie, in welchen eine der Functionen $= 0$ ist, nennen wir die Nullpunkte der Function, diejenigen, in welchen sie vom Wachsen ins Abnehmen übergeht oder umgekehrt, Maximalpunkte derselben. Zu ersteren gehören die Spitze und sämmtliche Inflexionspunkte, zu letzteren die Spitze und die Fusspunkte der Ordinaten sämmtlicher Parabelscheitel.

Es sei nun

1) $$f(\gamma) = F(h_1, n_1) + F(h_2, n_2) \ldots = S(\gamma),$$

wo immer $h$ die Wellenhöhe, $n$ die Zahl der Halbwellen ist. Die $n$ sind sämmtlich ungerade und jedes folgende ist ein ganzes Vielfaches des vorhergehenden. Die $h$ nehmen beständig ab und zwar so, dass $h_1 + h_2 \ldots$ eine convergente Reihe ist, wodurch dann auch die Reihe $S(\gamma)$ absolut convergent wird. Näheres über die Zunahme der $n$ und die Abnahme der $h$ soll noch festgestellt werden.

Die Lage der Spitzen der einzelnen Glieder nehmen wir, wie folgt. Die Spitzen und Wendepunkte sämmtlicher Glieder mögen nummerirt werden, und zwar in jedem einzelnen Gliede in der Reihenfolge nach links; von einem Gliede zum andern aber folgt immer auf den höchstnummerirten Punkt des vorhergehenden die Spitze des folgenden. Die Spitze des $p^{\text{ten}}$ Gliedes wird nun in den Punkt mit der Nummer $p$ gelegt, wodurch die Lage derselben für jedes Glied bestimmt ist. Damit ist aber, da die halbe Wellenlänge irgend eines Gliedes ein ganzes Vielfaches derjenigen eines jeden folgenden Gliedes ist, zugleich festgesetzt, dass jeder Nullpunkt irgend eines Gliedes mit einem Nullpunkte eines jeden folgenden Gliedes zusammenfällt. Jeder Punkt der Kreislinie, in welchem irgend ein Glied $= 0$ ist, erhält also bei unendlich vielen folgenden Gliedern wieder eine Nummer und wird daher auch unendlich oft zur Spitze eines Gliedes.

Die Reihe $S$ sei nun bis zum $p^{\text{ten}}$ Gliede definirt, so dass also

2) $$S^{\underline{p}}(\gamma) = F(h_1, n_1) + \ldots + F(h_p, n_p)$$

eine gegebene Function, welche überall stetig und einwerthig ist, und eine endliche Anzahl grösste und kleinste Werthe hat. Von dem nächsten Gliede $F(h_{p+1}, n_{p+1})$ ist dann schon die Lage der Spitze bestimmt; $h_{p+1}$ und $n_{p+1}$ sind noch zu bestimmen. Die auf dasselbe folgenden Glieder setzen wir zusammen $= R^{\underbrace{p+1}}$, nehmen in dem $m^{\text{ten}}$ Stufenwerthe

$$W_m = \frac{1}{\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\gamma) \frac{\sin \frac{2m+1}{2}(\gamma - t)}{2 \sin \frac{\gamma - t}{2}} d\gamma$$

$2m+1 = n_{p+1}$ und setzen für $f(\gamma)$ die verschiedenen Theile, woraus diese Function zusammengesetzt ist, so dass also

$$3) \quad W_m = \int_{t-\pi}^{t+\pi} F_1 Q_m d\gamma + \int_{t-\pi}^{t+\pi} F_2 Q_m d\gamma \ldots + \int_{t-\pi}^{t+\pi} F_p Q_m d\gamma + \int_{t-\pi}^{t+\pi} F_{p+1} Q_m d\gamma + \int_{t-\pi}^{t+\pi} R^{p+1} Q_m d\gamma,$$

wo der Kürze wegen $F(h_\nu, n_\nu) = F_\nu$ und $\dfrac{\sin \frac{2m+1}{2}(\gamma - t)}{2\pi \sin \frac{\gamma - t}{2}} = Q_m$ gesetzt ist. Den Punkt $T$ nehmen wir in der Spitze von $F_{p+1}$ und integriren zunächst von $t$ bis $t+\pi$. Betrachten wir irgend eines von den ersten $p$ Integralen, etwa das $\nu^{te}$, so ist

$$4) \quad \int_t^{t+\pi} F_\nu Q_m d\gamma = \int_t^{t+\frac{\pi}{n_p}} F_\nu Q_m d\gamma + \int_{t+\frac{\pi}{n_p}}^{t+\pi} F_\nu Q_m d\gamma.$$

Die Spitze von $F_{p+1}$, also hier der Punkt $T$, befindet sich in einem Nullpunkte irgend eines früheren Gliedes. Die Nullpunkte eines jeden Gliedes fallen aber zusammen mit irgendwelchen Nullpunkten eines jeden späteren Gliedes. Der Punkt $T$ fällt daher zusammen mit irgend einem Nullpunkte von $F_p$. Jede Halbwelle von $F_\nu$ schliesst aber eine Anzahl von ganzen Halbwellen der $F_p$ ein. Da nun diese Zahl eine ungerade ist, so ist der Punkt $T$ entweder um wenigstens $\frac{1}{4}$ Wellenlänge $= \frac{\pi}{n_p}$ der $F_p$ von dem nächsten Maximalpunkte der $F_\nu$ entfernt oder er fällt mit einem solchen zusammen. In den Grenzen des Integrals $\int_t^{t+\frac{\pi}{n_p}} F_\nu Q_m d\gamma$ nimmt daher die Function $F_\nu$ nur zu oder nur ab und man kann deshalb auf dieses Integral den Satz XVI anwenden. Der beträchtlichste Werth von $F_\nu(\gamma) - F_\nu(t)$ für Werthe von $\gamma$ zwischen $t$ und $t + \frac{\pi}{n_p}$ ist nun

$F_\nu\left(t+\frac{\pi}{n_p}\right)-F_\nu(t)$ und diese Differenz hat wieder ihren beträchtlichsten Werth, wenn entweder der Punkt $T$ oder der Punkt $\gamma=t+\frac{\pi}{n_p}$ mit dem Ende einer Halbwelle von $F_\nu$ zusammenfällt. In beiden Fällen ist aber ein Glied obiger Differenz $=0$ und das andere die Ordinate der Halbwelle in einem von dem betreffenden Endpunkte derselben um $\frac{\pi}{n_p}$ entfernten Punkte. Diese Ordinate ist kleiner, als das mit dem Differentialquotienten von $F_\nu(\gamma)$ im Endpunkte der Halbwelle multiplicirte $\frac{\pi}{n_p}$. Jener Differentialquotient ist aber $=\frac{2h_\nu n_\nu}{\pi}$; mithin ist $F_\nu\left(t+\frac{\pi}{n_p}\right)-F_\nu(t)$ geringer als $\frac{2h_\nu n_\nu}{n_p}$. Da nun für $2m+1=n_{p+1}$ die Zahl $m+1=\frac{n_{p+1}+1}{2}$ wird und wegen der durchgängigen Einwerthigkeit von $F_\nu(\gamma)$ immer $F_\nu(t)$ statt $F_\nu(t+0)$ gesetzt werden kann, so ist obiges Integral von $\frac{1}{2}F_\nu(t)$ nach XVI um weniger als

$$\frac{2F_\nu(t)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin\frac{\pi}{2n_p}}+\frac{2h_\nu n_\nu}{n_p}N$$

oder, da $F_\nu(t)$ höchstens $=h_\nu$ ist, um weniger als

$$5)\qquad \left(\frac{2}{\pi(n_{p+1}+1)\sin\frac{\pi}{2n_p}}+\frac{2n_\nu}{n_p}N\right)h_\nu$$

verschieden.

Auf den zweiten Theil

$$\int\limits_{t+\frac{\pi}{n_p}}^{t+\pi} F_\nu\, Q_m\, d\gamma$$

des obigen Stufenwerthes 4) können wir den Satz XII anwenden. Der beträchtlichste Werth von $F_\nu$ ist $h_\nu$, derjenige von $\frac{dF_\nu(\gamma)}{d\gamma}$ am Ende einer Halbwelle $=\frac{2h_\nu n_\nu}{\pi}$ und für $\sin\frac{a-t}{2}$ ist zu setzen $\sin\frac{\pi}{2n_p}$. Mithin ist obiges Integral geringer als

$$6)\qquad \frac{4h_\nu+\left(\frac{4h_\nu n_\nu}{\pi}+h_\nu\right)\left(\pi-\frac{\pi}{n_p}\right)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}.$$

Wir haben hier nur zwischen $t$ und $t+\pi$ integrirt. Integriren wir jetzt zwischen $t-\pi$ und $t$, so erhalten wir ganz dieselben Resultate 5) und 6). Der ganze $m^{te}$ Stufenwerth der Fourier'schen Reihe für die Function

$F_\nu$ ist demnach von $F_\nu(t)$ um weniger verschieden, als um die doppelte Summe der beiden Ausdrücke 5) und 6), d. h. um weniger als

$$7)\quad \left[\frac{4}{\pi(n_{p+1}+1)\sin\frac{\pi}{2n_p}}+\frac{4n_\nu N}{n_p}+\frac{8+\left(\frac{8n_\nu}{\pi}+2\right)\left(\pi-\frac{\pi}{n_p}\right)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right]h_\nu$$

$$=\left[\frac{4}{\pi(n_{p+1}+1)\sin\frac{\pi}{2n_p}}+\frac{4n_\nu N}{n_p}+\frac{8+(8n_\nu+2\pi)(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right]h_\nu.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für $\nu$ die Zahlen 1 bis $p$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so ist der $m^{te}$ Stufenwerth der aus $S_m^p(\gamma)$ abgeleiteten Fourier'schen Reihe von $S_m^p(t)$ um weniger verschieden, als um

$$8)\quad \frac{4\sin\frac{\pi}{2n_p}+8+2\pi(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}(h_1+h_2\ldots+h_p)$$
$$+\left[\frac{4N}{n_p}+\frac{8(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right](h_1n_1+h_2n_2\ldots+h_pn_p).$$

In dem $(p+1)^{ten}$ Gliede des Stufenwerthes $W_m$ nehmen wir die Spitze von $F_{p+1}$, also den Punkt $T$ als Anfangspunkt der $\gamma$. Das $(p+1)^{te}$ Glied wird hierdurch

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{F(h_{p+1},n_{p+1})}{\pi}\,\frac{\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

In gleichen Abständen vom Anfangspunkte der $\gamma$ hat dann $F(h_{p+1},n_{p+1})$ gleiche und, da die Wellen der Function und die Wellen von $\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma$ gleiche Länge haben, $\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma$ entgegengesetzt gleiche Werthe; da ferner auch $\sin\frac{\gamma}{2}$ entgegengesetzt gleiche Werthe hat, so ist der ganze Integrand zu beiden Seiten des Anfangspunktes symmetrisch und das Integral wird also

$$=\int_0^{\pi}\frac{F(h_{p+1},n_{p+1})}{\pi}\,\frac{\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma$$

oder, wenn wir den Integranden kürzer durch $F_{p+1}V_m$ darstellen,

$$= \int_0^\pi F_{p+1} V_m \, d\gamma.$$

**Wir** setzen nun

$$\int_0^\pi F_{p+1} V_m \, d\gamma = \int_0^{\frac{2\pi}{n_{p+1}}} F_{p+1} V_m \, d\gamma + \int_{\frac{2\pi}{n_{p+1}}}^{2\frac{2\pi}{n_{p+1}}} F_{p+1} V_m \, d\gamma + \ldots + \int_{\frac{n_{p+1}-3}{2}\frac{2\pi}{n_{p+1}}}^{\frac{n_{p+1}-1}{2}\frac{2\pi}{n_{p+1}}} F_{p+1} V_m \, d\gamma$$
$$+ \int_{\frac{n_{p+1}-1}{2}\frac{2\pi}{n_{p+1}}}^{\pi} F_{p+1} V_m \, d\gamma.$$

**Nehmen** wir die oberen Grenzen um $\beta = \frac{\pi}{2 n_{p+1}}$ kleiner, die unteren um $\beta$ **grösser**, so wird die Summe, da die Integranden stets positiv sind, **kleiner**. Eine fernere Verkleinerung findet statt, wenn wir $\sin \frac{n_{p+1}}{2} \gamma$ **überall** gleich dem Werthe an den neuen Grenzen $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und ebenso $F(h_{p+1}, n_{p+1}) =$ dem Werthe an den neuen Grenzen $= \pm \frac{3}{4} h_{p+1}$ nehmen. **Eine** weitere Verkleinerung erhalten wir, wenn wir $\frac{\gamma}{2}$ statt $\sin \frac{\gamma}{2}$ nehmen **und** das letzte Glied weglassen. Indem wir zugleich zwischen je zwei **Integrale** ein solches mit dem Integranden $= 0$ einschalten, erhalten wir

$$\frac{3}{2\pi\sqrt{2}} h_{p+1} \left[ \int_{\frac{\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{3\pi}{2n_{p+1}}} \frac{1}{\gamma} d\gamma + \int_{\frac{3\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{5\pi}{2n_{p+1}}} \frac{0}{\gamma} d\gamma + \int_{\frac{5\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{7\pi}{2n_{p+1}}} \frac{1}{\gamma} d\gamma + \int_{\frac{7\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{9\pi}{2n_{p+1}}} \frac{0}{\gamma} d\gamma \ldots + \int_{\frac{(2n_{p+1}-5)\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{(2n_{p+1}-3)\pi}{2n_{p+1}}} \frac{1}{\gamma} d\gamma \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{(2n_{p+1}-3)\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{(2n_{p+1}-1)\pi}{2n_{p+1}}} \frac{0}{\gamma} d\gamma \right].$$

**Diese** Integrale erstrecken sich alle über Intervalle von gleicher Ausdehnung. Eine fernere Verkleinerung erzielen wir daher, wenn wir in **dem** ersten, dritten, fünften u. s. w. den Integranden um die Hälfte verkleinern, denselben also $= \frac{1}{2\gamma}$ setzen und ihn in den übrigen um ebensoviel vermehren, wodurch er auch hier $= \frac{1}{2\gamma}$ wird. Kleiner wird hierdurch die Summe offenbar, weil die Werthe von $\gamma$ beständig zunehmen

und deshalb statt der fortgenommenen Hälfte eines Integrals mit ungerader Nummer zu dem folgenden Integral mit gerader Nummer eine kleinere Grösse hinzugekommen ist. Wir erhalten aber jetzt

$$9)\qquad \frac{3}{4\pi\sqrt{2}}h_{p+1}\int\limits_{\frac{\pi}{2n_{p+1}}}^{\frac{(2n_{p+1}-1)\pi}{2n_{p+1}}}\frac{d\gamma}{\gamma}=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}h_{p+1}\log(2n_{p+1}-1).$$

Der $m^{te}$ Stufenwerth des $(p+1)^{ten}$ Gliedes von $W_m$ ist also grösser als dieser positive Ausdruck.

Das letzte Glied

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{R^{p+1}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma$$

des Stufenwerthes $W_m$ ist geringer als $M\int\limits_0^{2\pi}d\gamma$, unter $M$ eine Mittelgrösse von $\frac{R^{p+1}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$ verstanden. Es ist nun $R^{p+1}$ an keiner Stelle beträchtlicher als $h_{n+2}+h_{n+3}\dots$ und $\frac{\sin\frac{n_{p+1}}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{2}+\cos\gamma+\cos2\gamma+\dots$ $\dots+\cos\frac{n_{p+1}-1}{2}\gamma$ nicht beträchtlicher als $\frac{n_{p+1}}{2}$, also jenes letzte Glied geringer als

$$10)\qquad n_{p+1}(h_{n+2}+h_{n+3}\cdot\ \cdot).$$

Fassen wir jetzt die Resultate 8), 9) und 10) zusammen, so ist das $p+1^{te}$ Glied von $W_m$ in Gleichung 2) positiv und grösser als

$$11)\qquad \frac{3}{4\pi\sqrt{2}}h_{p+1}\log(2n_{p+1}-1),$$

während die $p$ ersten zusammen von $S^{p}(t)$ um weniger verschieden sind, als

$$12)\qquad \frac{4\sin\frac{\pi}{2n_p}+8+2\pi(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}(h_1+h_2+\dots+h_p)$$
$$+\left[\frac{4N}{n_p}+\frac{8(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right](h_1n_1+h_2n_2+\dots+h_pn_p)$$

und die übrigen zusammen geringer sind, als

13) $$n_{p+1}(h_{p+2}+h_{p+3}+\ldots).$$

Damit der Ausdruck 11) unendlich gross werde mit wachsendem $n$, setzen wir

14) $$h_{p+1}=\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+1}}}$$

und lassen nach dieser Formel überhaupt die $h$ von den $n$ abhängen. Dann ist der Ausdruck 11)

$$=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\,\frac{\log(2n_{p+1}-1)}{\sqrt{\log n_{p+1}}}$$

und 12)

15) $$=\frac{4\sin\frac{\pi}{2n_p}+8+2\pi(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\log n_1}}+\frac{1}{\sqrt{\log n_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\log n_p}}\right)$$
$$+\left[\frac{4N}{n_p}+\frac{8(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right]\left(\frac{n_1}{\sqrt{\log n_1}}+\frac{n_2}{\sqrt{\log n_2}}+\ldots+\frac{n_p}{\sqrt{\log n_p}}\right)$$

und 13)

16) $$=n_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+2}}}+\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+3}}}+\ldots\right).$$

Damit jetzt ferner die Ausdrücke 15) und 16) unendlich klein werden, setzen wir

17) $$n_{p+2}=a^{n^4_{p+1}},$$

wo $a$ eine ungerade ganze Zahl $>1$, und lassen nach dieser Formel überhaupt jedes $n$ von dem vorhergehenden abhängen. Das erste $n$ aber, $n_1$, nehmen wir $=a$, wodurch jedes $n$, wie vorausgesetzt, ein ungerades Vielfaches des vorhergehenden wird. Die $n$ sind dann sämmtlich Potenzen von $a$ mit Exponenten, welche ebenfalls, und zwar immer höhere Potenzen von $a$ sind. Die Logarithmen der $n$ wachsen daher wie Potenzen einer ganzen Zahl mit zunehmendem Exponenten und die beiden Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{\log n_1}}+\frac{1}{\sqrt{\log n_2}}\ldots \quad\text{und}\quad \frac{1}{\sqrt{\log n_{p+2}}}+\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+3}}}\ldots$$

fallen deshalb stärker, als eine geometrische Reihe mit gebrochener Steigungszahl. Die erste ist somit kleiner als $\frac{2}{\sqrt{\log n_1}}$ und die zweite kleiner als $\frac{2}{\sqrt{\log n_{p+2}}}$. Dagegen nimmt die Reihe

$$\frac{n_1}{\sqrt{\log n_1}}+\frac{n_2}{\sqrt{\log n_2}}+\ldots+\frac{n_p}{\sqrt{\log n_p}}$$

stärker zu, als eine geometrische Reihe mit einer Steigungszahl $>1$, und ist daher kleiner als $\frac{2n_p}{\sqrt{\log n_p}}$. Es sind daher die Ausdrücke 15) und 16) zusammen geringer als

$$\frac{4\sin\frac{\pi}{2n_p}+8+2\pi(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\,\frac{2}{\sqrt{\log n_1}}+\left[\frac{4N}{n_p}+\frac{8(n_p-1)}{\pi(n_{p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right]\frac{2n_p}{\sqrt{\log n_p}}$$
$$+\frac{2n_{p+1}}{\sqrt{\log n_{p+2}}}$$

oder, wenn wir nach Gleichung 17) $n_{p+1}$ und $n_{p+2}$ durch $n_p$ ausdrücken, geringer als

$$\frac{4\sin\frac{\pi}{2n_p}+8+2\pi(n_p-1)}{\pi(a^{n^4p}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\,\frac{2}{\sqrt{\log n_1}}+\left[\frac{4N}{n_p}+\frac{8(n_p-1)}{\pi(a^{n^4p+1}+1)\sin^2\frac{\pi}{2n_p}}\right]\frac{2n_p}{\sqrt{\log n_p}}$$
$$+\frac{2}{a^{n^4p}\sqrt{\log a}}.$$

Wir haben also, indem wir die $n$ von einander und von den $h$ in der durch die Gleichungen 14) und 17) dargestellten Weise abhängen lassen, Folgendes erreicht.

Wenn in dem $m^{ten}$ Stufenwerthe der Fourier'schen Reihe $2m+1 = n_{p+1}$ genommen wird und der Punkt $T$ die Spitze des $p+1^{ten}$ Gliedes der Reihe $S(\gamma)$ in Gleichung 1) ist, so wächst das $p+1^{te}$ Glied von $W_m$ in Gleichung 3) mit $p$ ins positive Unendliche. Die übrigen Glieder aber vom ersten bis zum $p^{ten}$ und vom $p+2^{ten}$ an ins Unendliche unterscheiden sich von $S^p_-(t)$ um eine Grösse, welche mit wachsendem $p$ beliebig gering wird. Nehmen wir nun für $T$ irgend einen Inflexionspunkt einer beliebigen Function $F$ in Gleichung 1). Es lassen sich nach Früherem Zahlen $q_1, q_2, \dots$ *in inf.* angeben, derart, dass derselbe Punkt $T$ auch in die Spitze des $q_1^{ten}$, $q_2^{ten}$ Gliedes u. s. w. von $S(\gamma)$ in Gleichung 1) fällt. Setzen wir nun $2m+1 = n_{p+1}$ und nehmen wir $p+1$ nacheinander $= q_1, q_2$ u. s. w., so wächst das $q_1^{te}$, $q_2^{te}$ u. s. w. Glied von $W_m$ ins positiv Unendliche. Die übrigen aber haben zusammen zur Grenze den Werth der Function $f(\gamma)$ im Punkte $T$. Mithin wächst bei dieser Weise des Zunehmens von $m$ der $m^{te}$ Stufenwerth der ganzen aus der Function $f(\gamma)$ abgeleiteten Fourier'schen Reihe ins positiv Unendliche. Die Reihe kann aber nach XI nicht wirklich $= +\infty$ sein; es kann hier nur der Fall vorliegen, wo die Reihe unbestimmt wird. Es muss also möglich sein, die Zahl $m$ in anderer Weise zunehmen zu lassen, so dass der $m^{te}$ Stufenwerth nicht ins positiv Unendliche wächst.

Da die Reihe in allen Inflexionspunkten eines jeden Gliedes der Reihe $S(\gamma)$ Gleichung 1) unbestimmt ist, so ist sie in Punkten unbestimmt, welche die ganze Kreislinie in lauter unendlich kleine Theile zerlegen. In keinem dieser Punkte hat die Function $f(\gamma)$, aus welcher die Reihe abgeleitet ist, einen Differentialquotienten von bestimmtem endlichem Werthe; denn in einem Punkte, wo sie einen solchen hätte, müsste die

Reihe nach XVII convergent sein. Die Function $f(\gamma)$ ist also in Punkten fluxionslos, welche die Kreislinie in lauter unendlich kleine Theile zerlegen.

Nehmen wir jetzt den Punkt $T$ in der Mitte einer Halbwelle des $(p+1)^{\text{ten}}$ Gliedes des Stufenwerthes $W_m$. Diese Halbwelle sei, von der Spitze an nach links gerechnet, die $g^{\text{te}}$ und $g$ eine ungerade Zahl, so dass also dieselbe oberhalb der Kreislinie liegt. Nehmen wir wieder den Punkt $T$ als Anfangspunkt für $\gamma$, so ist das $(p+1)^{\text{te}}$ Glied von $W_m$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{F(h_{p+1}, n_{p+1})}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{n_{p+1}}{2} \gamma}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} d\gamma.$$

Wir zerlegen dieses Integral in zwei, von welchen das eine sich vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten über gleiche Bögen, und zwar nach der einen Seite bis zur Spitze erstreckt, während das andere die beiden ebenfalls gleichen Bögen von da bis zum Punkte $T'$ umfasst. In diesem Punkte hat $F(h_{p+1}, n_{p+1})$ einen Nullpunkt und Inflexionspunkt, es sei denn, dass zufällig die Spitze in denselben fiele. Mithin ist innerhalb der Grenzen des zweiten Integrals von diesem Punkte aus nach beiden Seiten in gleichen Abständen $F(h_{p+1}, n_{p+1})$, $\sin \frac{\gamma}{2}$ und $\sin \frac{n_{p+1}}{2} \gamma$ entgegengesetzt gleich. Der zweite Theil des Integrals verschwindet daher. Dagegen hat innerhalb der Grenzen des ersten Theils vom Punkte $T$ aus nach beiden Seiten $F(h_{p+1}, n_{p+1})$ gleiche, $\sin \frac{\gamma}{2}$ und $\sin \frac{n_{p+1}}{2} \gamma$ entgegengesetzte Zeichen und der zweite Theil wird daher

$$= \int_0^{(g-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n_{p+1}}} \frac{F(h_{p+1}, n_{p+1})}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{n_{p+1}}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} d\gamma$$

oder, wenn wir den Integranden $= Q$ setzen,

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n_{p+1}}} Q\, d\gamma + \int_{\frac{\pi}{n_{p+1}}}^{2\frac{\pi}{n_{p+1}}} Q\, d\gamma + \int_{2\frac{\pi}{n_{p+1}}}^{3\frac{\pi}{n_{p+1}}} Q\, d\gamma + \ldots$$

Jedes dieser Integrale umfasst sowohl von $F(h_{p+1}, n_{p+1})$, als von $\sin \frac{n_{p+1}}{2} \gamma$ eine Viertelwelle. In dem ersten, dritten, fünften u. s. w.

haben $F(h_{p+1}, n_{p+1})$ und $\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma$ gleiche, in dem zweiten, vierten, sechsten u. s. w. entgegengesetzte Zeichen; die Integrale sind daher abwechselnd positiv und negativ. Vergleicht man zwei aufeinanderfolgende unter einander, so erkennt man leicht durch Verzeichnung der beiden Wellenlinien, dass die Werthe des Products $F(h_{p+1}, n_{p+1}).\sin\frac{n_{p+1}}{2}\gamma$ in umgekehrter Reihenfolge gleich sind. Da nun $\sin\frac{\gamma}{2}$ stets zunimmt, so nehmen die Absolutwerthe der Integrale ab. Die Reihe ist daher eine abnehmend alternirende und somit geringer als das erste Glied. Letzteres aber wird für $p=\infty$ mit $h_{p+1}$ unendlich gering. Dabei kann der Punkt $T$ immer der nämliche bleiben; denn wenn derselbe, wie angenommen, in der Mitte einer Halbwelle von $F(h_{p+1}, n_{p+1})$ liegt, so liegt er, da diese eine ungerade Anzahl von Halbwellen aller späteren Glieder umfasst, auch in der Mitte einer Halbwelle eines jeden späteren Gliedes. Indem man also für $m$ nacheinander $n_1$, $n_2$, ... *in inf.* setzt, convergirt das $(p+1)^{te}$ Glied von $W_m$ gegen 0. Die Summe der vorhergehenden aber convergirt gegen einen bestimmten Werth, nämlich denjenigen von $F(\gamma)$ im Punkte $T$, und die Summe der folgenden gegen Null, was Beides auf dieselbe Weise gezeigt werden kann, wie in dem vorigen Falle. Die Fourier'sche Reihe hat somit in diesem Falle einen bestimmten endlichen Werth, nämlich denjenigen der Function, aus welcher sie abgeleitet ist.

Die hier betrachtete Function hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass sie für gewisse Punkte, welche die ganze Kreislinie unendlich klein theilen, divergent und für andere Punkte, welche ebenfalls überall einander unendlich nahe sind, convergent ist. Uebrigens hat auch in letzteren Punkten die Function keinen bestimmten endlichen Differentialquotienten. Vielmehr lässt sich nachweisen, dass dieselbe in allen Punkten ohne Ausnahme fluxionslos ist. Es sei nämlich $A$ ein beliebiger Punkt der Kreislinie. Man nehme links von $A$ einen Punkt $B$ und bilde den Quotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es ist zu zeigen, dass der Punkt $B$ sich dem Punkte $A$ so nähern kann, dass dieser Quotient ins Unendliche wächst. Der Punkt $A$ befindet sich in irgend einer Halbwelle von $F_p$. Man lege den Punkt $B$ in den Maximalpunkt der nächsten Halbwelle oder, falls diese zufällig in einer Spitze anfängt, der zweitnächsten Halbwelle. Der Abstand $b-a$ der beiden Punkte ist also wenigstens $=\frac{1}{4}$ und höchstens $=\frac{3}{4}$ Wellenlängen und der Differenzquotient von $F_p$, abgesehen vom Vorzeichen, beträchtlicher als $\frac{2h_p}{3l_p}=\frac{2h_p n_p}{3\pi}$. Der Differenzquotient irgend eines früheren Gliedes $F_\nu$ ist immer geringer, als der

Differentialquotient desselben in einem Nullpunkte, d. h. geringer, als $\frac{2h_\nu n_\nu}{\pi}$. Der Differenzquotient für sämmtliche frühere Glieder zusammen ist demnach geringer als

$$\frac{2}{\pi}(h_{p-1}n_{p-1}+h_{p-2}n_{p-2}\ldots+h_1p_1)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n_{p-1}}{\sqrt{\log n_{p-1}}}+\frac{n_{p-2}}{\sqrt{\log n_{p-2}}}\ldots+\frac{n_1}{\sqrt{\log n_1}}\right).$$

Die $n$ wachsen nun so stark, dass für $p=\infty$ dieser Ausdruck gegen obiges $\frac{2h_pn_p}{3\pi}$ verschwindet. Was aber irgend eines der auf $F_p$ folgenden Glieder $F_\mu$ betrifft, so ist der Differenzquotient desselben nicht beträchtlicher als $\frac{2h_\mu}{b-a}$, mithin nicht beträchtlicher als $\frac{2h_\mu}{l_p}=\frac{2h_\mu\pi}{n_p}$ $=\frac{2\pi}{n_p\sqrt{\log n_\mu}}$. Für sämmtliche auf $F_p$ folgende Glieder zusammen ist also der Differenzquotient nicht beträchtlicher, als

$$\frac{2\pi}{n_p}\left(\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+1}}}+\frac{1}{\sqrt{\log n_{p+2}}}+\ldots\right),$$

was nach Früherem für $p=\infty$ offenbar unendlich gering wird. Lässt man also $p$ ins Unendliche wachsen und giebt man immer dem Punkte $B$ die oben beschriebenen Lagen in Bezug auf die Halbwellen von $F_p$, so wächst der Differenzquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ins Unendliche; die Function $f(y)$ hat daher in dem willkürlich gewählten Punkte $A$ keinen bestimmten endlichen Differentialquotienten.

**XX.** Es erübrigt noch die Erörterung der Frage, ob eine Function $f(y)$ von den bisher vorausgesetzten Eigenschaften auf mehr als eine Weise in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann. Wir werden uns hierbei auf einen Satz stützen, dass unter gewissen Voraussetzungen nur eine einzige Function $v$ existirt, welche den in XI gestellten Bedingungen genügt. Dieser Satz ist an der S. 207 erwähnten Stelle bewiesen worden. Da jedoch die Randfunction hier weniger eingeschränkt ist, so darf dem Randwerthe von $v$ an den Unstetigkeitsstellen hier kein so weiter Spielraum gestattet werden, wie es dort geschehen ist. Wir wollen deshalb dem betreffenden Satze jetzt folgende Fassung geben.

Ausser der Function $v$ in XI Gleichung 2) giebt es keine andere, welche im Innern überall bestimmt, endlich, stetig ist, nach allen Richtungen bestimmte, endliche und stetige Fluenz besitzt, der Gleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$$

genügt und überdies die Eigenschaft hat, dass, wenn irgend ein Randpunkt $O'$ in einen noch so kleinen Bogen $PQ$ eingeschlossen wird und ein Punkt $O$ sich aus beliebiger Richtung dem Punkte $O'$ nähert, der erstere so nahe an letzterem genommen werden kann, dass bei noch weiterer Annäherung der Werth von $v$ im Punkte $O$ stets ein Mittleres zwischen dem grössten und kleinsten Werthe der Randfunction $f(\gamma)$ im Bogen $PQ$ bleibt.

Beweis. Es seien $v_1$ und $v_2$ zwei Functionen auf der Kreisfläche, welche beide obige Eigenschaften haben. Ferner sei $n$ eine beliebige ganze Zahl. Auf sämmtlichen Theilbögen $n^{ter}$ Grösse, sowie auf sämmtlichen Zwischenbögen $n^{ter}$ Ordnung nehmen wir Ausschnitte und ziehen sowohl nach den Grenzpunkten der Theil- und Zwischenbögen, als nach den Endpunkten der Theilbogen- und Zwischenbogenausschnitte Radien, welche also jeden der zum Rande concentrischen inneren Kreise in entsprechende Bögen theilen. Die Theilbogenausschnitte setzen wir zusammen $= A$, die Ausschnitte derjenigen Zwischenbögen, in welchen (d. h. in jedem einzelnen) die Differenz des grössten und kleinsten Werthes von $f(\gamma)$ geringer als eine bestimmte Grösse $\frac{1}{2}\zeta$ ist, zusammen $= Z$, die übrigen, in welchen jene Differenz wenigstens $= \frac{1}{2}\zeta$ und, falls der beträchtlichste Werth, der in $v_1$ und $v_2$ überhaupt vorkommt, $\frac{V}{2}$ genannt wird, höchstens $= \frac{V}{2}$ ist, zusammen $= z$, alle übrigen Bögen, also Theilbogen- und Zwischenbogenreste zusammen $= R$.

Wir nehmen einen zum Rande concentrischen Kreis dem Rande so nahe, dass, wenn man auf jedem Radius eines bestimmten Theilbogenausschnittes in dem von beiden Kreisen begrenzten Ringe die beträchtlichste Differenz $v_1 - f(\gamma)$ bildet, keine von diesen Differenzen beträchtlicher ist, als eine vorher gegebene sehr geringe Grösse $\frac{\varepsilon}{2}$. Dies ist möglich; denn wenn man den concentrischen Kreis sich dem Rande ohne Ende nähern lässt, so können in keinem Punkte die Werthe von $v_1$ zuletzt um mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ von $f(\gamma)$ verschieden bleiben. Nachdem das geschehen ist, wird derselbe Zweck durch weitere Vergrösserung des concentrischen Kreises, falls eine solche noch nöthig ist, auf einem zweiten Theilbogenausschnitte erreicht. Und so fort bis zum $n^{ten}$. Ebendasselbe wird dann für die Function $v_2$ bewirkt, so dass also $v_1$ und $v_2$ in keinem Punkte der Theilbogenausschnitte um mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ von $f(\gamma)$ verschieden sind oder bei weiterer Vergrösserung des concentrischen Kreises irgend einmal verschieden werden. Die Function $v_1 - v_2$, welche wir mit $w$ bezeichnen wollen, ist dann an den erwähnten Stellen um nicht mehr als $\varepsilon$ von Null verschieden.

Nehmen wir jetzt eine ähnliche Operation in Bezug auf den Ausschnitt irgend eines der Zwischenbögen vor. In diesem Zwischenbogen möge die grösste Differenz der Werthe von $f(\gamma)$ geringer als eine Grösse $\frac{\lambda}{2}$ sein. Wir können also jeden Punkt des Ausschnittes in einen so kleinen Bogen einschliessen, dass in diesem jeder Werth von $f(\gamma)$ von dem Werthe in dem Punkte um weniger als $\frac{\lambda}{2}$ verschieden ist. Indem wir also nöthigenfalls den concentrischen Kreis noch weiter vergrössern, können wir erreichen, dass in dem Ausschnitte des Kreisringes auf keinem Radius die Werthe von $v_1$ sich von irgend einem der beiden (gleichen oder verschiedenen) Werthe von $f(\gamma)$ um mehr als $\frac{\lambda}{2}$ unterscheiden. Ebendasselbe kann dann auch für $v_2$ erreicht werden und die Differenz $v_1 - v_2 = w$ ist daher in dem betreffenden Bereiche an keiner Stelle beträchtlicher als $\lambda$. Indem man die nämliche Operation der Reihe nach auch für die übrigen Zwischenbögen, sowie für sämmtliche Reste vornimmt und, je nach der Art dieser Bögen, für $\lambda$ entweder $\zeta$ oder $V$ nimmt, erreicht man schliesslich Folgendes.

In dem Ringe zwischen dem Randkreise und dem concentrischen Kreise ist in den Theilbogenausschnitten $v_1 - v_2 = w$ an keiner Stelle beträchtlicher als $\varepsilon$, in den Ausschnitten derjenigen Zwischenbögen, welche zusammen $= Z$ sind, an keiner Stelle beträchtlicher als $\zeta$ und in den Ausschnitten der übrigen Zwischenbögen, sowie in den Resten überall nicht beträchtlicher als $V$.

Bilden wir jetzt das Integral $\int\limits_0^{2\pi} \frac{w}{2\pi}\, d\gamma$, so besteht dasselbe aus vier Theilen. Das Integral über den Theilbogenausschnitten ist geringer als $A\varepsilon$, über den Ausschnitten der Zwischenbögen erster Art geringer als $Z\zeta$, über den Ausschnitten der Zwischenbögen zweiter Art geringer als $zV$, in den übrigen (den Resten) nicht beträchtlicher als $RV$, in allen zusammen demnach nicht beträchtlicher als

$$\overset{+}{A}\varepsilon + \overset{+}{Z}\zeta + \overset{+}{z}V + R\overset{+}{V}.$$

Die Grössen $A$, $Z$ und $V$ gehen, welche Grösse auch $\zeta$, $n$ und die Bogenreste haben mögen, über bestimmte Werthe nicht hinaus. Man nehme nun zuerst die Bogenreste, also $R$ sehr klein und $\zeta$ geringer als $R$. Alsdann nehme man $n$ so gross, dass $z$ geringer als $R$ wird; endlich lasse man den concentrischen Kreis sich dem Rande so weit nähern, dass $\varepsilon$ geringer wird als $R$ und dass zugleich diejenigen Grössenbeziehungen stattfinden, welche oben in Beziehung auf die Zwischenbogenausschnitte und die Reste als durch Vergrösserung des concentrischen Kreises

erreichbar nachgewiesen sind. Letzteres ist nothwendig, um behaupten zu können, dass das Integral über dem concentrischen Kreise geringer ist und bei weiterer Vergrösserung dieses Kreises stets geringer bleibt, als

$$\overset{+}{A}\varepsilon + Z\overset{+}{\zeta} + \overset{+}{z}V + R\overset{+}{V}.$$

Dieser Ausdruck aber ist jetzt geringer als

$$(A + Z + 2\overset{+}{V})R.$$

Da $R$ beliebig klein genommen werden konnte, so ist hiermit nachgewiesen, dass der concentrische Kreis so nahe dem Rande genommen werden kann, dass $\int_0^{2\pi} \frac{w}{2\pi} d\gamma$ beliebig gering ist. Nun hat aber dieses Integral auf allen concentrischen Kreisen denselben Werth und zwar denjenigen der Function $v_1 - v_2$ im Mittelpunkte des Kreises. Dieser Werth ist daher $= 0$. Um dasselbe auch für irgend einen andern Punkt der Kreisfläche zu zeigen, bringe man diesen durch stereographische Projection des Kreises auf sich selbst in den Mittelpunkt. Die von der Function $f(\gamma)$ vorausgesetzten wesentlichen Eigenschaften werden hierdurch nicht geändert. Die Punkte des Umfangs verschieben sich auf diesem, ohne aber ihre Reihenfolge zu ändern und ohne dass irgend zwei zusammenfallen, die vorher getrennt waren. Die Theilung durch Unstetigkeitspunkte behält also, abgesehen von der Grösse der Stetigkeitsbögen, ihren wesentlichen Charakter. Nur die Grösse der Theilbögen ändert sich und damit möglicherweise auch die Grössenordnung. Jedoch kann immer, wie gross auch eine Zahl $n$ sei, eine andere Zahl $m$ so gross genommen werden, dass kein Stetigkeitsbogen $m^{\text{ter}}$ und höherer Ordnung unter die $n^{\text{te}}$ Ordnung herabsinkt. Hieraus folgt, dass auch die Bedingungen der Integrabilität der Function $f(\gamma)$ bestehen bleiben. Die Function $v_1 - v_2$ ist demnach überall $= 0$; die Functionen $v_1$ und $v_2$ sind identisch. Die Function $v$ in Gleichung 1) ist daher die einzige, welche den gegebenen Randwerth $f(\gamma)$ hat.

**XXI.** Ueber die Randfunction $f(\gamma)$ und den Randwerth von $v$ mögen dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie in XX, jedoch sollen Ausnahmen von denselben stattfinden in Punkten, welche auf der Kreislinie eine zweite Theilung bilden. In diesen Punkten soll es dem Randwerth von $v$ gestattet sein, aus den Schranken von $f(\gamma)$ herauszutreten. Unter folgenden Bedingungen lässt sich dann der Satz XX noch aufrecht erhalten.

Wenn $b$ und $\zeta$ zwei beliebig geringe Grössen sind, so kann immer eine ganze Zahl $n$ so gross angenommen werden, dass die Summe derjenigen $n^{\text{ten}}$ Zwischenbögen der neuen Theilung, in welchen irgendwo der beträchtlichste Unterschied der Schranken des Randwerthes von $v$

und derjenigen der Function $f(\gamma)$ beträchtlicher als $\zeta$ ist, geringer als $b$ wird.

Das Beweisverfahren ist dasselbe, wie in XX. Lässt man auch diese Einschränkung fallen, so gilt der Satz nicht mehr, wofür noch folgendes Beispiel angeführt werden mag.

Auf der Kreislinie möge die in VII beschriebene Theilung angenommen werden. Es soll eine Function $v$ auf der Kreisfläche bestimmt werden, welche am Rande überall $= 0$ wird. Nur in denjenigen Punkten, welche immer zwischen zwei Theilbögen liegen, sowie in den Endpunkten der letzteren soll es der Function $v$ gestattet sein, andere Werthe anzunehmen, welche jedoch nicht um mehr als 1 von Null verschieden sind.

Man setze die Function $f(\gamma)$ auf den Theilbögen bis zur $n^{\text{ten}}$ Grösse $= 0$, in den Zwischenbögen $n^{\text{ter}}$ Ordnung gleich einer constanten Grösse $a$ und bestimme eine Function $v$ nach der Gleichung 2) in XI. Indem man nun $n$ wachsen lässt, wird der Werth dieser Function $v$ in jedem innern Punkte sich einer bestimmten Grenze nähern. Die Randfunction $f(\gamma)$ ändert sich nämlich hierbei fortwährend; aber die Aenderungen werden, weil die Summe der noch hinzukommenden Theilbögen beliebig gering wird, zuletzt der Art, dass sie zu der Function $v$ verschwindende Beiträge liefern. Die Grenzwerthe von $v$ für $n = \infty$ bilden eine Function, welche im Innern des Kreises die in XI verlangten Eigenschaften hat, wie sich leicht nachweisen lässt. Dass der Randwerth in einem innern Punkte eines Theilbogens $= 0$ wird, ergiebt sich nach der in XI gezeigten Weise des Uebergangs nach dem Rande. In einem Punkte dagegen, der bei noch so grossem $n$ zwischen zwei Theilbögen liegt, wird der Randwerth $= a$ und im Endpunkte eines Theilbogens ist derselbe, je nach der Richtung der Annäherung, verschieden, liegt aber zwischen Null und $a$. Wenn nämlich in Fig. 1 der Punkt $Q$ ein solcher ist, welcher immer zwischen zwei Theilbögen liegt, so wird, je näher $O$ dem Rande ist, der Bogen $DE$ nur Theilbögen aus um so späteren Einschaltungen enthalten. Um so kleiner ist also auch der Theil des Bogens $DE$, welcher aus Theilbögen besteht im Vergleich zu dem ganzen Bogen, und um so kleiner sind die Winkel $d\delta$, die zu den Theilbögen gehören, im Vergleich des zu dem ganzen Bogen gehörigen Winkels $= \pi$. Der Beitrag, den die Theilbögen zu dem Werthe von $v$ im Punkte 0 liefern, verschwindet also zuletzt und dieser Werth hängt immer mehr von dem Werthe $f(\gamma) = a$ in den Zwischenbögen ab. Der Randwerth kann demnach nur $= a$ sein. Indem man nun für $a$ beliebige Werthe zwischen 0 und 1 nimmt, erhält man ebensoviele verschiedene Functionen $v$, die den gegebenen Randbedingungen genügen.

**XXII.** Wenn eine Function $f(\gamma)$ von den in XX vorausgesetzten Eigenschaften sich durch eine trigonometrische Reihe darstellen lässt,

derart, dass die Reihe für alle Werthe von $\gamma$, für welche $f(\gamma)$ einen einzigen bestimmten Werth hat, convergent und $= f(\gamma)$ ist, an allen denjenigen Stellen aber, wo $f(\gamma)$ nicht einen einzigen bestimmten Werth hat, hinreichend hohe Näherungswerthe der Reihe immer zwischen den benachbarten Werthen der Function liegen, so kann die Function nicht noch durch eine andere trigonometrische Reihe in gleicher Weise dargestellt werden.

Beweis. Angenommen, die Function $f(\gamma)$ sei in obiger Weise dargestellt durch die beiden Reihen

$$A_1 = a_0 + a_1 \cos(\gamma - t) + a_2 \cos 2(\gamma - t) \ldots,$$
$$B_1 = b_0 + b_1 \cos(\gamma - t) + b_2 \cos 2(\gamma - t) \ldots$$

Die Reihen

$$A_r = a_0 + a_1 r \cos(\gamma - t) + a_2 r^2 \cos 2(\gamma - t) \ldots,$$
$$B_r = b_0 + b_1 r \cos(\gamma - t) + b_2 r^2 \cos 2(\gamma - t) \ldots$$

sind dann für $r < 1$, also im Innern der Kreisfläche, stets convergent und stellen Functionen dar mit Eigenschaften, welche in XX von $v_1$ und $v_2$ vorausgesetzt wurden. Sie genügen nämlich der Gleichung $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$ und verhalten sich nach II und V auch bei der Annäherung an den Rand wie jene Functionen $v_1$ und $v_2$. Hieraus folgt aber der Satz nach XX.

Der Satz lässt noch folgende Erweiterung zu:

Auf der Kreislinie möge ausser den Unstetigkeitspunkten von $f(\gamma)$ eine beliebige zweite Theilung angenommen werden. $f(\gamma)$ soll durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden derart, dass, wenn $b$ und $\zeta$ zwei beliebig geringe Grössen sind, $n$ hinreichend gross genommen werden kann, damit die Summe der Zwischenbögen dieser zweiten Theilung, in welchen die Schranken der Reihe an keiner Stelle um mehr als $\zeta$ über die Schranken von $f(\gamma)$ hinausgehen, geringer als $b$ wird. Es ist dann nur eine solche Reihe möglich.

Gestattet man der Reihe weitere Abweichungen von $f(\gamma)$, so gilt der Satz nicht mehr. So kann z. B. eine Function $f(\gamma)$, welche constant $= 0$ ist, auf mehr als eine Weise durch eine Reihe dargestellt werden, welche in den Ausnahmepunkten des Beispiels in XXI beliebige Werthe zwischen 1 und 0 erhalten darf. Man erhält die Integrale der Reihe in derselben Weise, wie den Grenzwerth von $v$ in XXI. Für verschiedene Werthe von $a$ wird die Reihe verschieden.

---

Die Fourier'sche Reihe hat von der Bedeutung, welche man derselben als Darstellungsmittel für Functionen beilegte, immer mehr eingebüsst. Dirichlet schloss blos solche Functionen aus, bei welchen die Kreislinie durch Unstetigkeitspunkte in lauter unendlich kleine Theile

zerlegt ist; von den übrigen scheint er geglaubt zu haben, dass die aus denselben abgeleiteten Fourier'schen Reihen in allen Punkten, auch den Häufungspunkten der Maxima und Minima, convergent seien. Herr Du Bois-Reymond hat gezeigt, dass Letzteres nicht immer der Fall ist, was aber der Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihe als Darstellungsmittel für Functionen im Grunde keinen Eintrag thut. Sie wird nämlich, wie hier gezeigt worden ist, auch in solchen Punkten niemals unendlich gross; sie theilt vielmehr nur mit anderen Darstellungen von Functionen, z. B. $\frac{\sin x}{x}$, die Eigenschaft, an gewissen Stellen unbestimmt zu werden. Wir sind hier noch einen Schritt weiter gegangen, indem wir dargethan haben, dass es Functionen giebt, welche durch die Fourier'sche Reihe, auch wenn man von einzelnen Unbestimmtheiten absehen wollte, nicht darstellbar sind. Es gehören zu diesen zunächst sämmtliche nicht integrirbare Functionen. Wie hier durch Beispiele gezeigt worden ist, kommen solche Functionen auch unter denjenigen vor, welche an keiner Stelle zusammenhängend unstetig sind. Wollte man übrigens nur die Theilbogenwerthe solcher Functionen darstellen, so würde das durch die Fourier'sche Reihe geschehen können; man brauchte zu dem Ende nur die Integrale der Reihe blos über den Theilbögen zu nehmen. Auch dies ist aber nicht mehr möglich bei einem Theile derjenigen Functionen, bei welchen zusammenhängende Bögen durch fluxionslose Punkte in lauter unendlich kleine Theile getheilt sind. Die Endlichkeit der Function vorausgesetzt, wird zwar auch hier die Reihe niemals unendlich gross, aber sie kann unbestimmt werden.

---

## X.

# Perspectivische Studien.

(Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ueber die Grundprincipien der Linearperspective" im XXVI. Bande dieser Zeitschrift, 1881, S. 273.)

Von

Prof. Dr. GUIDO HAUCK

in Berlin.

---

In dem obengenannten Aufsatze habe ich mich vorwiegend mit der Discussion des „*collinearperspectivischen*" Systems befasst und habe mich hinsichtlich des „*conformperspectivischen*" Systems auf einige Bemerkungen beschränkt, welche den Zweck hatten, die Berechtigung dieses Systems von rein logischem Gesichtspunkte ausser Zweifel zu setzen. Die Frage nach der ästhetischen Zulässigkeit blieb unerörtert. Indessen ist die Erörterung gerade dieser Frage am meisten geeignet, die Unhaltbarkeit der bisherigen Theorie der Perspective ins Licht zu setzen. Wir werden dabei zu neuen Controversen über das Wesen des Sehprocesses, speciell über das Wesen des ästhetischen Beschauens geführt werden und werden es erneut bestätigt finden, dass meine Behandlungsweise des perspectivischen Problems die einzig mögliche ist, wenn man nicht einerseits mit der physiologischen Optik, andererseits mit der Kunstwissenschaft in directen Widerspruch gerathen will.

Auf eine Ergänzung meines früheren Aufsatzes in der angedeuteten Richtung gehe ich um so bereitwilliger ein, als ich in der Lage bin, mich dabei theilweise auf einen Gewährsmann zu stützen, dessen Autorität auf dem Gebiete der Perspective allgemein geachtet ist. Ich meine *De la Gournerie*. Er ist der einzige mir bekannte Autor, der auf eine Besprechung der in meinem früheren Aufsatze erörterten principiellen Fragen eingeht und dieselben in wissenschaftlichem Geiste behandelt. Wenn ich auch nicht in Allem seinen Ansichten beipflichten kann, so möchte ich doch wünschen, dass Jeder, der sich ein Urtheil über die in Rede stehenden Fragen bilden will, das *Livre V* des trefflichen „*Traité de Perspective linéaire*" *par Jules de la Gournerie** gelesen haben möchte.

---

* Paris 1859, Dalmond et Dunod.

## I. Die Abbildung von krummflächigen Objecten.

Es ist bekannt, dass bei der Abbildung von krummflächigen Objecten die Künstler, und zwar unter ihnen die tüchtigsten Perspectiviker, sich stets mehr oder weniger bedeutende Abweichungen von der strengen collinearperspectivischen Formgestaltung erlaubt haben. Es mag genügen, hier an die bekanntesten Beispiele zu erinnern: Eine Kugel, deren perspectivischer Umriss eine Ellipse sein sollte von um so grösserer Excentricität, je weiter ihr Mittelpunkt vom *Hauptpunkte* entfernt ist, wird stets als Kreis abgebildet. — Bei einer frontal stehenden Reihe von cylindrischen Säulen werden die Bilder der einzelnen Säulen stets in gleicher Breite gezeichnet, während sie nach dem collinearperspectivischen Bilde vom *Hauptpunkte* aus nach rechts und links immer breiter werden sollten. — Auch bei weniger einfachen Flächen findet man stets bewusste Abweichungen von der centralperspectivischen Contour. *De la Gournerie* sagt über dieselben: „*J'avais voulu corriger ce qui me paraissait incorrect, ce qui l'était certainement comme projection conique, et j'arrivais à des formes impossibles.*" — Am auffälligsten treten die Abweichungen zu Tage bei der Darstellung von menschlichen Figuren. Einzelfiguren werden stets mit so grosser Augdistanz gezeichnet — und es wird dies auch bei photographischen Aufnahmen beobachtet —, dass das Bild als geometrische Aufrissprojection betrachtet werden kann. Eine kleinere Augdistanz erzeugt perspectivische Verkürzungen, die „den Geist verwirren, ohne der Figur Relief zu geben". Es werden dann ferner die Staffagefiguren, die in eine centralperspectivische Scenerie gestellt werden — auch in grosser Entfernung vom Hauptpunkte —, ganz in derselben Weise behandelt, wie Portraitfiguren. Die streng centralperspectivischen Contouren mit Benützung des Augpunktes der Scenerie würden unmögliche Formen ergeben. — Grössere Figurengruppen sollten bei strenger Anwendung der collinearen Perspective mit nach rechts und links zunehmender Dickbauchigkeit und mit gegen den Rand hin immer länger gezogenen elliptischen Köpfen gezeichnet werden. Es ist aber noch nie einem Künstler eingefallen, in dieser Weise centralperspectivisch correct zu zeichnen. Allerorts und zu aller Zeit wurden Figurengruppen in parallelperspectivischer gerader Ansicht dargestellt, auch wenn die betreffende Scenerie in vollkommen centralperspectivischer Correctheit gezeichnet ist.

Diese Abweichungen sind in der Kunstpraxis so allgemein anerkannt und so tief eingewurzelt, dass es thatsächlich schwer hält, ein malerisches Kunstwerk aufzufinden, welches von strengem centralperspectivischem Standpunkte aus nicht „fehlerhaft" gezeichnet wäre. Man kann daher diese Abweichungen nicht mehr als blosse künstlerische Licenzen bezeichnen; es handelt sich hier vielmehr um ein tief ein-

greifendes, in der praktischen Kunstübung allgemein anerkanntes Princip, und es bleibt uns nur die Wahl: entweder die gesammte Kunst zu desavouiren oder dem Glauben an die Unfehlbarkeit der geometrischen Centralperspective zu entsagen.

Würden wir uns für die erste Wahl entscheiden, so würden wir auf die nämlichen Irrwege gerathen, in welche sich ehedem die Naturphilosophie verrannte, als sie sich unterfing, die Naturgesetze unabhängig von ihren Aeusserungen in den Naturerscheinungen *a priori* zu construiren. Auch in der Kunstwissenschaft muss, wie überhaupt bei jeder wissenschaftlichen Forschung, der oberste Grundsatz gelten, dass wir nimmermehr mit der dogmatischen Feststellung der Grundprincipien beginnen dürfen. Wir dürfen und können vielmehr nur in der Art verfahren, dass wir das von der Kunstgeschichte uns gebotene Material von Kunsterscheinungen als Beobachtungsthatsachen anerkennen, aus denen wir nach den Grundsätzen der exacten Wissenschaften rückwärts die Darstellungsprincipien zu extrahiren, abzuklären, mathematisch zu formuliren und physiologisch zu begründen haben.

Ich habe diesen Grundsatz in meinem Aufsatze: „*Die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft*“* näher ausgeführt. Auf die Perspective angewendet, stimmt derselbe mit dem Satze *De la Gournerie*'s überein: „*L'expérience a prononcé: elle a prouvé que la Projection conique employée avec de certaines précautions donnait des représentations convenables: on s'est soumis à sa décision: mais au lieu de reconnaître la base expérimentale de la Perspective, les auteurs ont continué à présenter l'hypothèse du spectateur borgne et immobile, comme une supposition toute naturelle, et contre laquelle on ne saurait élever aucune objection sérieuse.*“

*De la Gournerie* spricht denn auch den Satz mit aller Unumwundenheit aus: „*La perspective des surfaces est soumise à des lois particulières.*“ Aus der Vergleichung einer grossen Anzahl von Kunstwerken leitet er die praktische Regel ab: man solle zuerst sämmtliche gerade Linien in Perspective setzen, hierauf für jeden krummflächigen Körper einen mittleren Punkt $A$ wählen, seine Perspective $a$ construiren und nun die räumliche Lage von Augpunkt und Körper so verändern, dass Augpunkt und Punkt $A$ auf der Senkrechten zur Bildebene durch Punkt $a$ liegen, und zwar im nämlichen Abstand von der Bildebene, wie zuvor (der Augpunkt unter Umständen in grösserer Entfernung). — Freilich sind die nach dieser Regel erhaltenen Einzelresultate noch mehr oder weniger zu modificiren, um sie mit dem allgemeinen perspectivischen Ensemble in Zusammenstimmung zu bringen. Namentlich gilt dies für den Fall, dass das krummflächige Object in unmittelbarer Beziehung zu ge-

* Vortrag, gehalten am Schinkelfest 1880. Berlin 1880, Ernst & Korn.

radlinigen Details steht (Rotationskörper mit viereckigem Aufsatz oder Untersatz, Säulenfuss, Säulenkopf, Gesimse etc.).

## II. Die conformperspectivische Abbildung.

Man sollte erwarten, dass die physiologische Begründung der Perspective eine Aufklärung über die Berechtigung der besprochenen Abweichungen von der strengen centralperspectivischen Richtigkeit ertheilte. Der Beweis, der für die ästhetische Wirkung des perspectivischen Bildes erbracht wird, müsste sich für krummflächige Objecte weniger zwingend erweisen, als für ebenflächige. Bestätigt sich diese Erwartung nicht, so folgt daraus der Schluss, dass entweder die Abweichungen wirklich unzulässig sind, oder aber, dass jener Beweis unzutreffend ist. Ein Drittes giebt es nicht. — Da wir von unserem Standpunkte aus das Erstere nicht zugeben können, so bleibt uns nur die zweite Möglichkeit.

Aus der gewöhnlichen Begründung *(Glastafel-Begründung)* ergiebt sich nun in der That keine Berechtigung für jene Abweichungen. Vom Projectionscentrum aus betrachtet, erscheinen z. B. die richtig als Ellipsen gezeichneten Köpfe einer Figurengruppe wieder vollkommen kreisrund. Würden dagegen die Figuren alle von gleicher Dicke mit kreisrunden Köpfen gezeichnet werden, so würden die Randfiguren rechts und links zu dünn erscheinen. — Man kommt über die in Rede stehende Schwierigkeit auch nicht durch das gewöhnlich empfohlene Universalmittel der Wahl einer grossen Augdistanz hinweg. Die Kunst kann und will nicht auf den durch kleine Augdistanzen bedingten perspectivischen Reiz verzichten. Namentlich bei Innenräumen erweisen sich kleine Augdistanzen noch mehr aus künstlerischen, als aus praktischen Gründen als unvermeidlich. (Als Beleg hierfür mag auf *Raffael's* vaticanische Wandgemälde hingewiesen werden, wo die Augdistanz nur gleich der einfachen Bildbreite ist. Eine Correctur derselben im Sinne einer absoluten centralperspectivischen Correctheit demonstrirt die Widersinnigkeit der centralperspectivischen Unfehlbarkeit *ad oculos*, während andererseits eine Umconstruction für eine grössere Augdistanz die ganze Wirkung der prächtigen architektonischen Scenerien zerstört.)

Nach unserer Compromisstheorie dagegen erledigt sich die in Rede stehende Frage auf höchst einfache Weise: Wie ich in meinem früheren Aufsatze gezeigt habe, stellt die Abbildung allgemein einen Compromiss zwischen den zwei Bedingungen der Collinearität und der Conformität vor, wobei die Feststellung des Compromissmodus, in analoger Weise wie beim subjectiven Anschauungsbilde selbst, nach Maassgabe der Besonderheiten des Objects zu geschehen hat. — Bei solchen Objecten, wo gerade Linien eine hervorragende Rolle spielen, also namentlich bei architektonischen Objecten, wird die Bedingung der Col-

linearität in erster Linie zu befriedigen sein, und nur soweit es diese erste Rücksicht gestattet, kann noch der Conformität Rechnung getragen werden. Hieraus ergab sich uns das collinearperspectivische System.

Ganz anders verhält es sich aber nun bei Objecten, die keine geraden Linien enthalten, also bei krummflächig begrenzten Gegenständen. Bei solchen ist die Collinearität mehr oder weniger gegenstandslos und es tritt daher das andere Princip, die Conformität, in den Vordergrund. Oder genauer gesprochen: Im subjectiven Anschauungsbilde verlangt zwar hinsichtlich der Wahrnehmung von wirklichen geraden Linien unser Collinearitätsbewusstsein unbedingte Befriedigung. Dagegen erweist sich dasselbe für den Fall, dass nicht direct gerade Linien vorhanden sind, hinsichtlich der weiteren Consequenzen, die sich aus der Forderung der Collinearität ergeben würden, weniger empfindlich. Es kommt daher in diesem Falle der andere Factor, das Conformitätsprincip, zu erhöhter Geltung und gewinnt über das Collinearitätsprincip die Oberhand. (So kommt es z. B., dass das subjective Anschauungsbild einer Kugel, selbst in collinearer Umgebung, stets conform, das heisst kreisförmig ist.) Wenn nun die objective Abbildung eine Wiedergabe des subjectiven Anschauungsbildes sein soll, so folgt aus dem Gesagten, dass auch in dem für die Abbildung einzuleitenden Compromissmodus bei krummflächigen Objecten nicht das Princip der Collinearität, sondern das der Conformität wird dominiren müssen.

Ich habe daher schon in meiner „*Subjectiven Perspective*“ als Pendant zu dem *collinearperspectivischen* System ein zweites — *conformperspectivisches* — System aufgestellt, welches durch folgende Bedingungseigenschaften charakterisirt ist: 1. Bedingung des geradlinigen Horizontes, 2. Bedingung der Verticalität, 3. Bedingung der Conformität längs der wichtigsten Linien, nämlich längs der Horizontlinie und längs der Verticalen. (In noch höherem Maasse der Conformität Rechnung zu tragen, erweist sich als unmöglich.) — Man erkennt leicht, dass die oben mitgetheilte Regel, welche *De la Gournerie* für die Abbildung von krummflächigen Objecten giebt, im Resultat ungefähr auf dasselbe hinausläuft, wie die Abbildung nach dem Princip des conformperspectivischen Systems. Ich befinde mich also hier in vollkommener Uebereinstimmung mit *De la Gournerie* und — da *De la Gournerie* seine Regel aus dem in der Kunstpraxis überall anerkannten Darstellungsverfahren abgeleitet hat — auch in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Kunstpraxis.*

* Ich habe in meiner „*Subjectiven Perspective*“ für eine Berechtigung der conformen Perspective sogar bei ebenflächigen Objecten plaidirt, soweit als die hierbei auftretende Verletzung der Geradlinigkeit das Auge nicht unangenehm berührt. Ich war hierzu meinen Grundsätzen gemäss berechtigt, insofern die Kunstpraxis in der That die mannigfachsten Beispiele dafür aufweist. — Uebrigens

Bei Objecten, die aus ebenflächigen und krummflächigen Details zusammengesetzt sind, hat man einen Compromiss zwischen der collinearperspectivischen und conformperspectivischen Formgestaltung einzuleiten; und zwar wird auch hier wieder die collineare Perspective dominiren müssen. Man wird am besten in der Art verfahren, dass man die Zeichnung zunächst collinearperspectivisch anlegt und nachträglich die dabei zu Tage tretenden Conformitätsverzerrungen im Sinne der conformen Perspective modificirt. Es ist dies namentlich für Innen-Architekturen bei kleiner Augdistanz zu empfehlen. (In dieser Weise sind in der That *Lionardo*, *Raffael* und alle grossen Meister verfahren.) Dasselbe Princip wird vor Allem bei Figurengruppen zur Anwendung gelangen müssen. Z. B. müssten nach der collinearen Perspective die Randfiguren rechts und links dicker sein als die Mittelfiguren, was unserem Conformitätsbewusstsein widersprechen würde. Nach der conformen Perspective dagegen müssten die Randfiguren (entsprechend ihrer grösseren Entfernung) dünner sein als die Mittelfiguren; dies letztere würde aber in einen unangenehmen Widerspruch zu der collinearperspectivisch gezeichneten architektonischen Scenerie und ihrem gegen den Rand hin sehr fühlbar werdenden, in die Breite gezogenen, Verzerrungscharakter treten. Der Künstler hat daher ganz Recht, wenn er einen Compromiss eingeht und die Figuren alle von gleicher Dicke zeichnet.

### III. De la Gournerie's Restitutionstheorie.

Ich sagte zu Anfang des vorigen Abschnittes: die Abweichungen von der strengen centralperspectivischen Richtigkeit lassen sich von dem alten Standpunkte aus nicht vertheidigen oder erklären. Nun hat aber *De la Gournerie* eine Erklärung versucht*, welche interessant genug ist, um uns zu einer kritischen Beleuchtung derselben aufzufordern.

*De la Gournerie* geht von der Vorstellung einer unbedingt illusorischen Wirkung des perspectivischen Bildes aus und sucht von dieser Grundanschauung aus zunächst die Wirkung des Bildes zu erklären für den Fall, dass es von excentrischem Standpunkte (freilich nur mit einem einzigen Auge) betrachtet wird.

Das sogenannte umgekehrte Problem der Perspective, nämlich: für ein gegebenes perspectivisches Bild das räumliche Object zu reconstruiren, ist zunächst eine unbestimmte Aufgabe. Dieselbe kann aber bestimmt gemacht werden dadurch, dass man gewisse Bedingungen fest-

---

ist die diesbezügliche Streitfrage eine blosse Frage des individuellen Geschmacks, und ich trage dem vielseitigen Widerspruch, der gegen die Abbildung von Geraden durch sanfte Bogenlinien erhoben worden ist, ohne Bedenken Rechnung. Es liegt mir sehr viel daran, dass durch diese Nebenfrage die Aufmerksamkeit nicht von dem Kerne der Sache abgelenkt werde. (Vergl. die Schlussworte meines früheren Aufsatzes.)

* S. Traité de Persp., Livre V Chap. 2—3.

setzt, denen das restituirte Object genügen soll, — Bedingungen, welche sich aus der Natur der dargestellten Gegenstände ergeben müssen. Bei architektonischen Objecten z. B. wird man jedenfalls die Bedingung aufstellen, dass — nach unserer Ausdrucksweise — die Collinearität und die Verticalität im restituirten Object erhalten bleibe. — Eine solche „*Restitution*“ führt nun das Auge beim Beschauen eines Gemäldes unwillkürlich aus. In der That repräsentirt die Illusion, welcher das Auge beim Beschauen eines Bildes vom Projectionscentrum aus unterworfen ist, nichts Anderes, als eine unwillkürliche Restitution des Objectes.

Eine solche illusorische Restitution kann nun aber — wie für das Projectionscentrum, so auch für jeden beliebigen andern Standpunkt des Beschauers ausgeführt werden. Das restituirte Object hat freilich für jeden andern Standpunkt eine andere Gestalt. Ist aber diese nicht allzusehr verschieden von der Gestalt des eigentlichen Objectes, so wird der Eindruck des Bildes ein befriedigender sein.

*De la Gournerie* untersucht nun die geometrischen Beziehungen zwischen zwei — zweien verschiedenen Augpunkten entsprechenden — Restitutionen. Er zeigt, dass dieselben centrisch-collinear in perspectivischer Lage sind. In der allgemeinsten Form ist der betreffende Satz von Herrn *Staudigl* so ausgesprochen worden:*

„Es giebt für jeden beliebigen Punkt $O'$ des Raumes unendlich viele mit $\Sigma$ (Originalsystem) collineare räumliche Systeme $\Sigma'$, welche, aus $O'$ auf $E$ (Bildebene) projicirt, dieselbe Projection S (Bildfigur) liefern, wie $\Sigma$ für das Projectionscentrum $O$.“

Die Bildebene stellt die (allen gemeinschaftliche) Collineationsebene vor; das Collineationscentrum $M$ liegt auf der Verbindungslinie der zwei Augpunkte $O$ und $O'$. Jedem auf $OO'$ beliebig angenommenen Punkte $M$ entspricht ein bestimmtes System $\Sigma'$. Jedes System $\Sigma'$ hat mit dem Originalsystem $\Sigma$ eine bestimmte Horizontalebene gemein, nämlich diejenige, welche durch das Collineationscentrum $M$ geht. — Wird $M$ im unendlich fernen Punkte der Linie $OO'$ angenommen, so hat das entsprechende System $\Sigma'$ mit $\Sigma$ die unendlich ferne Ebene gemein; die zwei Systeme sind affin.

Die Frage nun, welches von diesen unendlich vielen Systemen $\Sigma'$ identisch ist mit derjenigen Restitution, welche das Auge beim Beschauen vom Punkte $O'$ aus unwillkürlich ausführt, entscheidet *De la Gournerie* dahin, dass im Allgemeinen die horizontale Bodenebene, auf welcher die dargestellten Objecte aufstehen, wieder als horizontale Ebene restituirt werde. Es werde daher dasjenige System $\Sigma'$ das bevorzugte sein, für welches die der Bodenebene des Originalsystems entsprechende Ebene

* In seinem vortrefflichen Aufsatze: „Ueber die Identität von Constructionen etc.“ Sitzungsber. d. k. Ak. d. Wiss. z. Wien, math.-naturw. Cl., 64. Bd. (1871) S. 490.

wieder horizontal sei, also dasjenige, für welches das Collineationscentrum $M$ im Schnittpunkte der Bodenebene mit $OO'$ liege.

*De la Gournerie* sagt nun: Die collinearen Deformationen, wie sie die restituirten Objecte zeigen, seien für ebenflächige Objecte dem Auge wenig auffällig. („*La conservation des lignes droites, condition essentielle pour le maintien de l'harmonie d'une composition, est satisfaite dans la loi géométrique de la restitution, pour divers points de vue, des objets représentés sur un tableau plan par une projection conique. C'est principalement de là que résultent les effets merveilleux de cet admirable mode de dessin.*“) Bei krummflächigen Objecten dagegen seien die Deformationen viel weniger annehmbar (eine Kugel z. B. ändert sich in ein Ellipsoid), und daher sei für krummflächige Objecte das centralperspectivische Bild ein weniger befriedigendes, als für ebenflächige.

## IV. Kritik der Restitutionstheorie.

So viel Verlockendes auch diese Theorie auf den ersten Blick haben mag, so sehr häufen sich die Bedenken gegen dieselbe, sobald man sie einer eingehenderen kritischen Analyse unterwirft.

Zunächst erheben sich gewichtige Zweifel darüber, ob das von dem Auge unwillkürlich restituirte Object wirklich identisch sei mit dem von *De la Gournerie* angenommenen System $\Sigma'$. Bei demselben würden die horizontalen architektonischen Parallellinien nicht wieder parallel sein, sondern gegen einen Punkt convergiren, während sie doch Jedermann unwillkürlich als horizontal und unter sich parallel restituiren wird. Vor Allem aber macht Herr *Wiener* sehr richtig darauf aufmerksam,* dass — für eine Stellung des beschauenden Auges unterhalb der Abbildung des hinteren Randes der begrenzten Bodenfläche — die Restitution der Bodenfläche durch das Unendliche hindurchgehen und hinter dem Rücken des Beschauers endigen würde. Man beachte dabei, dass in unseren Wohnräumen die Bilder fast durchweg über Augenhöhe aufgehängt sind, dass also jene absurde Art der Restitution sogar die gewöhnliche sein würde.

Herr *Wiener* nimmt daher an, dass die vom Auge unwillkürlich ausgeführte Restitution nicht das von *De la Gournerie* bevorzugte System $\Sigma'$, sondern vielmehr das oben erwähnte affine System sei.

Es lässt sich nicht leugnen, dass hierdurch sehr viel gebessert ist. Indessen erheben sich auch gegen die affine Restitution gewichtige Bedenken. Die architektonischen Parallellinien sind nun in der Restitution allerdings wieder parallel; aber alle horizontalen Linien und Flächen sind schief. Und zwar erkennt man leicht, dass sie parallel der Ebene durch Horizontlinie und das beschauende Auge $O'$ sind. Legen wir als Bei-

* In einer Privatcorrespondenz.

spiel wieder die in unseren Wohnräumen gewöhnliche Art der Aufhängung der Bilder zu Grunde, so sind hier scheinbare Neigungswinkel der horizontalen Flächen von 30 bis 45 Grad nichts Ungewöhnliches. Nun kann man sich bei Strassenscenen allenfalls die Bodenfläche aufsteigend denken, nicht aber die Dachgesimse. Bei Interieurs ferner wird das Auge in der unwillkürlich ausgeführten Restitution unter allen Umständen eine horizontale Bodenebene supponiren. Vollends eine nach hinten schief aufsteigende Deckenebene zu restituiren, wird keinem Beschauer einfallen, oder richtiger: wird sich keiner gefallen lassen. Es ist eine starke Zumuthung, den ästhetischen Genuss beim Beschauen eines Gemäldes eben darin zu erblicken, dass dem Auge ein räumliches Object von unmöglicher Gestalt illusorisch vorgezaubert werde.

Somit kann auch das affine System nicht dasjenige sein, welches das Auge unwillkürlich restituirt. — Welches ist es aber dann? Eines der Systeme $\Sigma'$ muss es doch wohl sein?

Dies Letztere ist nun eben die Frage. Es ist in keiner Weise bewiesen, sondern ist reine Fiction. *De la Gournerie* nimmt an, dass der Beschauer das restituirte räumliche Object wirklich zu sehen glaube, dass also die Restitution, welche er unwillkürlich ausführt, durch Vermittelung einer sinnlichen Illusion zu Stande komme. Dies ist aber eine Hypothese, die nicht blos nicht bewiesen ist, sondern deren Unrichtigkeit sich auch leicht durch directes Experiment nachweisen lässt.

Es ist ganz richtig, dass die unwillkürliche Restituirung des Objectes eine sehr wichtige Rolle beim Beschauen eines malerischen Kunstwerkes spielt und daher ein Moment von grösster Bedeutung für die ästhetische Wirkung des Bildes ist. Allein dieselbe wird nicht durch einen rein mechanischen illusorischen Zauber bewirkt, sondern repräsentirt vielmehr einen Act, der in der geistigen Vorstellung vor sich geht, bei welchem also das Verstandesurtheil und die geistige Einbildungskraft die Hauptrolle spielen. Wir haben es hier wieder mit dem *proton pseudos* zu thun, das die ganze Verwirrung angerichtet hat und dessen Bekämpfung das $A$ und $\Omega$ meiner ganzen Polemik bildet: Es ist nicht wahr, dass das Sehen (und zumal das ästhetische Beschauen) einen blos sinnlich-mechanischen Vorgang repräsentirt, wie die alte Theorie annimmt. Es kommen dabei vielmehr wesentlich psychische Momente ins Spiel.

Jeder Beschauer wird die unwillkürliche Restitution so ausführen, dass er, seinem Verstandesurtheil folgend, die geraden Linien geradlinig, die Parallelen parallel und die Horizontalen horizontal restituirt. Nun giebt es aber unter den Systemen $\Sigma'$ keines, welches die zwei letztgenannten Eigenschaften zugleich befriedigte. Nur das Originalsystem $\Sigma$ genügt dieser Forderung. — Würde nun die unwillkürliche Restitution durch Vermittelung einer sinnlichen Illusion erfolgen, d. h. würde das Auge das restituirte Object realiter vor sich stehen sehen, dann müsste es aller-

dings eines der Systeme $\Sigma'$ sein. Ist aber die Restitution eine Function des Verstandesurtheils, so ist dieser Schluss keineswegs gerechtfertigt. Es kann dann sehr wohl auch von excentrischem Standpunkte aus das wirkliche Object $\Sigma$ restituirt werden.

Man beachte wohl, dass, wenn *De la Gournerie* sagt: „*La conservation des lignes droites est satisfaite dans la loi géométrique de la restitution etc.*“, er sich eigentlich in einem Zirkel bewegt. Denn der *De la Gournerie-Staudigl*'sche Satz ist nichts als ein anderer Ausdruck der zu Anfang aufgestellten Hypothese, jeder geraden Linie des Bildes müsse in der Restitution wieder eine gerade Linie entsprechen.* Dies Letztere ist aber eine rein intellectuelle Forderung, die mit der intellectuellen Forderung der Parallelität der architektonischen Linien und der Horizontalität von Bodenebene und Deckenebene vollkommen coordinirt ist und mit sinnlicher Illusion schlechterdings nichts zu thun hat.

Wie schon oben erwähnt, kann die Richtigkeit dieser meiner Auffassung durch directes Experiment erwiesen werden.

Man beobachte zunächst ohne alle Voreingenommenheit, in welcher Weise man beim Beschauen eines Bildes von excentrischem Standpunkte aus unwillkürlich die Restitution ausführt. Man wird sich überzeugen, dass hier von einer Illusion absolut nicht die Rede ist, dass es vielmehr lediglich das Verstandesurtheil ist, welches die geraden Linien geradlinig, die Bodenebene und Deckenebene horizontal, die Parallelen parallel, die Verticalen vertical u. s. w. restituirt.

Nun suche man aber weiter durch Zwang eine Illusion wirklich zu erzeugen. — Beim Beschauen mit zwei Augen gelingt dies nie, beim Beschauen mit einem Auge nur schwer. Das Verstandesurtheil lehnt sich eben gegen jede unwahrscheinliche Gestaltung unwillkürlich auf. — Dagegen gelingt es leicht, wenn man das eine Auge zuerst an die Stelle des Projectionscentrums bringt und von hier aus allmälig durch stetige Bewegung in excentrische Stellung überführt. Beim Betrachten vom Projectionscentrum aus ist die Herstellung der Illusion leicht, weil hier das Verstandesurtheil nicht opponirt, sondern sogar unterstützt. Hat man dann aber einmal die räumliche Illusion erzeugt, so gelingt es unschwer, sie festzuhalten, wenn man das Auge stetig vom Projectionscentrum weg bewegt. Man sieht dann, wie das restituirte räumliche Object seine Gestalt stetig ändert; und zwar wird man finden, dass die Aenderungen und Verschiebungen im Allgemeinen der *Wiener*'schen Annahme ent-

---

* Hieraus folgt zunächst, dass zwei Systeme $\Sigma'$ zu einander in der Verwandtschaft der allgemeinen Collineation stehen müssen. Dass aber diese Collineation eine centrische in perspectivischer Lage ist, folgt dann unmittelbar aus dem Umstande, dass beide Systeme $\Sigma'$ ein ebenes System (Bildfigur S) gemeinsam haben. (Es dürfte hierin zugleich der einfachste und natürlichste Beweis des *De la Gournerie-Staudigl*'schen Satzes enthalten sein.)

sprechen. Es erfordert jedoch immer einigen Zwang, die Illusion festzuhalten; man muss das Verstandesurtheil mit Gewalt zurückdrängen.

Man halte nun eine solche illusorische Restitution (z. B. mit nach hinten aufsteigender Bodenebene und Deckenebene) fest und beantworte sich dabei aufrichtig die Frage, ob durch diese Art des gezwungenen, geistlosen Sehens wirklich ein ästhetischer Genuss bedingt ist, ob hierin wirklich die ästhetische Wirkung des Bildes begründet ist?

Endlich öffne man plötzlich das (seither verschlossen gehaltene) andere Auge —: die ganze Illusion ist im selben Moment wie weggeblasen. Man sieht die vorher nach hinten aufsteigende Deckenebene förmlich herunterschnappen. Man mag sich zwingen, wie man will: es gelingt nicht, die Illusion festzuhalten.

Ich möchte Jedermann bitten, diese sehr instructiven Versuche in einer Gemäldegalerie bei verschiedenen guten Bildern anzustellen. Sie scheinen mir entscheidend zu sein. — Es ist eine deprimirende Thatsache, dass trotz aller theoretisch-ästhetischen Erörterungen noch nicht einmal das Wesen des ästhetischen Beschauens festgestellt ist, dass die Theorie der schönen Künste heute noch auf Anschauungen aufgebaut ist, nach denen die Einäugigkeit als ein beneidenswerthes, zu höheren ästhetischen Genüssen befähigendes Glück erscheinen muss. Es dünkt mich, die höchste Zeit zu sein, dass über diese Fundamentalfrage der Aesthetik endlich Klarheit geschafft werde. So lange dies nicht geschehen ist, kann von einer richtigen Definition des Begriffes „Abbildung" und in engem Zusammenhang damit — von einer richtigen Begründung der Perspective nicht die Rede sein.

Kehren wir übrigens wieder zu *De la Gournerie*'s Theorie zurück, so bekämpfe ich an derselben nur die Voraussetzung, dass die vom Beschauer unwillkürlich ausgeführte Restitution durch Vermittelung einer Illusion erfolge. Sobald man die Theorie in der Art modificirt, dass man den Vorgang bei der unwillkürlichen Restitution als einen geistigen anerkennt, fallen alle Schwierigkeiten von selbst hinweg. In diesem Sinne verstanden, kommt der unwillkürlichen Restitution allerdings eine grosse Bedeutung beim Beschauen eines malerischen Kunstwerkes zu, und ich sehe es als ein entschiedenes Verdienst von *De la Gournerie* an, dass er die Aufmerksamkeit hierauf gelenkt hat.

Mit den angedeuteten Beschränkungen stimmen denn auch die am Schlusse des vorigen Abschnittes (S. 243) citirten Worte *De la Gournerie*'s: „*La conservation des lignes droites etc.*" vollkommen mit meiner Auffassung überein. Denn nur dann, wenn die Abbildung die Bedingung der Collinearität erfüllt, kann das räumliche Object nachträglich wieder collinear restituirt werden. *De la Gournerie* fordert also im Interesse der unwillkürlichen Restitution indirect die nämlichen Bedingungen für die Abbildung, welche ich auf directem Wege aus der Natur des Sehprocesses

und der Definition des Begriffes „Abbildung“ abgeleitet habe. — Es ist indessen auf das Unzureichende der Betrachtungsweise *De la Gournerie*'s hinzuweisen, wenn derselbe nur die Bedingungen der Collinearität und der Verticalität in Betracht zieht und diese allein für die gute Wirkung des perspectivischen Bildes verantwortlich macht. Die citirten Worte sind in gleicher Weise giltig für sämmtliche der Bedingung der Collinearität und Verticalität genügenden perspectivischen Systeme, auch für solche, denen nichts weniger als eine ästhetische Wirkung zukommt. Die diesbezügliche Lücke kann nur durch Herbeiziehung des Princips der Conformität ausgefüllt werden.

---

*Ceterum censeo:* Meine Behandlungsweise des perspectivischen Problems ist bis jetzt die einzige, welche sich nicht in Widersprüche mit der Logik, mit der physiologischen Optik und mit der Kunstpraxis verwickelt. — Sie ist zwar etwas umständlicher, als die alte Theorie; allein es ist ja gewiss nicht meine Schuld, dass der Sehprocess leider nicht so sehr einfach ist, als die alte Theorie annahm. Diese alte Theorie ist in ihrer Unhaltbarkeit blossgelegt, das herrschende Dogma von dem mechanischen Charakter des Sehprocesses und der einäugig-illusorischen Wirkung eines Bildwerkes ist gestürzt und damit der Boden für eine sachgemässe Behandlungsweise der Theorie der bildenden Künste geebnet. — Die dargelegte neue Auffassung des perspectivischen Problems musste sich so gewiss geltend machen, so gewiss der *Poncelet*'sche Begriff der Homologie sich erweitert hat zu dem *Möbius*'schen allgemeinen Begriffe der Collineationsverwandtschaft. — Die alte Theorie begründete nur die Panoramaperspective und unterschob dann unbewiesen die Behauptung, dass die Panoramagesetze auch für die Staffeleikunst massgebend seien. Meine Theorie begründet die Perspective zunächst für die Staffeleikunst und zeigt nebenbei, dass dieser Perspective u. A. auch eine illusorische Eigenschaft zukommt, welche sie für panoramatische Zwecke ausgezeichnet geeignet macht.

Es sei mir übrigens zur Verhütung von Missverständnissen gestattet, hier zu wiederholen, was ich schon in meiner „*Subjectiven Perspective*“ ausgesprochen habe: Wenn ich auch die seitherige Begründung der Perspective für absolut ungenügend erkläre, so möchte ich doch ihren pädagogischen Werth in keiner Weise beeinträchtigen. Ich bin keineswegs der Meinung, der Unterricht in der Perspective solle mit den in meinem früheren Aufsatze gegebenen Erörterungen beginnen. Man beginne immer mit der Ableitung der „*Panorama-Perspective*“ vermittelst der Glastafel-Begründung; man unterlasse es aber nicht, an den Schluss des Lehrganges eine allgemeine Betrachtung über das Wesen der ästhetischen Wirkung des perspectivischen Bildes im Sinne meines früheren und des gegenwärtigen Aufsatzes zu setzen.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

### XIV. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hilfe von Involutionen auf Kegelschnitten.

Bezeichnet man mit $x_1$ und $x_2$ die Parameter eines Systems von einfacher Unendlichkeit, so ist die allgemeine Relation, die zwischen ihnen eine quadratische Involution festsetzt,

$$\alpha x_1 x_2 + \beta(x_1 + x_2) + \gamma = 0$$

oder

$$x_2 = -\frac{\beta x_1 + \gamma}{\alpha x_1 + \beta}.$$

Es möge nun im Folgenden das Element, welches dem Parameterwerthe $x$ entspricht, stets mit $p_x$ und, wenn $p_x$ ein Punkt des Kegelschnittes $K$ ist, die Tangente in $p_x$ mit $T_x$ bezeichnet werden.

1. Wenn $p_0$ und $p_\infty$ ein Paar entsprechender Punkte sind, so folgt aus der Gleichung der Involution

$$\alpha x_1 x_2 + \gamma = 0$$

oder

1) $$x_1 x_2 = const.$$

2. Wenn $p_\infty$ ein Doppelpunkt ist, so ist

$$\beta(x_1 + x_2) + \gamma = 0,$$

2) $$x_1 + x_2 = const.$$

3. Sollen $p_0$ und $p_\infty$ die beiden Doppelpunkte sein, so muss

3) $$x_1 + x_2 = 0.$$

Diese Gleichungen können zur Construction algebraischer Ausdrücke benutzt werden. Vor allem Andern werden die einzelnen Elemente (Punkte) durch Parameter fixirt. Als Parameter kann man z. B. die Abscissen in der geraden Punktreihe, die Parameter eines mit dem gegebenen Gebilde projectivischen Systems einfacher Unendlichkeit, das Theilverhältniss in Bezug auf zwei, oder das Doppelverhältniss in Bezug auf drei Elemente annehmen. Denn drei Elementen eines Systems von einfacher Unendlichkeit kann man beliebige Parameterwerthe zuordnen, aber dann ist der Parameter jedes Elementes eindeutig bestimmt, und umgekehrt.

#### Addition.

Wenn man in der Involution

1) $$x_1 + x_2 = const.$$

das dem $p_0$ entsprechende Element $p_c$ aufsucht, so ist

$$x_1+x_2=c+0,$$

so dass die Operation der Addition auf die Vervollständigung dieser Involution zurückgeführt ist. Es ist nämlich $p_{x_1}$ und $p_{x_2}$ ein Elementenpaar einer Involution, der auch $p_c$ und $p_0$ als Paar angehören und in welcher $p_\infty$ ein Doppelelement ist.

Hat man z. B. zwei Strecken $\overline{oa}$ und $\overline{ob}$ auf einer Geraden $G$ zu addiren, so nehme man in der Ebene einen beliebigen Kegelschnitt (Kreis) $K$ an. Projicirt man $o$, $a$, $b$ aus $s$, einem Punkte von $K$, und nennt ihre Projectionen $p_0$, $p_a$, $p_b$, und bezeichnet den Schnitt der von $s$ parallel zu $G$ gezogenen Geraden mit $p_\infty$, so ist hierdurch jedem Punkte von $K$ und $G$ ein bestimmter Werth des Parameters zugewiesen.

Nun treffe $\overline{p_a p_b}$ $T_\infty$ in $\sigma$ (Centrum der Punktinvolution auf $K$), so wird nach 1) $\overline{\sigma p_0}$ $K$ in $p_{a+b}$ schneiden, und es ist $oa+ob=oc$, wenn $c$ den Schnitt von $G$ mit $sp_{a+b}$ bezeichnet.

Um also $p_{x_1+x_2}$ aus $p_{x_1}$ und $p_{x_2}$ zu construiren, verbindet man den Schnitt von $\overline{p_{x_1}p_{x_2}}$ und $T_\infty$ mit $p_0$, welche Gerade $K$ in $p_{x_1+x_2}$ trifft.

Soll $x_1+x_2+x_3=c'$ construirt werden, so construire man zuerst $x_1+x_2=c$ und dann $c+x_3=c'$, indem man wieder $T_\infty$ mit $\overline{p_c p_{x_3}}$ in $\sigma'$ schneidet und $K$ mit $\overline{\sigma' p_0}$ in $c'$ zum Durchschnitte bringt.

In derselben Weise kann die Summe beliebig vieler Werthe (Punkte) $x_1+x_2+\ldots+x_n=C$ construirt werden.

Da die Anordnung der Addenden auf das Resultat ohne Einfluss ist, so wird man, wenn obige Summe in irgend einer Art in zwei Partialsummen zerlegt wird, bei der Bestimmung der diesen letzteren Summen entsprechenden Punkte zu Punktepaaren einer und derselben Involution gelangen, deren Centrum $\Sigma$ der Schnitt von $T_\infty$ mit $\overline{p_c p_0}$ ist.

Die Anzahl dieser Punktepaare ist gleich der Anzahl der verschiedenen Arten, in der $n$ Addenden in zwei Partialsummen zerlegt werden können, das ist also, wie sich leicht ergiebt, $2^{n-1}-1$.

Sind $p_{x_1}$ und $p_{x_2}$ imaginäre Punkte, aber ihre Verbindungslinie reell, so kann $p_{x_1+x_2}$ als reeller Punkt nach derselben Weise construirt werden. — Die involutorischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits ergeben sich als specieller Fall. Die vier Punkte $p_{x_1}$, $p_{x_2}$, $p_{x_3}$, $p_{x_4}$ mögen addirt werden. Dann sind nach dem Früheren

$$p_{x_1+x_2} \text{ und } p_{x_3+x_4},\quad p_{x_1+x_3} \text{ und } p_{x_2+x_4},\quad p_{x_1+x_4} \text{ und } p_{x_2+x_3}$$

Punktepaare einer und derselben Involution. Infolge dessen entstehen in $p_0$ und auf $T_\infty$ ebenfalls Involutionen. Die Punktepaare auf $T_\infty$ sind aber nichts, als die Schnitte der Gegenseiten.

Die Multiplication mit ganzen Zahlen kann auf die Addition zurückgeführt werden, da $2x=x+x$, und dies wird construirt, indem man $x$ mit $x$ verbindet, d. h. $T_x$ zieht und deren Schnitt auf $T_\infty$ mit $p_0$ verbindet. Daraus kann dann $3x=2x+x$ etc. construirt werden.

Das arithmetische Mittel $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ wird construirt, indem man aus dem Schnittpunkte von $\overline{p_{x_1} p_{x_2}}$ mit $T_\infty$ die zweite Tangente an den Kegelschnitt zieht, deren Berührungspunkt $p_c$ ist.

Die Subtraction folgt schon durch Umkehrung der Addition. Ausserdem können mit Hilfe der Gleichung

$$3) \qquad x_1 + x_2 = 0$$

negative Grössen eingeführt werden. Das Centrum $\sigma$ dieser Involution liegt, da $p_0$ und $p_\infty$ Doppelpunkte sind, in dem Durchschnittspunkte von $T_0$ und $T_\infty$. Man findet also $-x$ als zweiten Schnittpunkt von $\overline{x\sigma}$ und $K$.

Die Differenz zweier Zahlen kann auf mehrere Arten construirt werden. Da man statt $x_1 - x_2 = c$ auch schreiben kann

$$x_1 + 0 = x_2 + c,$$

so wird $p_{x_1 - x_2}$ gefunden, indem man den Schnitt von $\overline{p_{x_1} p_0}$ auf $T_\infty$ mit $p_{x_2}$ verbindet, welche Gerade $K$ in $p_{x_1 - x_2}$ trifft.

Ausserdem kann noch auf drei Arten subtrahirt werden, entsprechend den drei Formen der Differenz $x_1 - x_2$:

$$[x_1 + (-x_2)], \quad [-(x_2 - x_1)], \quad [-\{x_2 + (x_1)\}].$$

Construirt man wirklich die beiden ersten Formen, so erhält man den Beweis folgenden Satzes:

Zwei Secanten $\overline{p_0 a}$ und $\overline{p_0 b}$, die durch einen Punkt $p_0$ des Kegelschnittes $K$ gehen, bestimmen auf der Curve und einer Tangente $T_\infty$ vier Punkte $p_{x_1}$, $p_{x_2}$, $a$, $b$, deren wechselseitige Verbindung $K$ in zwei Punkten $p_{x_1 - x_2}$ und $p_{x_2 - x_1}$ trifft, welche mit $\sigma$, dem Schnitte von $T_0$ und $T_\infty$, in einer Geraden liegen.

Da $x_1 + x_2$ sich auch in die Formen bringen lässt

$$[x_1 - (-x_2)], \quad [-(-x_1 - [+x_1])], \quad \{-[-x_1 + (-x_2)]\},$$

so lässt sich die Addition jetzt viel mannichfaltiger ausführen.

## Multiplication.

Wenn die Zahl $x_1 x_2 = c$ construirt werden soll, so ist hierzu, wie schon aus der Definition der Multiplication folgt, die Einheit nöthig. Es muss also auf dem Kegelschnitte der Punkt gegeben sein, dessen Parameter die Einheit ist. Dann liegen zwischen $p_0$ und $p_1$ alle positiven echten, zwischen $p_0$ und $p_\infty$ alle positiven unechten Brüche, zwischen $p_0$, $p_{-1}$ und $p_\infty$ alle entsprechenden negativen. Jede Gerade, die den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten schneidet, bestimmt zwei imaginäre Punkte; diese sind conjugirt imaginär, weil ihre Summe und ihr Product, wie unten gezeigt wird, reell ist. Durch $\sigma$, den Schnitt von $T_0$ und $T_\infty$, gehen Strahlen, welche $K$ entweder in reellen oder in rein imaginären Punkten schneiden. Denn die Summe solcher zwei conjugirter Zahlen ist 0.

Die Multiplication geschieht mit Hilfe der Formel

1) $$x_1 x_2 = c.1,$$

welche die Gleichung einer Involution ist, in der $p_0$ und $p_\infty$ ein Paar bilden. Auf $\overline{p_0 p_\infty}$, die wir die Fundamentalgerade $F$ nennen wollen, wird das Centrum der Involution liegen. Man findet also das Product, indem man den Schnitt von $\overline{p_{x_1} p_{x_2}}$ auf $F$ mit $p_1$ verbindet, welche Gerade $K$ in $p_c$ trifft.

Die Punkte $p_0$ und $p_\infty$ können imaginär sein, wenn sie als Schnittpunkte von $K$ mit einer reellen Geraden auftreten. Auch die unendlich weite Gerade kann als Fundamentalgerade verwendet werden. Im Falle der Hyperbel ist unter dieser Voraussetzung $\sigma$ der Mittelpunkt, und dann sind auf dem einen Aste die positiven, auf dem andern die negativen Zahlen. Die Multiplication wird ausgeführt, indem man von $p_1$ zu $\overline{p_{x_1} p_{x_2}}$ eine Parallele zieht.

1. Anmerkung. Der Pascal'sche Lehrsatz kann mit Hilfe dessen folgendermassen bewiesen werden: Man nehme als Fundamentalgerade die Verbindungslinie der Punkte III und IV an, welche Schnitte der Gegenseitenpaare $\overline{p_{x_1} p_{x_2}}$, $\overline{p_{x_4} p_{x_5}}$; $\overline{p_{x_2} p_{x_3}}$, $\overline{p_{x_5} p_{x_6}}$ sind. Da die Producte je zweier Zahlen, deren Verbindungslinien durch denselben Punkt der Fundamentalgeraden gehen, einander gleich sind, so ist

$$x_1 x_2 = x_4 x_5, \quad x_5 x_6 = x_2 x_3,$$

hieraus

$$x_1 x_2 x_5 x_6 = x_2 x_3 x_4 x_5,$$

somit

$$x_1 x_6 = x_3 x_4.$$

Das Product $x_1 x_6$ ist also gleich $x_3 x_4$, infolge dessen gehen $\overline{p_{x_1} p_{x_6}}$ und $\overline{p_{x_3} p_{x_4}}$ durch denselben Punkt der Fundamentalgeraden.

2. Anmerkung. Dass ein einem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit dasselbe Diagonaldreieck hat, wie das Viereck aus den Berührungspunkten $p_{x_1} p_{x_2} p_{x_3} p_{x_4}$, kann auch daraus gefolgert werden: Es sei $m$ der Schnittpunkt der Tangenten in $p_{x_1}$ und $p_{x_4}$, und $n$ der Schnittpunkt der Tangenten in $p_{x_2}$ und $p_{x_3}$, und man nehme die Diagonale $\overline{mn}$ als Fundamentalgerade. Dann ist

$$x_1^2 = x_4^2, \quad x_2^2 = x_3^2,$$

und da die Punkte nicht identisch sein sollen,

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = -x_3.$$

Also ist

$$x_1 x_3 = x_2 x_4,$$

d. h. $\overline{p_{x_1} p_{x_3}}$ und $\overline{p_{x_2} p_{x_4}}$ schneiden sich auf $F$, der Diagonale des umschriebenen Vierseits. Ebenso kann man dies bei den anderen Diagonalen nachweisen, woraus die Identität der beiden Diagonaldreiecke folgt.

Um die ganze Potenz $x^n$ zu construiren, construirt man zuerst $x^2 = x.x$, daraus $x^3$ etc. Da $\sqrt{x} = \sqrt{x} = x.1$, so construirt man die

Quadratwurzel, indem man aus dem Schnittpunkte von $\overline{p_1 p_x}$ mit $F$ die Tangenten an den Kegelschnitt zieht. Aus der Construction folgt $\sqrt{x} = \pm c$. Wählt man $x$ negativ, so schneidet $\overline{p_1 p_x}$ $F$ innerhalb des Kegelschnittes, die Wurzeln sind also imaginär.

Reciproke Werthe lassen sich aus $x.\frac{1}{x} = 1.1$ einfach construiren. Man verbindet $p_x$ mit dem Schnitte von $F$ und $T_1$, welche Gerade $K$ in $p_{\frac{1}{x}}$ trifft.

Jede complexe Zahl lässt sich, aber nur gleichzeitig mit der ihr conjugirten, construiren. Denn $a+bi$ und $a-bi$ geben addirt $2a$. Ihre Verbindungslinie schneidet also $T_\infty$ in demselben Punkte $m$, wo $T_\infty$ von $T_a$ getroffen wird. Die Multiplication der beiden conjugirt imaginären Grössen giebt $a^2+b^2$. Also bestimmt $\overline{p_1 p_{a^2+b^2}}$ auf $F$ einen Punkt $n$ der gesuchten Geraden. Die Gerade $\overline{mn}$ schneidet $K$ in den Punkten $a+bi$ und $a-bi$.

Sollen aber die zwei conjugirt imaginären Werthe bestimmt werden, in denen eine Gerade $\overline{mn}$ einen Kegelschnitt schneidet, so lässt sich dies durch Umkehrung der Construction bewerkstelligen. Der reelle Theil $a$ wird gefunden, indem man aus dem Schnitte von $T_\infty$ mit $\overline{mn}$ die Tangente an $K$ legt. Der Parameter des Berührungspunktes ist $a$. Die Gerade, welche $p_1$ und den Schnitt von $\overline{mn}$ mit $F$ verbindet, trifft den Kegelschnitt in $p_{a^2+b^2}$. Davon subtrahirt man $a^2$. Die Wurzel aus dem Reste giebt $\pm b$. Die Zahlen sind also $a \pm bi$.

Die Division kann auf die Multiplication zurückgeführt werden, da man statt $x_1 : x_2 = c$ auch $x_1 . 1 = x_2 . c$ schreiben kann. Der Punkt $p_{x_1 : x_2}$ wird also construirt, indem man den Schnitt von $p_1 p_{x_1}$ und $F$ mit $p_{x_2}$ verbindet, welche Gerade $K$ in $p_c$ trifft.

Auch kann man dividiren

$$\frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_1} = c, \quad \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} = \frac{1}{c}.$$

Führt man die Construction aus, so müssen $p_c$ und $p_{1:c}$ nach dem Früheren auf eine Gerade zu liegen kommen, die $F$ in demselben Punkte schneidet, wie $T_1$.

Wien. LUDWIG KOTÁNYI, Stud. phil.

---

### XV. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwinkligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet.

(Hierzu Taf. III Fig. 3 u. 4.)

Sind $g$ und $h$ (Fig. 3) zwei windschiefe Gerade und ist $AB$ zur gesuchten Geraden, die mit $g$ den Winkel $\alpha$, mit $h$ den Winkel $\beta$ bilden

soll, parallel, so erhalten wir in den beiden rechtwinkligen Dreiecken $ABC$ und $ABD$, die entstehen, wenn durch irgend einen Punkt $B$ der $AB$ eine Parallele zu $h$ gezogen, auf diese von $A$ das Loth $AD$ und von $B$ auf $g$ das Loth $BC$ gefällt wird, die Mittel zu einer einfachen Lösung unserer Aufgabe. Nämlich da der Winkel $ABD = \beta$ ist, so können jene Dreiecke in der durch $g$ parallel zu $h$ gelegten Ebene gezeichnet und durch Drehung, wobei $ABC$ eine Bewegung um $AC$, $BAD$ eine solche um $AB$ ausführt, in die angedeutete Lage gebracht werden. Nachdem ist nur noch durch $AB$ und $g$ eine Ebene zu legen, deren Schnittpunkt mit $h$ zu bestimmen und durch diesen eine Parallele zu $AB$ zu ziehen.

Eine solche Lösung führen wir im Sinne der darstellenden Geometrie, wie folgt, durch.

In Fig. 4 sind $g_1$, $g_2$ und $h_1$, $h_2$ bezüglich die gegebenen Projectionen der windschiefen Geraden $g$ und $h$; $S_1$, $S_2$ die Spuren der durch $g$ parallel zu $h$ gelegten Ebene $S$; $h'$ die Projection von $h$ auf dieser Ebene und $(g)$, $(h')$ die mit $S$ in die erste Projectionsebene herabgeschlagenen Geraden $g$, $h'$. Wir tragen an $(g)$ in einem beliebigen Punkte $A$ den Winkel $\alpha$, ferner in irgend einem Punkte $B$ seines freien Schenkels an diesen den Winkel $ABD = \beta$ und fällen von $B$ und $A$ bezüglich die Lothe $BC$ und $AD$ auf $(g)$ und $BD$; ziehen wir noch durch $A$ die Normale zu $(h')$ und im Abstande $BD$ zu jener eine Parallele, die $BC$ in $(b')$ schneidet, so ist von derjenigen Geraden $ab$, welche zur gesuchten parallel ist, $A(b')$ die herabgeschlagene Projection auf $S$. Der Abstand des Punktes $b$ von der Ebene $S$ ist $(b')(b)$. Schlagen wir nun die Punkte $A$, $(b')$ in die Ebene $S$ zurück, wodurch wir die ersten Projectionen $a_1$, $b'_1$ bekommen, und errichten in $b'$ auf $S$ ein Loth gleich der Strecke $(b')(b)$, so giebt der Endpunkt $b$ desselben, mit $a$ verbunden, was für beide Projectionen ausgeführt ist, die Gerade $ab$. Durch $ab$ und $g$ legen wir die Ebene $T$, bestimmen deren Schnittpunkt $e$ mit $h$ und ziehen durch diesen endlich die Parallele $x$ zu $ab$; damit erhalten wir eine Gerade, die der Aufgabe genügt, deren es bekanntlich im Allgemeinen vier giebt.

Hannover, 9. November 1881. M. Petzold.

---

# Preisaufgaben
der
## Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.
### Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

### 1. Für das Jahr 1882.

Für manche weniger erforschte Gebiete der Krystallographie hat sich das Studium der durch Einwirkung von Lösungs- und Corrosionsmitteln auf den Krystallflächen erzeugten sogen. Aetzfiguren in hohem Grade

erspriesslich erwiesen. Einerseits ist es wünschenswerth, die zahlreichen, in dieser Hinsicht an Mineralien und künstlichen Krystallen gemachten und in sehr verschiedenen Zeitschriften seit einer langen Reihe von Jahren mitgetheilten, nur lose untereinander zusammenhängenden Untersuchungen kritisch zu sammeln und von einem bestimmten wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus zur einheitlichen Darstellung zu bringen, insbesondere aber auch die bisherigen Ermittelungen durch weitere neue zu vermehren und zu ergänzen, wobei noch die früher weniger erörterten Fragen Berücksichtigung verdienen, in welcher Weise die Form der Aetzeindrücke von der Natur des Aetzmittels und von der Verschiedenartigkeit der Krystallflächen abhängig ist, ferner, wie sich die Aetzeindrücke bei isomorphen Substanzen verhalten. Andererseits ist es aber von noch höherer Bedeutung, wenn solche ältere und selbstständige neue Untersuchungen dazu verwerthet werden, durch Entwickelung neuer allgemein giltiger und berechtigter Sätze unsere Kenntnisse von den Cohäsions- und Structurverhältnissen der Krystalle zu erweitern und die Frage zu lösen, ob die Aetzfiguren die Form der den Krystall aufbauenden Molecule wiedergeben.

Die Gesellschaft wünscht daher

eine Zusammenstellung unserer bisherigen Kenntnisse und der durch selbstständige Untersuchungen nach den angegebenen Richtungen hin neu gewonnenen Erfahrungen über die Aetzfiguren der Krystalle, ferner eine daraus sich ergebende Ableitung allgemeiner Sätze, welche für die Auffassung der Cohäsions- und Structurverhältnisse, sowie der Molecularbeschaffenheit der Krystalle von Wichtigkeit sind.

Preis 700 Mark.

## 2. Für das Jahr 1883.

Unser Mitglied, Herr W. Hankel, hat in seiner Abhandlung „Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes“ (im 20. Bd. der Abh. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss., 12. Bd. der Abh. d. math.-phys. Classe) den Nachweis geführt, dass auf farbigen Flussspathkrystallen durch die Einwirkung des Lichtes elektrische Spannungen erregt werden. Diese photoelektrische Erregung der bezeichneten Krystalle ist eine Folge der Einwirkung des Lichtes auf den in ihnen enthaltenen Farbstoff; die hierdurch eingeleiteten Vorgänge werden durch die Structur der Substanz in bestimmter Weise beeinflusst, so dass die elektrischen Vertheilungen in strenger Abhängigkeit von der Gestalt und dem Wachsthum der Krystalle erscheinen. Dieselben stehen ferner bei dem Flussspath in engster Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Spannungen, dergestalt, das beim Belichten die-

selben Polaritäten, wenn auch in grösserer oder geringerer Intensität, auftreten, wie bei steigender Temperatur. Ob bei anderen Krystallformen und namentlich bei anderen Farbstoffen die eben erwähnte Beziehung fortbesteht, lässt sich im Voraus nicht entscheiden. Für eine weitere Verfolgung der elektrischen Wirkungen des Lichtes werden wahrscheinlich nur sehr wenige Mineralien ausser dem Flussspathe tauglich sein; dagegen steht zu erwarten, dass es gelingen werde, auf künstlich dargestellten, mit geeigneten Farbstoffen imprägnirten Krystallen die photoelektrischen Erscheinungen hervorzurufen.

Die Gesellschaft stellt daher als Preisaufgabe:

Die Nachweisung und nähere Bestimmung der durch Einwirkung des Lichtes auf künstlich dargestellten und mit geeigneten Stoffen gefärbten Krystallen hervorgerufenen photoelektrischen Spannungen, sowie ihrer Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Erregungen.

Preis 700 Mark.

## 3. Für das Jahr 1884

wiederholt die Gesellschaft die zunächst für 1880 ausgeschriebene, damals aber ohne Bearbeitung gebliebene Aufgabe.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämmtlicher Thiere — mit Ausschluss der sogen. Protozoen — in ähnlicher Weise aus Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an der Entwickelung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäss weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch anderweitige Momente bedingt ist. In Anbetracht der grossen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

eine auf eigene Untersuchungen gegründete Kritik der Lehre von der Homologie der Keimblätter.

Da die zur Bearbeitung dieser Aufgabe nöthigen Untersuchungen einen längern Aufenthalt an der See nothwendig machen dürften, also ungewöhnliche Kosten verursachen, sieht sich die Gesellschaft veranlasst, den dafür ursprünglich festgesetzten Preis von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

## 4. Für das Jahr 1885.

Die Theorie der Flächen dritter Ordnung hat durch die neueren Untersuchungen von Schläfli, Klein, Zeuthen und Rodenberg

einen gewissen Abschluss erhalten, insofern es jetzt möglich ist, die Gesammtheit der bei diesen Flächen auftretenden Gestalten mit Leichtigkeit zu überblicken. Hieran anknüpfend, wünscht die Gesellschaft

eine in gleichem Sinne durchzuführende Untersuchung der allgemeinen Flächen **vierter** Ordnung.

Die mannigfachen Betrachtungen über die Gestalten der Complexfläche, welche Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" gegeben hat, sowie die allgemeinen Untersuchungen von Rohn über Kummer'sche Flächen werden dabei ebenso als Vorarbeiten zu betrachten sein, wie die Angaben von Zeuthen und Krone über die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Preis 700 Mark.

---

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1882 Geh. Hofrath Prof. Dr. R. Leuckart, Thalstrasse 15b) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft, welche sich vorbehält, im gegebenen Falle die dafür ausgesetzten Preise nach ihrem Ermessen von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

**W. Roscher**, Präses.

**G. Curtius. W. Hankel. A. Leskien. R. Leuckart.**
**W. Scheibner. G. Voigt. F. Zarncke. F. Zirkel.**

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme.

Von

Dr. Heinrich Suter

in Aarau.

Vor einiger Zeit fand ich im Kataloge der Manuscripte der Stiftsbibliothek zu St. Gallen unter Nr. 839 das Werk verzeichnet: *Orem. de libris meteor. Aristot.* Durch Vermittelung der Aargauer Cantonsbibliothek wurde mir das Manuscript für einige Zeit überlassen und es mögen hier einige wenige Angaben über den Inhalt desselben folgen.

Dasselbe zählt 350 eng geschriebene Quartseiten (175 Blätter) und ist infolge einer grossen Zahl von Abkürzungen ziemlich schwer zu lesen. Der Schluss des Manuscriptes giebt uns Aufschluss über Inhalt und Verfasser und die Zeit der Abschrift, weshalb wir diesen hier zuerst folgen lassen. Er lautet:

*Rescriptae sunt hae questiones venerabilis magistri Orem super libris metheororum (sic!) Aristotelis paripotetici (sic!) anno domini* 1459 *pridie idus mensis Septembris indictione* $7^{ma}$.

Wir sehen also hieraus, dass das Manuscript eine von ungenannter Hand im Jahre 1459 gemachte Abschrift eines Commentars zu der Meteorologie des Aristoteles von Oresme enthält. Nach den obigen Worten stehen noch die folgenden, denen ich keinen Sinn zu geben im Stande war:

*Labores manuum tuarum qui manducat beatus es et bene tibi erit.*

Die beiden angeführten Sätze sind also vom Abschreiber hinzugefügt; der Schlusssatz des von Oresme verfassten Commentars lautet:

*Et sic finis est hujus libri, de quo fine laudetur deus gloriosus in secula benedictus, Amen.*

Wir haben es also hier mit einer Schrift des Nic. Oresme zu thun, die auch demjenigen Gelehrten, der sich hauptsächlich mit Oresme beschäftigt hat, Herrn M. Curtze in Thorn bis jetzt unbekannt geblieben ist, indem es demselben nach seiner mir gemachten Mittheilung seiner Zeit nicht vergönnt war, St. Gallen zu besuchen. Dass ein Commentar zu der Meteorologie des Aristoteles zu den mathematisch-physikali-

schen Schriften gezählt werden und deshalb eine Besprechung desselben an diesem Orte Platz finden darf, ist wohl mit keinen weiteren Worten zu bekräftigen; ob aber diese Schrift des bedeutenden Mannes auf die gleiche Linie zu stellen sei mit seinen übrigen mathematisch-physikalischen Schriften, wie seinem Algorismus proportionum, seinem Tractatus de latitudinibus formarum, seinem Traité de la Sphère oder seinen Schriften gegen die Astrologie und Zeichendeuterei etc., ist eine andere Frage, die ich nach ziemlich eingehender Betrachtung des Werkes verneinen muss. — Es enthält dasselbe also in vier Büchern (entsprechend den vier Büchern der Meteorol. des Aristot.) 77 Fragen (Questiones), deren Bejahung oder Verneinung jeweilen durch Beweise (Argumenta) unterstützt wird, welche zum grössten Theile dialectisch geführt sind, ganz im Sinne und Geiste der scholastischen Philosophie des XIII. und XIV. Jahrhunderts. Nicht mit naturwissenschaftlichen Gründen, die der Beobachtung und Erfahrung entnommen sind, sondern mit den Sätzen der Aristotelischen Analytica priora et posteriora, der Metaphysik und der Physik, welch' letztere selbst trotz ihres Titels ganz von der Dialektik beherrscht ist, werden die Behauptungen bekräftigt. Eine Vergleichung der analogen Werke von Thomas von Aquino, Duns Scotus und Albertus Magnus (diese sämmtlichen drei Scholastiker haben Commentare zu der Meteorologie des Aristoteles geschrieben) hat ergeben, dass Nic. Oresme in der Form seiner Beweise und Schlüsse sich ganz an Duns Scotus anlehnt; auch sind eine grosse Anzahl von Fragen bei Beiden ganz die nämlichen. So beginnt der Commentar des Nic. Oresme folgendermassen:

*Circa primum metheororum queritur primo, utrum possibile sit de impressionibus metheorologicis habere simul scientiam et opinionem.*

Die erste Questio bei Duns Scotus lautet:

*Utrum de impressionibus meteoricis sit scientia, tanquam de subjecto.*

Die zweite Questio bei Oresme lautet:

*Utrum impressiones metheorologicae fiant secundum naturam inordinatiorem quam sit natura corporum supercelestium.*

Die zweite Questio bei Duns Scotus heisst:

*An impressiones metheoricae fiant per naturam inordinatiorem ea natura quae est propria elementorum.*

Wir geben im Folgenden noch die beiden ersten Argumenta zur ersten Frage, als Muster Oresme-Scotischer Beweismethode.

Nach der oben angeführten ersten Frage des Manuscriptes fährt dann Oresme fort:

*Et arguitur quod non: quia de impressionibus metheorologicis non contingit habere scientiam et opinionem, igitur questio falsa; consequentia tenet et antecedens probatur, quia vel potest sciri vel opinari nisi propositio: impressiones autem metheorologicae non sunt propositiones, sicut clarum est.*

*Secundo arguitur: Idem non est scibile et opinabile: igitur de impressionibus meteorologicis non potest haberi scientia et opinio; consequentia tenet, antecedens probatur per Aristotelem primo posteriorum (h. e. Analytica) circa finem, et probatur ratione sic: nam sicut scientia est de illo, quod impossibile est se aliter habere, sic opinio de illo quod possibile est aliter se habere, sed non est idem quod impossibile est se aliter habere et possibile est se aliter habere, igitur etc.; et per consequens non est idem scibile et opinabile.*

Es enthält nun allerdings der Commentar auch Fragen, die reellerer Natur sind, wie z. B. die neunte Frage des ersten Buches: *Utrum lumen sit productum caloris:* die fünfte Frage des zweiten Buches: *Utrum rubedo matutina sit signum futurae pluviae;* die 25. Frage des dritten Buches: *Utrum iris solum dupliciter et non multipliciter potest apparere;* die 26. Frage desselben Buches: *Utrum semper apparentibus duabus iridibus superior iris debeat habere colores conversim positos;* die vierte Frage des vierten Buches: *Utrum frigus praeservet a putrefactione.* etc.

Eine Frage, glaubte ich momentan, könnte einige interessante Gesichtspunkte zu Tage fördern, allein ich sah bald, dass ich mich getäuscht hatte. Es ist dies die vierte Frage des dritten Buches: *Utrum motus terrae sit possibilis.* In der Antwort werden die verschiedenen denkbaren Bewegungen der Erde aufgezählt; diese sind: die geradlinige, die kreisförmige und diejenige, die sich blos auf einzelne Theile der Erde erstreckt. Die erstere ist unmöglich aus verschiedenen Gründen, ebenso die zweite. Hier vernehmen wir, dass Oresme die Ansichten einiger Pythagoräer (Namen werden allerdings nicht genannt) über die Bewegung der Erde kannte; er sagt: ... *aliqui imaginabuntur quod terra moveretur circulariter motu diurno et celum quiesceret et per illud salvabant apparitiones in celo scilicet ortum et occasum solis. ... Sed de isto motu terrae non intenditur in proposito, nec opinio eorum est vera, quia, si terra moveretur, non videretur qualiter possemus salvare ecclipses, conjunctiones et oppositiones planetarum.* — Wir ersehen hieraus und aus den übrigen Gründen, dass Oresme in dieser Frage ganz auf Aristotelischem Boden steht; übrigens handelt es sich ja, wie er sagt, in diesem Capitel gar nicht um diese Bewegungen der Erde, sondern um diejenigen *secundum aliquas suas partes*, d. h. die Erdbeben.

Die 18. Quaestio des ersten Buches handelt über die Bedeutung der Cometen. Oresme kommt mit Aristoteles, Plinius, Ptolemäus und Anderen (deren Aussprüche theilweise citirt werden) zu dem Resultate, dass die Cometen Stürme, Erdbeben, Ueberschwemmungen, Krankheiten, Kriege etc. anzeigen: *Est (cometa) signum magnorum ventorum, terrae motus, inundationum aquarum. Est signum sterilitatis terrae. Cometa significat mortalitates et epidimias (sic!), significat guerras (sic!) et homicidia, significat mortes principum etc.*

Es könnte nach dem Angeführten Vielen auffallend erscheinen, dass ein Mann, der in naturwissenschaftlichen Fragen ganz auf Aristotelisch-scholastischem Boden steht, doch so energisch Stellung genommen hat gegen die Astrologie und Magie, wie aus einigen der von Herrn Curtze angeführten Schriften hervorgeht; ja, es könnte vielleicht diese Erscheinung bei Einigen Zweifel wachrufen über den Oresme'schen Ursprung dieses Commentars. Allein hierbei ist daran zu erinnern, dass die Astrologie des Mittelalters in zwei Theile zerfiel: in die natürliche, welche aus den meteorologischen Erscheinungen auf Witterungswechsel, Stürme, Fluthen, Erdbeben etc. schloss, und in die positive oder Judicialastrologie, welche von dem Einflusse der Gestirne auf das Schicksal des Menschen handelte.* Von dieser letzteren, eigentlichen Astrologie war Oresme ein erklärter Gegner und er zeigt sich in diesem Punkte wiederum als getreuer Aristoteliker, denn der Stagirite und seine älteren griechischen Anhänger waren Feinde dieser Astrologie, während Platon, Seneca und Andere als Freunde derselben genannt werden. Uebrigens verwarfen auch die ältesten Kirchenväter die Astrologie, sie wurde erst durch die Araber wieder dem christlichen Mittelalter zugeführt. — Wie kommt aber Oresme dennoch dazu, die Cometen als Verkündiger von grosser Sterblichkeit, von Kriegen, von Todesfällen vornehmer Personen zu betrachten? Man sollte meinen, diese Punkte gehörten ins Gebiet der Judicialastrologie. Hierfür findet Oresme, wie auch Albertus Magnus und Duns Scotus, eine natürliche Erklärung: Aus der Natur der Cometen (denn diese sind nichts Anderes, als heisse und trockene Erdausdünstungen, *exhalationes e terra calidae et siccae*) folgen nothwendigerweise grosse Trockenheit und heftige Winde; letztere aber erzeugen Ueberfluthungen des Landes durch die aufgeregten Wasser des Meeres. Und nun macht Oresme folgende weitere Schlüsse: *Cometa significat mortalitates et epidemias: patet, quia aliquae partes illius exhalationis sunt venenosae et illae extractae a terra ad aërem reddunt eum venenosum, quo aëre inficiuntur animalia et sic fiunt mortes subitaneae. — Cometa significat guerras et homicidia: patet, nam per talem exhalationem calidam et siccam existentes homines exsiccantur et fiunt homines quasi colerici: colerici autem homines sunt proni ad homicidia et guerras. Similiter per talem infectionem hominum ab illa exhalatione existente in aëre homines quasi perdunt sensus et semper sunt proni ad guerras et iracundias quas sequuntur homicidia. — Cometae significant mortes principum: patet, quia cometae significant guerras et bella: in bellis autem principes perduntur; et confirmatur quia principes magis delicate aliis sunt nutriti: igitur*

* ... *Sciendum quod duplex est significatio cometae, quaedam est significatio generalis, scilicet quae convenit quasi omnibus cometis indifferenter, et illa significatio est* verior *et etiam de illa significatione determinare seu considerare pertinet ad praesentem scientiam (h. e. meteorologiam). Alia est significatio cometae specialis de qua considerare pertinet ad astrologos.* ...

*cicius inficiuntur et moriuntur propter aërem venenosum existentem.* — Wir erkennen also in diesen Schlüssen doch das der Astrologie entgegenstehende Bestreben, die Einflüsse der Cometen aus natürlichen Ursachen herzuleiten, wenn auch auf höchst erzwungene Weise.

Aus dem Gesagten ergiebt sich zur Genüge, dass das Oresme'sche Werk einen vollständig scholastischen Anstrich hat; eine Vergleichung mit dem Duns'schen Commentar der Aristotelischen Meteorologie ergab im Weiteren die Thatsache, dass Oresme keine oder höchst wenig neue von den Duns'schen abweichende Ideen in das Buch hineingelegt hat. Schlüsse, die etwa hieraus gegen die Echtheit des Buches gezogen werden könnten, finden ihre theilweise Widerlegung in der äusseren formellen Uebereinstimmung der *questiones*, *conclusiones*, *rationes* etc. des fraglichen Werkes mit denen der von Herrn Curtze angeführten: *Utrum res futurae per astrologiam possint praesciri: Plura quodlibeta et diverse questiones*, *Solutiones predictorum problematum.*

---

## Berichtigung zu S. 65.

Herr Unverzagt macht gelegentlich die Bemerkung: „Um ihrem Landsmanne die Priorität zu wahren, haben die Franzosen jüngst das Schriftchen Argand's bei Gauthier-Villars neu erscheinen lassen.“ Wer Herrn Unverzagt kennt, kann keinen Augenblick im Zweifel darüber sein, dass Nichts ihm ferner lag, als mit dieser Bemerkung Herrn Hoüel in Bordeaux für die Besorgung der neuen Druckausgabe von Argand's Abhandlung einen Vorwurf nationaler Parteilichkeit machen zu wollen. Handelt es sich doch um Wahrung einer wirklichen, keiner blos vermeintlichen Priorität, also um ein durchaus berechtigtes Vorgehen, und hat doch gerade Herr Hoüel in seinen Schriften zu oft seine Unparteilichkeit in der Hochhaltung fremdländischer Verdienste bewährt, als dass sie in Frage stehen könnte. Wir würden deshalb trotz Herrn Hoüel's Ersuchen vielleicht Anstand genommen haben, diese unserer Meinung nach ziemlich gegenstandslose Erklärung abzugeben, wenn nicht zu gleicher Zeit Herr Hoüel auch eine thatsächliche Berichtigung beigefügt hätte, die einen wenig bekannten Umstand betrifft: den nämlich, dass Argand gar kein Franzose, sondern Schweizer war, mithin überhaupt nicht Landsmann von Herrn Hoüel genannt werden kann.

D. Redaction.

# Recensionen.

---

**Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustands**, von Prof. VAN DER WAALS, übersetzt aus dem Holländischen von Dr. ROTH. Leipzig 1881, Ambr. Barth.

Den Betrachtungen des Verfassers liegt der Gedanke zu Grunde, dass man vom flüssigen zum gasförmigen Zustande in ganz continuirlicher Weise gelangen kann oder, geometrisch gesprochen, dass die Isothermen des flüssigen und des gasförmigen Zustands derselben Curve angehören. Es wird in den ersten Capiteln die Gleichung der Isotherme abgeleitet, wobei auch der Einfluss der Zusammensetzung der Massentheilchen aus Atomen und der ihrer Ausdehnung berücksichtigt wird. Der Verfasser kommt hierbei zu der Gleichung

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=R(1+\alpha t),$$

wo $p$ den äussern Druck, $v$ das specifische Volumen, $b$ ein Vielfaches des Molecularvolumens, $a$ die specifische Attraction, $t$ die Temperatur, $R$ eine Constante und $\alpha$ den hundertsten Theil der Zunahme an lebendiger Kraft, welche die progressive Bewegung der Massentheilchen bei der Erwärmung vom Gefrier- bis zum Siedepunkte des Wassers erfährt. In den folgenden Capiteln wird die Richtigkeit dieser Formel nachgewiesen oder, wenn dies nach den bisherigen Versuchen direct nicht möglich ist, wenigstens gezeigt, dass vorliegende Versuche der Formel nicht widersprechen. Es werden zu diesem Zwecke die Untersuchungen von Regnault über Gase bei Aenderung der Pressung oder des Volumens auf die Formel angewendet und nachher insbesondere die neuen Untersuchungen von Andrews. Allerdings zeigt sich hierbei, dass selbst die genauesten Experimente, die bis jetzt zu Gebote stehen, noch nicht genügen, um die Richtigkeit einer Zustandsgleichung zu verificiren, dass für die Bestimmung der Constanten noch ein grosser Spielraum bleibt. Es folgt dann die Betrachtung der kritischen Temperatur nach den Beobachtungen von Cagniard de la Tour, Cailletet und Amagat und des Werthes der Capillarconstanten in der Theorie von Laplace, endlich ein Capitel über moleculare Dimensionen und Anwendungen auf die mechanische Wärmetheorie. Zum Schlusse sind zwei Capitel angereiht,

welche die neuesten Untersuchungen des Verfassers enthalten über die Normalcurven des gesättigten Dampfes und der Flüssigkeit für verschiedene Körper, und über Ausdehnungs- und Zusammendrückbarkeitscoefficienten. Es ist unmöglich, über die Fülle von bearbeitetem Stoffe eine kurze Uebersicht zu geben, es ist ein Verdienst des Uebersetzers, diese Fülle in ansprechender Form uns näher gebracht zu haben, da das Holländische doch der Mehrzahl der Physiker fern liegt.

P. Zech.

---

**Die Physik auf Grundlage der Erfahrung**, von Dr. Alb. Mousson, Professor an der schweiz. polytechn. Schule. 3. Aufl. Zürich.

Das Erscheinen des ersten Theiles dieses Werkes in dritter Auflage haben wir schon früher freudig begrüsst und den Wunsch ausgesprochen, es mögen die zwei weiteren Theile bald dem ersten folgen. Auch dieser Wunsch geht rasch der Erfüllung entgegen. Der zweite Theil, erste Hälfte, die Wärme, zweite Hälfte, die Optik, und die erste Hälfte des der Elektricität gewidmeten dritten Theiles liegen fertig vor. Sie enthalten eine Reihe neuer oder vollständiger ausgeführter Capitel. So ist bei der Wärme ein besonderes Capitel der mechanischen Theorie der Gase, eines der Verdichtung der Dämpfe und Gase mit den neuen Versuchen von Andrews, Cailletet und Pictet über Verflüssigung der Gase, eines theoretischen Betrachtungen nach Thomsen über Wärmeentwickelung bei chemischen Verbindungen und Aenderung des Aggregatzustandes gewidmet. In der Optik ist jetzt der Theorie centrirter Linsen nach Gauss ein besonderes Capitel zugewiesen; bei der Brechung vermissen wir die Construction von Reusch und ihre einfachen Consequenzen. Nachdem die Mitbewegung der Massentheilchen mit den Aetherschwingungen nach früheren Untersuchungen dargestellt ist, wird für die Bewegung des Lichtes in Krystallen die neue Theorie von Lommel dargestellt. (Das Urtheil des Verfassers lautet: man sieht, dass die Lommel'sche Theorie Resultate liefert, welche merkwürdig genau den Thatsachen folgen.) Der Saccharimetrie ist jetzt ein besonderes Capitel gewidmet. Beim Magnetismus im dritten Theile ist die Bestimmung der Pole mit den Arbeiten von Riecke aufgenommen. In der Elektricität finden wir die neueren Elektrometer dargestellt, die Theorie der leitenden und dielektrischen Körper ausführlicher behandelt, dem Residuum ein besonderes Capitel gewidmet und endlich das Licht des Funkens eingehender dargestellt. Ausser diesen hauptsächlichsten Zusätzen und Erweiterungen sind solche im Einzelnen von Stelle zu Stelle zu finden, so dass der Umfang des Werkes ungefähr um $\frac{1}{8}$ gestiegen ist. Unser Urtheil von früher über die Reichhaltigkeit und Vollständigkeit des Werkes neben der Kürze der Behandlung ist von Neuem bestätigt; nur Einen Wunsch

hätten wir noch auszusprechen: um das ausgezeichnete Werk noch bequemer nutzbar zu machen, wäre am Schlusse ein ausführliches Register am besten geeignet.

P. Zech.

---

**Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes,** von E. Verdet. Deutsche Bearbeitung von Dr. K. Exner. Braunschweig 1881, Vieweg & S.

Die „Leçons d'optique physique" von Verdet erschienen 1870 nach seinem Tode, bearbeitet von Levistal. Sie liegen der vorliegenden Uebersetzung zu Grunde. Die Uebersetzung ist keine directe Wiedergabe — das ist wohl bei einem rein wissenschaftlichen französisch geschriebenen Werke für deutsche Studirende unnöthig —, sondern es ist an passenden Orten Neueres eingeschaltet. Der Uebersetzer ist aus seinen optischen Abhandlungen, die in den Berichten der Wiener Akademie erschienen sind, bekannt. Die erste Abtheilung des ersten Bandes enthält die Interferenz, Fortpflanzung und Beugung des Lichtes.

P. Zech.

---

**Ueber eine Art Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche,** von E. Jürgenssen. Halle a. S., 1881.

Die Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde behandelt die Aufgabe, die Bewegung eines Punktes, der auf einer Kugeloberfläche bleiben muss und von einem Punkte auf ihr nach einer ganzen Potenz der Entfernung angezogen wird, zu bestimmen. Da die allgemeine Lösung nicht möglich ist, so werden eine Anzahl Einzelfälle untersucht.

P. Zech.

---

**Anfangsgründe der Mechanik fester Körper,** von Dr. Walberer, Professor am Gymnasium Amberg. München 1881. 4. Aufl.

Das Werkchen ist für Gymnasien und verwandte Lehranstalten bestimmt. Die Behandlung ist die gewöhnliche, der Ausdruck keineswegs correct; z. B.: „die Grösse, mit welcher ein Körper von der Erde angezogen wird, ist sein Gewicht". Von der Centrifugalkraft wird hier nicht gesprochen. Oder: „die Beschleunigung der Schwere ist nur an Orten in Höhen unter 100 Fuss gleich"! Man kann sich denken, was der Verfasser sagen will, aber in vierter Auflage sollte das den Schülern nicht vorgelegt werden.

P. Zech.

---

**Grundriss der Mechanik,** von Dr. Lüroth, Professor an der technischen Hochschule München. München 1881.

Eine kurze, streng wissenschaftliche Darstellung der wichtigsten Begriffe und Sätze der Mechanik, unter Anwendung der Streckenrechnung (nach Grassmann). Diese Rechnungsart wird, wie wir aus früheren Recensionen wissen (Jahrg. XXVI S. 213), auch von Somoff angewendet, der sich dabei an die Bezeichnungsart von Résal (Cinématique pure) hält. Der Verfasser vorliegenden Grundrisses benützt dagegen besondere Symbolzeichen $S$ und $V$, was den Formeln eine gewisse Einförmigkeit giebt.

P. Zech.

---

**Einführung in die Mechanik**, von H. Undeutsch, Professor an der Bergakademie Freiberg. Freiberg 1881.

Das Werk ist eine Verarbeitung oder, vielleicht besser gesagt, eine Zerarbeitung der Mechanik von Holtzmann (Stuttgart bei Metzler, 1861) mit Einschiebung von Figuren und einfachen Aufgaben. Einzelne Seiten sind wörtlich abgeschrieben (vergl. S. 222 und 223 mit Holtzmann, S. 94 flgg.), andere Stellen sind stylistisch umgearbeitet, Umstellung von Vordersatz und Nachsatz und Aehnliches (vergl. S. 442 flgg. mit Holtzmann, S. 227 flgg.). Die schwierigeren Sachen sind weggelassen. Schwerpunktsbestimmungen füllen etwa ein Fünftel des Werkes, eingereiht unter: „Freie Bewegung eines starren Körpers“, sonderbarer Weise aber nicht in das Inhaltsverzeichniss aufgenommen. Es wäre wohl besser gewesen, der Verfasser hätte die „Bitte seiner Zuhörer“ nicht erfüllt.

P. Zech.

---

**Ueber Gleichgewichtszustände isotroper Körper in verschiedenen Temperaturen**, von Dr. Max Planck. München 1880.

Es ist Aufgabe der vorliegenden Abhandlung, den Einfluss der Temperatur auf die elastischen Kräfte im Innern eines Körpers darzustellen. Es wird zunächst gezeigt, dass in diesem Falle keine Kraftfunction existirt, dann der erste und zweite Hauptsatz der Wärmetheorie angewendet. Die Gleichgewichtsbedingungen, die so gefunden werden, sind nothwendig für das Gleichgewicht, aber nicht immer hinreichend, z. B. für Mischungen von Flüssigkeit und Dampf. Es wird daher weiter nach den Bedingungen gesucht, welche für das Gleichgewicht vollkommen genügen, mit Hilfe der vom Verfasser früher aufgestellten allgemeinsten Form des zweiten Hauptsatzes, und einzelne Beispiele durchgeführt. Als Resultat ergiebt sich: es werden die unter den gegebenen Bedingungen möglichen Maxima der Entropie des Körpers bestimmt; das absolute Maximum entspricht dem absolut stabilen Gleichgewicht, jedes andere Maximum einem mehr oder weniger labilen Gleichgewichtszustande.

P. Zech.

---

Dr. Benno Klein, **Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde.** Mit 4 lithogr. Tafeln. Marburg, Elwert. 1881. IV, 78 S. gr. 8°.

Der Inhalt ist eine geometrische Entwickelung derjenigen Verwandtschaft, welche analytisch durch eine in jeder von drei Variabeln linearen Gleichung dargestellt wird. Eingehend wird der Fall behandelt, der sich durch eine in zwei der Variabeln symmetrische Gleichung ausdrücken würde, und zwar zunächst durch projectivische Beziehung eines Elementargebildes auf die Paare eines involutorischen Elementargebildes; die trilineare Verwandtschaft entsteht hieraus, indem man jedes Involutionspaar als Ordnungselemente einer neuen Involution betrachtet (Abschnitt I). Abschnitt II behandelt sodann analog den in allen drei Variabeln symmetrischen Fall, Abschnitt III denselben Fall in anderer Auffassung: als lineare zweifach unendliche Schaar von Elemententripeln eines Elementargebildes; also auch, indem eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten mit einer gemeinsamen Tangente gegeben ist: als das System der Gruppen von je drei Schnittpunkten der drei Tangenten, welche noch je zwei der Kegelschnitte gemein haben, da diese Gruppen bekanntlich alle auf einem Kegelschnitte liegen.

Die Methode ist im Wesentlichen die nach Staudt-Reye bekannte; es werden vom Verfasser eingehend die Constructionen entwickelt, die die Verwandtschaft bestimmenden Elemente discutirt, auch eine Anwendung auf die Gleichung dritten Grades gemacht. Die hier mitgetheilten Resultate sind nur solche, die sich aus der analytischen Darstellung unmittelbar ablesen liessen; indess scheint eine Weiterführung der Arbeit und Anwendung auf die Curven dritter Ordnung vom Verfasser beabsichtigt.

Erlangen, October 1881. M. Noether.

---

Sophus Lie, **Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven.** Universitätsprogramm Christiania 1879. 45 S. 4°.

Diese Arbeit ist nur eine aus der Kette von Untersuchungen, die vom Verfasser seit Jahren mit bedeutendem Erfolge betrieben werden, aber als ausgeführtes Beispiel an sich bemerkenswerth. Es handelt sich dabei immer um die Theorie der Gruppen von Punkt- oder allgemeiner von Berührungstransformationen, zu der sich die ersten Ideen in einer Arbeit von F. Klein und S. Lie in Mathem. Ann. IV niedergelegt finden. Bei den Differentialgleichungen, welche bei solchen Transformationen ungeändert bleiben, ergeben sich wesentliche Vortheile und allgemeine Gesichtspunkte für die Integrirbarkeit. So beruht des Verfassers bekannte Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hierauf. (Mathem. Ann., Ber. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania,

Gött. Nachr. etc.) Jetzt wendet sich der Verfasser zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, hier zu derjenigen zweiter Ordnung, welche die geodätischen Curven einer Fläche definirt.

Der Titel entspricht nun nicht ganz dem Inhalt, da hier nur von denjenigen speciellen Flächen die Rede ist, bei denen wirklich infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Curven in einander existiren. Diese speciellen Flächen werden vom Verfasser in drei Classen eingetheilt und es gelingt ihm in den meisten dieser Fälle, die Differentialgleichung vollständig zu integriren, insbesondere bei den Flächen, deren geodätische Curven eine Gruppe von unendlich vielen Transformationen zulassen. Man lernt dabei, ausser schon länger bekannten Flächen, ganze Classen von neuen Flächen von der angegebenen Eigenschaft kennen.

Zum Verständniss der Arbeit genügt die Kenntniss einiger Untersuchungen des Verfassers über Berührungstransformationen, etwa eines Theils der (späteren) Arbeit in Math. Ann. XVI.

Erlangen, October 1881. M. Noether.

---

P. Helmling, **Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx} + y^2 = X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen.** Leipzig, Koch. 1879. 43 S. 4°.

In dieser, Herrn Prof. Minding in Dorpat zu seinem 50jährigen Doctorjubiläum gewidmeten Universitätsschrift wird der Versuch gemacht, die im Titel genannte verallgemeinerte Riccati'sche Gleichung auf dem Näherungswege zu integriren, und zwar durch Aufsuchung eines genäherten particulären Integrals und Einführung desselben unter successiver Variation der Constante. — Es soll sich dabei wesentlich um Aufstellung von reellen Lösungen handeln, welche zu numerischer Bestimmung brauchbar sind. Indessen erscheint es von vornherein klar, dass man nur zu Resultaten von wenig allgemeinem Charakter gelangen kann; und in der That wird die im dritten Abschnitte gegebene Methode schon in einfachen Fällen nicht mehr brauchbar, was auch der Verfasser durch unbestimmte Ausdrücke, wie „in den meisten Fällen", „einigermassen beschränkte Werthe" etc. hinreichend zugiebt. In den Fällen, in welchen die Methode anwendbar sein wird, sind noch complicirte Grenzbestimmungen zu machen, wohl ebenso complicirt, als wenn man sich derjenigen Reihen bedient, welche durch die vom Verfasser nicht berücksichtigte Functionentheorie geliefert werden.

Erlangen, October 1881. M. Noether.

---

Y. de Arnold, **Trisectio angulorum.** Moskau, E. Lyssner. 1881.

Der Verfasser, der uns neben dem russischen Original eine französische Uebersetzung bietet, will das bekannte Problem der Trisection eines Winkels mittelst Zirkel und Lineal gelöst haben. Jedoch enthält der Beweis einen Fehlschluss (S. 21 Z. 14—21), während die Construction widerlegt wird durch eine der folgenden Formeln:

$$\text{I)} \qquad \tan\varphi = \frac{2\sin\frac{\alpha}{4}.\sin\frac{\alpha}{2} - \left(2\sin\frac{\alpha}{8} - \sin\frac{\alpha}{4}\right)\tan\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}},$$

$$\text{II)} \quad \frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{\alpha}{4}, \quad \tan\frac{\varphi-\psi}{2} = \tan\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{2\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{8}\right)\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{8} + \sin\frac{\alpha}{4}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{8}\right)\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{8} + \sin\frac{\alpha}{4}},$$

wobei $\varphi = OEB$ und $\frac{\alpha}{3}$, während $\psi = EKJ$ und $\frac{\alpha}{6}$ gleich sein sollte. Für den speciellen Fall $\alpha = 90^0$ ergeben beide Formeln $\varphi - \frac{\alpha}{3} > 49''$.

E. Ullrich.

---

**Die imaginären Grössen und ihre Auflösung** (aus dem Jahre 1863), von Heinrich Friedrich Theodor Beyda. Bonn 1881. J. B. Metzler'sche Buchhandlung. Stuttgart 1881.

Auf 60 Druckseiten lernen wir hier, dass Euler, Gauss und einige andere Mathematiker, deren Namen und Schriften dem Verfasser indessen weniger bekannt zu sein scheinen, sich über $\sqrt{-1}$ in gewaltigem Irrthum befanden. Herr Beyda hat 1863 entdeckt, leider aber erst 1881 veröffentlicht, dass $\sqrt{-1} = \sqrt{1}$. Beweise sind, nachdem eine Entdeckung einmal gemacht ist, meistens leichter zu finden. Z. B.: „Wenn die rechte Rheinseite mit positives Land, die linke mit negatives Land bezeichnet würde, so könnte ja ein Bewohner des linken Rheinufers von seinen 16 Quadratmeilen ebenso gut die Wurzel nehmen, wie ein Bewohner des rechten Ufers von den seinigen" (S. 6). Ungemein scharfsinnig ist auch (S. 58) die Widerlegung des falschen Satzes, dass $i^3 = -i$ sein soll. „Denn wenn dieses der Fall wäre, so würde sowohl $\sqrt[3]{i^3} = +i$, als auch $\sqrt[3]{-i} = +i$ sein, also die dritte Wurzel einer negativen Grösse eine positive Grösse sein. Es hat aber sonst immer die dritte Potenz einer Grösse dasselbe Vorzeichen wie die Grundgrösse, also wenn diese positiv ist, so ist auch die dritte Potenz positiv, und wenn negativ, so auch die Potenz negativ, $\sqrt[3]{27} = +3$ und $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[3]{+a^3} = +a$ und $\sqrt[3]{-a^3}$

$= -a$. Aus welchem Grunde nun ist bei $i$ ein Entgegengesetztes, als es bei einer Grösse $a$ ist?"

Neben dem unfreiwilligen Humor, der in diesen Sätzen liegt, enthalten sie die Bestätigung der Wahrheit, dass die Bezeichnung $i$ ungemein unglücklich gewählt war, und wenn es natürlich auch Niemand einfallen wird, in für Mathematiker von Fach verfassten Schriften von der eingebürgerten Uebung abzuweichen, so möchten wir doch immer wieder auf die Mahnung zurückkommen, im Elementarunterrichte sich statt des $i$ irgend eines Zeichens, z. B. eines aufrecht stehenden Pfeiles zu bedienen, damit der Schüler deutlich vor Augen sehe, es handle sich im Imaginären nicht um andere Zahlengrössen, sondern um andere Zahlenarten, als im Reellen.

Cantor.

---

**Differential- und Integralrechnung, Ausgleichungsrechnung, Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung,** bearbeitet von Dr. Richard Heger. Breslau 1881, bei Eduard Trewendt. 583 S. (Encyklopädie der Naturwissenschaften Bd. V, 381—963.)

Wir haben es mit den Schlusslieferungen der mathematischen Abtheilung der Encyklopädie der Naturwissenschaften zu thun, die nunmehr als Ganzes in zwei sehr stattlichen Bänden vor uns liegt. Die Frage drängt sich auf, ob diese mathematische Abtheilung die Zusage erfüllt habe, welche ihr Herausgeber in seinem Vorworte zum I. Bande aussprach: „Die vorliegende Darstellung der Mathematik kann (so sagte damals Geh. R. Schlömilch) gegenüber der kolossalen Ausdehnung der Wissenschaft selbstverständlich keine erschöpfende sein; wohl aber soll sie den Leser so weit führen, dass er eine ganze Reihe von Hauptwerken über Astronomie, Mechanik, Physik und Ingenieurwissenschaften lesen und sich nöthigenfalls weiter helfen kann." So viel, vielleicht auch etwas mehr, ist allerdings geleistet worden (mit einer kleinen Einschränkung des Wortlautes, auf die wir gleich zu reden kommen), und die Leistung zeigt, dass der Herausgeber in der Auswahl der Hände, welchen die unmittelbare Arbeit übertragen wurde, richtig vorgegangen ist. Die Einschränkung, welche wir meinen und deren Betonung dem Leserkreise unserer Zeitschrift gegenüber sicherlich nur empfehlend wirken kann, bezieht sich auf das von Herrn Schlömilch gebrauchte Wort „Leser". Ein Buch zum Lesen ist dieses Werk nicht, sondern zum Studiren und, falls es nicht um blosses Auffrischen aus dem Gedächtnisse geschwundener Dinge sich handelt, zum Studiren unter der Leitung eines Fachmannes. Noch heute gilt das Wort, zur Mathematik hin gebe es keinen geraden Pfad für Könige; die gewundenen und verschlungenen

Wege aber, welche zu ihr führen, ohne Wegweiser zu gehen, ist schwierig und gefährlich auch unter Benutzung einer gedruckten Anleitung. Deshalb sind wir persönlich, und nicht wir allein, überaus misstrauisch gegen Lehrbücher der gesammten Mathematik zum Selbststudium, die so leicht geschrieben sind, dass wirklich auch nicht ganz besonders veranlagte Persönlichkeiten sie „lesen" können. *Nomina sunt odiosa*, darum erwähnen wir keine besonderen Beispiele, sondern begnügen uns mit der Wiederholung des Lobes: die mathematische Abtheilung der Encyklopädie der Naturwissenschaften ist kein Buch zum Selbststudium!

Wenden wir uns von dieser allgemeinen Anerkennung des Ganzen zu denjenigen Abtheilungen, welche eigentlich Gegenstand dieser Besprechung sind, so möge uns die Bemerkung gestattet sein, dass Herr Heger, wie er schon in früheren Veröffentlichungen als Geometer sich erwies, wie er die descriptiv- und analytisch-geometrischen Theile dieses Handbuchs in von uns beifällig besprochener Weise bearbeitete, auch hier vorwiegend Löbliches in den geometrischen Capiteln leistet, in welche er auch seinen Neigungen entsprechend den Schwerpunkt verlegt hat. Die analytischen Capitel stehen etwas gegen jene zurück sowohl in der Ausdehnung, als in der Gründlichkeit der Behandlung.

So sind beispielsweise Grenzübergänge, wie S. 385 $lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{lim\,\Delta y}{lim\,\Delta x}$, S. 388 $lim\,log\,y = log\,lim\,y$, S. 606 $lim\int f(y)\,dx = \int lim\,f(y)\,dx$ als selbstverständlich angenommen, während sie nicht einmal immer richtig sind. Dass S. 495 der Grenzwerth von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=\xi$, unter welcher Annahme Zähler und Nenner unendlich werden, in der althergebrachten, eine Division durch $\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)^2$ voraussetzenden Weise abgeleitet wird, trotzdem man in diesem Augenblicke des Verfahrens noch gar nicht weiss, ob jener Divisor einen von 0 verschiedenen Werth besitze, also zum Divisor geeignet sei, wollen wir nicht einmal besonders rügen; diese fehlerhafte Ableitung schleppt sich eben durch nahezu sämmtliche Lehrbücher fort, auch nachdem Herr Stolz auf deren Unzulässigkeit (Mathem. Annalen Bd. XIV und XV) so ausdrücklich hingewiesen hat.

Die Ableitung der Maclaurin'schen Entwickelung dagegen (S. 496 flgg.) entfernt sich von der in den meisten Lehrbüchern festgehaltenen Methode. Zuerst wird, wohl im Anschluss an J. A. Serret, gezeigt, dass, wenn $\varphi(x)$ eine ganze algebraische Function $n^{ten}$ Grades, also $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ $\ldots+a_nx^n$ ist, fortgesetzte Differentiation und Nullsetzen der Veränderlichen die Identitäten $\varphi(0)=a_0$, $\varphi'(0)=1.a_1$, ... $\varphi^{(n)}(0)=1.2\ldots n.a_n$ erkennen lasse, dass somit in diesem Falle $\varphi(h)=\varphi(0)+h.\varphi'(0)+\frac{h^2}{1.2}$

$\times \varphi''(0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0)$ sei, woraus, wenn auch $f$ das Functionalzeichen einer ganzen algebraischen Function $n^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, die Folgerung $f(\xi+h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1.2}f''(\xi) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\xi)$ sich ergiebt. Dann wird hypothetisch die Gleichung $f(x) = f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{1.2}f''(\xi) + \ldots + \frac{(x-\xi)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}.P$ gesetzt, wo das Functionalzeichen $f$ in seiner Bedeutung unbeschränkt ist, abgesehen von der Bedingung, dass die Differentialquotienten von $f(x)$ vom ersten bis zum $n^{\text{ten}}$ einschliesslich für jeden zwischen $x$ und $\xi$ liegenden Werth der Veränderlichen stetig und endlich seien. $P$ ist natürlich noch zu bestimmen, und zwar aus der angenommenen Gleichung. Nun wird der Rolle'sche Satz, dessen Benennung wir allerdings vermissen, eingeschaltet, dass, wenn $F(\xi) = F(\xi+h) = 0$ und $F(x)$ zwischen $x = \xi$ und $x = (\xi+h)$ stetig bleibt, nothwendig $F'(x)$ in dem genannten Intervalle einmal mindestens verschwinden müsse, also bei $x = \xi + \theta h$, wo $\theta$ ein positiver echter Bruch ist. Setzt man $F(z) = f(x) - f(z) - (x-z)f'(z) - \frac{(x-z)^2}{1.2}f''(z) - \ldots$ $\ldots - \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(z) - \frac{(x-z)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.P$, so ist offenbar $F(z) = 0$ bei $z = x$ und bei $z = \xi$, mithin $F'(z) = 0$ bei $z = \xi + \theta(x-\xi)$. Die Differentiation von $F(z)$ liefert aber, heisst es weiter, dadurch, dass aufeinanderfolgende Entwickelungstheile sich wegstreichen, $F'(z) = -\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(z) + \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}$ $\times P = 0$ unter der Annahme $z = \xi + \theta(x-\xi)$, also sei $P = f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi))$. Diese Beweisführung ist sehr interessant, dürfte aber zugleich zur Bestätigung unserer Behauptung dienen, dass der Anfänger der Hilfe bedarf, wenn er des in diesem Buche enthaltenen Stoffes Herr werden will.

Wir haben oben schon gesagt, der Schwerpunkt der Heger'schen Bearbeitung liege in den geometrischen Capiteln. Hier findet man in der That Probleme behandelt, welche die Lehrbücher sonst wohl vermissen lassen und welche die heutige Mathematik kaum entbehren kann. Die Tangentenanzahl an eine Curve von einem Punkte aus (S. 415), die Fusspunktcurven (S. 418), confocale Kegelschnitte (S. 420), die Zahl der Wendepunkte einer Curve (S. 462), die Singularitäten (S. 519 flgg.), die Wellenfläche (S. 526) mögen als Beispiele dafür gelten, welcherlei Untersuchungen wir meinen.

Ohne einen functionentheoretischen Abschnitt ist ein Handbuch der gegenwärtigen Mathematik unvollständig, aber eine ausgeführte Functionentheorie ist wieder in einem Handbuche unmöglich. Herr Heger scheint uns mit dem, was er S. 678—829 in dieser Beziehung geboten

hat, so ziemlich das richtige Maass eingehalten zu haben. Wer diesen Abschnitt sich aneignete, kann wohl ohne weitere Hilfe an das Studium schwierigerer Originalarbeiten sich wagen.

Die beiden letzten Abschnitte (Ausgleichungsrechnung und auf das menschliche Leben sich beziehendes Versicherungswesen) sind als Dareingaben zu betrachten, welche dem Physiker und Statistiker erwünscht sein werden, ohne ihm besondere Lehrbücher entbehrlich zu machen; der Mathematiker dagegen dürfte an dem hier Gebotenen gerade die ihn vorzugsweise interessirenden Theile jener umfassenden Lehren besitzen. Ob es aber für den Mathematiker nicht noch willkommenerer gewesen wäre, in einem Anhange das Wichtigste aus der Lehre von den numerischen Gleichungen vereinigt zu finden? Wir möchten die Frage entschieden bejahen, und wir denken, wir werden damit nicht die Einzigen sein, ganz abgesehen davon, dass auf S. 105 des I. Bandes eine Behandlung der numerischen Gleichungen in sichere Aussicht gestellt ist.

Cantor.

---

**In memoriam Dominici Chelini.** Collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami. Sumptibus Ulrici Hoepli bibliopolae Mediolani 1881. XXXII, 424 pag.

Wie die politische Geschichte Italiens mit der Deutschlands eine auffallende Aehnlichkeit darbietet, so ist es auch mit der Geschichte der mathematischen Wissenschaften in beiden Ländern der Fall. Die Mathematik Italiens, wie die Deutschlands war einst eine so hoch entwickelte, dass von der Einen, wie von der Andern die übrigen Länder Europas lernten. In Italien, wie in Deutschland folgte auf die Zeit des Ruhmes eine Zeit der Schmach. Grosse Mathematiker zu erzeugen, waren das Vaterland eines Gauss, das eines Lagrange gewiss immer im Stande, aber die einzelnen Geistesriesen lassen das sie umgebende Zwergengeschlecht nur um so deutlicher in seiner Niedrigkeit erkennen. Erst um die Mitte unseres gegenwärtigen Jahrhunderts strebte der allgemeine Spiegel der Entwickelung auf's Neue, in beiden Ländern eine höhere Lage zu gewinnen, und heute stehen sicherlich nicht Deutsche, nicht Italiener am tiefsten, wenn man die mathematischen Leistungen aller Völker an einander messen wollte. Die deutsche Neuerhebung ist um fast zwei Jahrzehnte die ältere und lässt sich, ohne sonderliche Ungerechtigkeit, als Werk der Jacobi'schen Schule bezeichnen, einer Schule, in welcher allerdings mancher Schüler dem Lehrer gleichaltrig war und an Bedeutung mit ihm wetteiferte. Zu den Männern, welche in Italien die Neuzeit vorbereiten halfen, gehörte Domenico Chelini. Niemand auch seiner wärmsten Verehrer wird ihn deshalb nur entfernt mit Jacobi vergleichen wollen. Chelini hat hübsche Arbeiten ins-

besondere auf dem Gebiete der geometrisch behandelten Mechanik geliefert, aber man streiche sie hinweg, und die moderne Mathematik wird in ihrer Gesammtheit bestehen bleiben. Die Bedeutung Chelini's für Italien liegt vielmehr darin, dass er einer der Ersten war, welche nicht blos die in anderen Ländern veröffentlichten neuen Entdeckungen ohne Anleitung lasen und sich durch emsiges Studium aneigneten, sondern auch wagten, diese neuen Lehren ihren Schülern mitzutheilen. So wurde die Generation selbstschaffender Gelehrten herangebildet, welche wir das heutige Italien nennen und von denen wir, eben weil es das heutige ist, keinen Namen besonders hervorheben wollen, auch unseren Lesern gegenüber keinen besonders hervorzuheben brauchen.

Domenico Chelini ist am 16. November 1878 im Alter von 76 Jahren gestorben. Die Herren Cremona und Beltrami übernahmen es, eine ehrende Gedenkschrift für den Dahingegangenen zu Stande zu bringen, an deren Herstellung 16 Italiener und je 3 Deutsche, Engländer, Franzosen, Schweizer sich betheiligten, Gelehrte, welche meistens, wenn auch nicht alle, zu Chelini in persönlichen Beziehungen gestanden haben und von denen wenigstens Einige Gegenstände behandelten, an denen bereits Chelini sich versucht hat. An der Spitze des ganzen Bandes befindet sich eine ausführliche Würdigung des Gefeierten von Herrn Beltrami, in welche ein kürzerer aus Herrn Cremona's Feder stammender, bereits früher veröffentlichter Nekrolog hineinverarbeitet ist.

Wir können unmöglich die 29 auf jene Einleitung folgenden längeren oder kürzeren Abhandlungen der Reihe nach aufzählen oder gar analysiren. Nur zweien derselben widmen wir einige Worte, die Auswahl mit dem Interesse entschuldigend, welches die eine Abhandlung für uns persönlich, die andere wohl für jeden Mathematiker besitzt.

Oder sollte nicht jeder Mathematiker Interesse nehmen an der letzten wissenschaftlichen Arbeit von C. W. Borchardt? Borchardt war 1844 persönlich mit Chelini in Rom bekannt geworden, zu jener für Chelini's eigene Entwickelung gewiss fruchtbaren Zeit, als auch Jacobi, Steiner und Dirichlet ebendort verweilten. Um seine Mitwirkung zu dem gegenwärtigen Bande gebeten, sagte er dieselbe sofort zu und erfüllte die übernommene Verpflichtung in einem vom 5. Mai 1880 datirten Briefe an Herrn Cremona, welcher mit den Worten schliesst: „*Excusez, cher ami et confrère, le long retard de cet lettre, prolongé en dernier lieu par une maladie, dont je ne suis pas encore guéri.*“ Er sollte nicht wieder genesen. Am 27. Juni verlor ihn die Wissenschaft, und somit ist gewiss eine der letzten druckreif Borchardt's Feder entflossenen Arbeiten, möglicherweise die allerletzte, der Aufsatz, welchen wir S. 206—212 lesen. Er beschäftigt sich mit Algorithmen, die zu Ausdrücken führen, welche dem arithmetisch-geometrischen Mittel zweier Zahlen verwandt sind. Das eine Mal setzt er

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad n_1 = \sqrt{m_1 n},$$
$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_2 n_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und findet (bei $m < n$) $\lim m_\infty = \lim n_\infty = \omega = \dfrac{\sqrt{n^2 - m^2}}{\arccos\frac{m}{n}}$. Das andere Mal setzt er

$$N_1 = \sqrt{MN}, \quad M_1 = \frac{M+N_1}{2},$$
$$N_2 = \sqrt{M_1 N_1}, \quad M_2 = \frac{M_1+N_2}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und findet (bei $M < N$) $\lim M_\infty = \lim N_\infty = \Omega = \dfrac{\sqrt{M(N-M)}}{\arccos\sqrt{\frac{M}{N}}}$.

Der besondere Fall $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ führt zu $\omega = \frac{1}{\pi}$, und zu derselben Grenze, nämlich zu $\Omega = \frac{1}{\pi}$, gelangt man von $M = \frac{1}{4}$, $N = \frac{1}{2}$ ausgehend.

Der andere Aufsatz, auf welchen persönliche Beschäftigung mit ähnlichen Arbeiten unsere Aufmerksamkeit fesselt, steht S. 363–412. Fürst Bald. Boncompagni hat aus dem Notariatsarchive von Venedig das Testament von Nicolo Tartaglia ermittelt und hier zum ersten Male abgedruckt. Die Untersuchungen, welche an diese an sich verdienstliche Veröffentlichung anknüpfen, sind mit der ganzen peinlichen Sorgfalt und Zuverlässigkeit geführt, die den Verfasser geradezu kennzeichnet, und haben mehrere Punkte festgestellt, über welche bisher irrige Meinungen verbreitet waren oder welche ganz unbekannt waren. Der Todestag des geistreichen Brescianers war unzweifelhaft der 13. December 1557, oder genauer gesprochen: Tartaglia starb in der Nacht von Montag, 13. auf Dienstag, 14. December 1557; das ergiebt sich aus einer durch den Notar auf die Aussenseite des Testamentes geschriebenen Bemerkung und stimmt mit einer Aussage des bekannten französischen Geschichtsschreibers De Thou (Thuanus 1553–1617) überein, Nicolaus Tartalea aus Brescia sei Ende 1557 in Venedig schon hochbetagt gestorben. Ganz neu sind die Aufschlüsse über den Namen Tartaglia's, welche Herr Boncompagni dem Testamente zu entnehmen wusste. Bekanntlich war bisher ein von Tartaglia in seinen *Quesiti* veröffentlichter Dialog, eine Art von Selbstbiographie, die einzige Quelle, aus der man die fast romanhaft zugespitzte Jugendgeschichte desselben schö-

pfen musste. Darnach war Tartaglia's Vater ein Postillon aus Brescia mit dem Vornamen Michael, Tartaglia nur ein vom Stottern hergenommener Spottname, welchen dessen Träger beibehielt und zu Ehren brachte; auch von einem älteren Bruder und von einer jüngeren Schwester spricht Tartaglia an dem gleichen Orte. Diese beiden letzten Personen kommen nun als Erben in dem Testamente vor. Der leibliche Bruder *(mio fratello legitimo carnal)* wird Zuampiero Fontana, die Schwester Catarina genannt, Wittwe des Dominico da Aurera. Demgemäss wird auch der Mathematiker künftighin als Nicolo Fontana mit dem Beinamen Tartaglia bezeichnet werden müssen.

CANTOR.

---

**Lehrbuch der Elementargeometrie,** von J. HENRICI, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. TREUTLEIN, Professor am Gymnasium zu Carlsruhe. Erster Theil: Gleichheit der planimetrischen Grössen; congruente Abbildung in der Ebene; Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1881. VIII, 152 S.

Als wir dieses Buch zuerst in die Hand bekamen, als wir seinen Inhalt in Vergleich brachten zu den Worten des Titelblattes: *Pensum der Tertia*, da tauchten gewaltige Zweifel in uns auf. Kann man, fragten wir uns, Knaben von durchschnittlich 13—14 Jahren von Punktreihen, von Strahlenbündeln, von Symmetrieaxen, von centrischen Figuren und diametraler Lage einander entsprechender Gebilde u. s. w. reden, ohne durch solche Allgemeinheit der Anschauung, die, wohl bemerkt, nicht etwa aus so und so vielen Einzelfällen abstrahirt, sondern unvermittelt an die Spitze gestellt ist, den jugendlichen Geist geradezu abzuschrecken? Diese Frage werden mit uns gewiss viele Leser des Buches stellen, und der Zweifel wird, wenn auch wesentlich gemindert, doch nicht ganz gehoben durch persönliche Bekanntschaft mit beiden Verfassern. Wohl weiss, wer sie kennt, dass beide tüchtige Schulmänner sind, denen erfolgreiche Lehrerfahrung zur Seite steht, wohl konnte man geneigt sein, ihrer Meinungsübereinstimmung gegenüber seines Misstrauens sich zu entschlagen, wenn nicht der Umstand übrig blieb, dass in der Hand des Erfinders jedes Werkzeug gut zu sein pflegt und dass die absolute Brauchbarkeit nur dann feststeht, wenn auch ein Dritter sich dessen bedienen kann. Diese Ueberzeugung haben wir inzwischen im vollsten Grade gewonnen und freuen uns, sie aussprechen zu können. Der Knabe des Referenten besucht seit Herbst 1881 die Tertia des Heidelberger Gymnasiums und lernt die Anfänge der Geometrie mit Zugrundelegung des neuen Lehrbuches kennen. Lehrer in dieser Classe ist nicht Prof. Henrici, sondern ein jüngerer Fachgenosse, der erst im Herbst nach

Heidelberg kam, also der Methode, wie den Bearbeitern derselben bis dahin persönlich fern stand. So waren die Elemente zu einem völlig unparteiischen Versuche gegeben, und er ist bis dahin durchaus geglückt. Die ganze Classe folgt, wie wir durch unsern Jungen wissen, dem Unterrichte und hat mit so seltenen Ausnahmen, wie sie wohl kaum anderswo vorkommen, Freude an der Geometrie. Es wird uns dadurch gestattet, das Buch, welches seinem selbst gesteckten Zwecke erprobtermassen genügt, ohne Rücksicht auf diesen Zweck zu besprechen. Dass wir hier ein unbedingtes Lob zu äussern haben, liegt eigentlich schon in den oben angedeuteten Skrupeln, welche wir hegten. War das in diesem Buche Gebotene nicht zu schwer für die, welche es zu benutzen hatten, gut und in mancher Beziehung neu war es in jedem Falle. Die Euklidische Anordnung und deren Abarten nach französischen Mustern haben die Verfasser (so erklären sie in der Vorrede) aufgegeben. Sie lassen alle Gebilde durch Bewegungen, durch Drehung und Verschiebung aus einander hervorgehen und gewinnen beispielsweise die Congruenz von Figuren als Folge der Congruenz von Punkten, welche mit einander verbunden in Bewegung gesetzt werden. Die Winkelsumme der geradlinigen Figuren wird ebenfalls aus drehenden Bewegungen abgeleitet, also mittels des sogenannten Thibaut'schen Beweises des Satzes von den Dreieckswinkeln. Fast am sympathischsten berührt uns der V. Abschnitt von der Flächenvergleichung. Hier sind die flächengleichen, aber einander unähnlichen Figuren vielfach in einander congruente, mit derselben Ordnungsziffer bezeichnete Theile zerlegt, so dass auch subjectiv einleuchtet, was durch den allgemein geführten Beweis als objectiv wahr sich ergiebt. Wir sind auf's Aeusserste gespannt, zu sehen, wie die Verfasser die beiden noch in Aussicht stehenden Fortsetzungen behandeln werden, von welchen sie in der Vorrede uns sagen: Der II. Theil wird sich mit den Verhältnissen und Berechnungen planimetrischer Grössen (incl. Trigonometrie) und mit der perspectivischen Abbildung in der Ebene befassen und der III. Theil mit der Geometrie des Maasses und der Lage von Gebilden, die nicht in einer Ebene liegen. Hierbei werden insbesondere die Kegelschnitte von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet werden.

CANTOR.

---

**Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente** in elementarer Darstellung, von R. GÖTTING, Professor am Gymnasium zu Torgau. Berlin 1881, J. A. Wohlgemuth's Verlagsbuchhandlung (Max Herbig). 66 S.

Die Besprechung der Einleitung in die Analysis des gleichen Verfassers (Bd. XXVI, hist.-lit. Abth. S. 71—73 dieser Zeitschrift) hat uns Gelegenheit gegeben, Herrn Götting unseren Lesern als einen Schrift-

steller vorzustellen, der seine eigenartigen Bahnen geht und vielbehandelten Gegenständen neue Seiten abzugewinnen weiss. Die gleichen Eigenschaften legt er in der neuen Abhandlung, über welche wir heute zu reden haben, an den Tag, und wir können auch sie als eine Probe interessanter Darstellung unseren Lesern empfehlen, wenn wir gleich nicht der Meinung sind, der Weg, auf welchem Herr Götting sein Ziel aufsucht, sei der naturgemässeste und als solcher zu empfehlen. Es scheint uns beispielsweise nicht, dass eine zweite Auflage von G.'s Analysis gewinnen würde, wenn diese Abhandlung etwa hineinverarbeitet würde.

Herr Götting definirt nämlich zwei Reihen von Zahlengrössen $a_0 a_1 a_2 \ldots$ und $b_0 b_1 b_2 \ldots$. Es ist $a_0 = 2$, $b_0 = 0$, ferner $a_1 = u + vi$ und allgemein $a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 . a_k$, sowie $a_{k-1} - a_{k+1} = b_1 . b_k$, eine Definition, aus welcher auch $b_{k-1} + b_{k+1} = a_1 . b_k$ sich ergiebt. Einfache Multiplicationen und Anwendungen des Schlusses von $n$ auf $n+1$ führen weiter zu

$$\left(\frac{1}{2} a_1 \pm \frac{i}{2} b_1\right)^n = \frac{1}{2} a_n \pm \frac{i}{2} b_n$$

und durch Vervielfältigung der beiden Gleichungen, welche hier mittels Doppelzeichen vereinigt geschrieben wurden, zu

$$\tfrac{1}{4} a_n^2 + \tfrac{1}{4} b_n^2 = 1.$$

Auch ergiebt sich

$$\begin{cases} a_{k+\lambda} = \frac{1}{2} a_k a_\lambda - \frac{1}{2} b_k b_\lambda, \\ b_{k+\lambda} = \frac{1}{2} b_k a_\lambda + \frac{1}{2} a_k b_\lambda. \end{cases}$$

Ist die $a$-Reihe eine reelle und fallende, so sind sämmtliche $b$ reell; ist die $a$-Reihe eine reelle und steigende, so sind die $b$ imaginär. Im ersteren Falle wird die Identität der halben $a$ mit Cosinussen, die der halben $b$ mit Sinussen bewiesen, als mit Functionen, welche nebst ihren Haupteigenschaften aus der Trigonometrie bekannt sind. Alles, was für die $a$ und $b$ abgeleitet wird, kann dementsprechend von nun an in die Sprache der Trigonometrie übersetzt werden, und insbesondere haben für die trigonometrischen Functionen auch die Reihen Anwendung, welche von den $a$ und $b$ ausgehend entwickelt werden und deren Argument als complexe Zahlengrösse gewählt wird.

Das ist, in wenige Worte gefasst, der Hauptgedanke der uns vorliegenden Abhandlung, neu und geistreich, wie wir zu Anfang sagten, aber auch etwas absonderlich und darum, wie uns scheint, sehr wohl zu einer nachträglichen Lecture von Seiten eines der Analysis bereits kundigen Lesers, weniger zur ersten Einführung in diese Lehren geeignet.

CANTOR.

**Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen,** mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch bearb. von Dr. C. Bremiker. VIII. Stereotyp-Ausgabe. Preis 4 Mk. 20 Pf. Berlin, Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung (R. Stricker). 1881. XXIV, 542 S.

Damit eine Logarithmentafel stereotypirt werde, muss sie schon in wiederholten mit beweglichen Lettern gedruckten Ausgaben vergriffen sein; damit aber gar eine VIII. Stereotypausgabe nöthig werde, ist eine so starke Verbreitung nothwendig, dass diese selbst als Beweis der Vorzüge der Tafeln zu gelten vermag. Wir brauchen deshalb auf diese Vorzüge, als da sind: angenehme Papierfarbe, scharfe Ziffern, Reichhaltigkeit des Inhalts bei selbstverständlicher Correctheit, mässiger Preis, nicht genauer einzugehen. Dagegen gestatten wir uns eine Ausstellung, die ihre Begründung gerade in dem Stereotypirtsein der Tafeln hat. So wenig wir gegen die Unveränderlichkeit der eigentlich mathematischen Tafeln einwenden können, so sind doch die am Schlusse vorhandenen Hilfstafeln für Umwandlung von Maassen, Gewichten, Münzen durch ihre Unveränderlichkeit nachgerade antiquirt und unbrauchbar, oder doch nur auf Umwegen brauchbar geworden. Es sollte, meinen wir, in Deutschland kein auf den Schulgebrauch Rücksicht nehmendes Buch mehr gedruckt werden, welches bei Münzen und Maassen eine andere Vergleichseinheit, als Mark- und Metersystem zu Grunde legt. Bei einer derartigen zeitgemäss unerlässlichen Neubearbeitung der S. 518—542 würde man vielleicht sogar besser thun, alle gesetzlich unstatthaft gewordenen Einheiten einfach bei Seite zu lassen, allenfalls die Pariser Linien von dieser Verbannung ausnehmend.

Cantor.

---

**Mathematical Tables,** consisting of logarithms of numbers 1 to 10800, trigonometrical, nautical and other tables, edited by James Pryde, *F. E. I. S.* New edition. W. & R. Chambers. London and Edinburgh 1880. XLII, 454 pag.

Dieses Tabellenwerk ist in England unter dem Titel Chambers's Mathematical Tables bekannt, und zwar so ausschliesslich unter diesem Titel, dass derselbe allein auf dem Rücken der gebundenen Exemplare, wie sie von den Verlegern in die Oeffentlichkeit gebracht werden, angegeben ist. Es ist von ausserordentlicher Reichhaltigkeit. Den die ersten 201 Seiten füllenden briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 auf je 7 Decimalstellen schliesst sich eine kleine Tabelle an zur Umrechnung briggischer in natürliche Logarithmen und umgekehrt. Es folgt auf 45 Seiten die logarithmisch-trigonometrische Tabelle, an welche wieder andere weniger häufig in deutschen Werken auftretende Tabellen sich anschliessen: die der Bogenlängen, welche gegebene Centriwinkel

bei einem Halbmesser 1 umspannen, und der trigonometrischen Functionen selbst unter Annahme der gleichen Einheit und unter Fortschreiten der Winkel von Minute zu Minute. Nun enthalten noch fernere 121 Seiten Tabellen von wesentlich astronomischer, beziehungsweise nautischer Bedeutung, die Heimath der Sammlung hinlänglich verrathend. Die sogenannten Additionslogarithmen dagegen fehlen. Dass die Ausstattung dem Ursprunge zur Ehre gereicht, weiss zum Voraus, wer irgend ein mathematisches Werk englischen Verlages in Händen hatte. Einen Unterschied dieses Druckes gegen die meisten deutschen Tabellen, z. B. gegen Bremiker, möchten wir übrigens zu Gunsten der letzteren hervorheben. In der englischen Tabelle sind alle Ziffern gleich hoch, in der deutschen findet das Gegentheil statt. In ihr reicht die 7, die 9 unter, die 6 über die Zeile. Die deutsche Tabelle sieht dadurch unruhiger aus als die englische, aber bei längerem Gebrauche ermüdet die englische Tabelle wenigstens des Referenten Auge mehr als die deutsche, und mit der Ermüdung des Auges wächst die Unsicherheit des Abschreibens der aufgeschlagenen Zahlen, mithin auch des Rechnens. Wir sagen absichtlich, dieses Verhältniss finde für unsere Augen statt, da wir wohl wissen, wie verschieden auch in dieser Beziehung die einzelnen Persönlichkeiten geartet sind und wie dem Einen als Empfehlung der englischen Tabelle gelten mag, was wir zu ihren Ungunsten erwähnt haben.

CANTOR.

---

**Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit**, von THEODOR WITTSTEIN, Dr. phil. und Professor, Director der hannoverschen Lebensversicherungsanstalt in Hannover. Als Manuscript gedruckt. Hannover 1881. 27 S. und eine lithographirte Tafel.

Der Verfasser bedient sich als Motto des Ausspruches Koppernigk's, es genüge, wenn die Rechnung mit den Beobachtungen übereinstimme, und in der That lässt sich nicht mehr verlangen auf einem Gebiete, welches voraussichtlich noch für lange, muthmasslich für die Dauer des Menschengeschlechtes, ausschliesslich erfahrungsmässig durchforschbar ist. Das Gesetz der Sterblichkeit der Menschen theoretisch entwickeln können, hiesse ja alle die Factoren kennen und gegen einander abzuwägen im Stande sein, welche die organischen Processe veranlassen, hemmen, vernichten, und mit dieser Zukunftskenntniss schmeichelt sich wohl kaum der entschiedenste Gegner des Ignorabimus! Herr Wittstein giebt dementsprechend und will nur geben eine Formel, welche zur Wahrheit sich gewissermassen asymptotisch verhalte, ein Versuch, der schon wiederholt auch von anderen Fachmännern mit verschiedenem Erfolge angestellt worden war. Seine Formel lautet:

$$w = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}.$$

In ihr bedeutet $w$ die Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter $x$, d. h. den Quotienten $\frac{T(x)}{L(x)}$ der im Alter $x$ Sterbenden, getheilt durch die im Alter $x$ Lebenden; $M$ ist die Altersgrenze oder das Alter der ältesten am Beobachtungsorte vorhandenen Menschen und kann durch die Zahl 95 ersetzt werden; $a$, $m$, $n$ sind Constante, zu deren Berechnung drei Daten erfahrungsmässig aufgestellter Sterblichkeitslisten genügen würden, wenn diese eben nicht erfahrungsmässige wären. Wegen dieser Eigenschaft und den damit verbundenen Mängeln müssen möglich viele Daten, jedes einzelne unter Berücksichtigung seines Gewichtes, nach der Methode der kleinsten Quadrate verbunden werden. Als Gewicht einer Beobachtung nimmt Herr Wittstein $\frac{L}{w(1-w)} = \frac{L^3}{T(L-T)}$ und findet so $m = 5$, $n = 0{,}63033$, $a = 1{,}42423$. Wir können für die Ableitung oder, wie wir lieber sagen wollen, für die Begründung der Formel nur auf die kleine Abhandlung selbst verweisen, in welcher ihr Entstehen als ein allmäliges bezeichnet werden darf. Von

$$w = a^{-(M-x)}$$

gelangt der Verfasser zu

$$w = a^{-(M-x)^n}.$$

Von dieser Formel aus gewinnt er die zuletzt aufgestellte mit den drei Constanten. Die Bedeutung des zweiten Gliedes der endgiltig angenommenen Formel tritt in der Kindersterblichkeit zu Tage, also bei niedrigen Werthen von $x$. Es stellt gewissermassen die Schädlichkeiten dar, welchen das Kind von sich aus sich nicht entziehen kann, sondern gegen welche es durch die Fürsorge seiner natürlichen Beschützer gehütet werden muss. Manche interessante Folgerungen für die Eigenschaften der Function $w$ ergeben sich übrigens auch aus der Zeichnung der Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten, sowie der Curve der Lebenden, welche auf einer Tafel beigegeben ist.

Cantor.

# Bibliographie

vom 1. Mai bis 30. Juni 1882.

---

## Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften. 1882. N. I—XVII. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1882. 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 8 Mk.

Abhandlungen der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. 28. Bd. 1881. Göttingen, Dieterich. 48 Mk.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathemat.-physikal. Classe. 1881. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 44. Bd. Wien, Gerold. 19 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Cl. II. Abth. 84. Bd., 5. Heft. Ebendas. 6 Mk.

Mathematische Annalen. 20. Bd., herausgeg. v. F. Klein u. A. Mayer. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 68. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch's Verl. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von A. Krüger. 102. Bd. Nr. 2425. Hamburg, Mauke & S. pro compl. 15 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1884, mit Ephemeriden der Planeten 1 bis 220 f. 1882. Redigirt v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Rosenberger, F., Die Geschichte der Physik. 1. Thl.: Alterthum und Mittelalter. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 60 Pf.

## Reine Mathematik.

Durège, H., Elemente der Theorie der Functionen einer veränderl. compl. Grösse. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Du Bois-Reymond, P., Die allgemeine Functionentheorie. 1. Thl. Tübingen, Laupp. 8 Mk.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium d. höh. Analysis. 2. Thl.: Aufg. aus d. Integralrechn. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Staudacher, H., Elementarlehrbuch der algebraischen Analysis. München, Central-Schulbücherverlag. 2 Mk. 50 Pf.

Puchta, A., Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schier, O., Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Baltzer, R., Analytische Geometrie. Leipzig, Hirzel. 8 Mk.

Hossfeld, C., Construction des Kegelschnitts aus fünf zum Theil imaginären Elementen. (Dissert.) Jena, Deistung. 1 Mk. 20 Pf.

Pasch, M., Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Adler, A., Ueber die Strictionslinien der Regelflächen 2. u. 3. Grades. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Pelz, C., Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. (Ak.) Ebendas. 60 Pf.

Peschka, V., Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen 2. Gr. (Akad.) Ebendas. 2 Mk.

Weyr, E., Ueber Flächen 6. Gr. mit einer dreifachen cubischen Curve. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

Gusserow, C., Die Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projectionen. (Dissert.) Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Pfeiffer, G., Formeln für den Inhalt der Kegelfläche. (Dissert.) Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Greve, Lehrbuch der Mathematik. 3. Curs, 1. u. 2. Thl. Berlin, Stubenrauch. à 1 Mk.

Smolik, F., Elemente der darstellenden Geometrie. Prag, Tempsky. 3 Mk. 60 Pf.

Cauchy, A., Oeuvres complètes. Série I, Vol. I. Paris, Gauthier-Villars. 25 Frcs.

## Angewandte Mathematik.

Hagen, G., Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. Berlin, Ernst & Korn. 6 Mk.

Schell, A., Der Einschneide-Transporteur von V. v. Reitzner. Wien, Seidel & S. 80 Pf.

Vonderlinn, J., Geometrische Beleuchtungsconstructionen. 1. Theil: Selbst- und Schlagschatten. München, Ackermann. 7 Mk.

Meissner, C., Ueber die Deformation eines elastischen isotropen Kegels durch mechanische, an seiner Oberfläche wirkende Kräfte. Tübingen, Fues. 60 Pf.

Laskus, A. u. H. Lang, Schwungräder und Centrifugalpendelregulatoren, deren Theorie und Berechnung. Leipzig, Baumgärtner. 2 Mk.

Margules, M., Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Reiff, R., Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik. Freiburg i. B., Mohr. 1 Mk. 20 Pf.

ISRAEL-HOLTZWART, K., Abriss der mathematischen Geographie. Wiesbaden, Bergmann. 2 Mk. 70 Pf.

—, Elemente der sphärischen Astronomie. Ebendas. 4 Mk. 80 Pf.

FÖHRE, S. C., Die Bewegungen im Sonnenraume, insbesondere die Ursache und das Gesetz der Axendrehung der Planeten und Monde. Dresden, Tittmann. 3 Mk.

ISRAEL, C., Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit, Ekliptikschiefe und geogr. Breite. Die Horizontalparallaxe des Mondes aus Beobachtungen ausserhalb des Meridians. Halle, Schmidt. 40 Pf.

FRIESACH, C., Der am 6. Dec. 1882 bevorstehende Venusdurchgang, vorausberechnet. (Akad.) Wien, Gerold. 5 Mk.

OPPOLZER, TH. v., Syzygientafeln für den Mond. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1883, herausgegeben vom hydrograph. Amt der kaiserl. deutschen Marine. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

## Physik und Meteorologie.

PETERSON, H., Ueber Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft unseres Planeten. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

OBERMAYER, A. v., Versuche über die Diffusion von Gasen. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

HANKEL, W., Elektrische Untersuchungen. 16. Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits etc. (Sächs. Ges.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

EDELMANN, M. TH., Die erdmagnetischen Apparate der Polarexpeditionen im Jahre 1883. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

HAUBNER, J., Die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

WASSMUTH, A., Ueber die Tragkraft ringförmiger Elektromagnete. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1881.

### Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

## A.

### Abbildung.

1. Ueber Isothermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conform veränderliche Systeme, die mit den Abbildungen $z=\sqrt[n]{Z}$ und $z=\sqrt[m]{\frac{aZ^n+b}{cZ^n+d}}$ zusammenhängen. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 231.
2. Sur une application de l'algèbre directive Neuberg. Mathesis I, 123, 128. Cesaro ibid. 127.

Vergl. Functionen 76.

### Analytische Geometrie der Ebene.

3. Zur allgemeinen Theorie der ebenen Curven. Mahler. Grun. Archiv LXVI, 365.
4. Sur les foyers des courbes planes. Gibert & Niwenglowski. Mathesis I, 155.
5. Équations d'un angle, d'un rectangle et d'un losange. Plateau & Neuberg. Mathesis I, 89.
6. Théorèmes sur les courbes algébriques. Weill. N. ann. math. XL, 498.
7. Sur une courbe du troisième degré. Aignan. N. ann. math. XL, 282. — L. Lévy ibid. 423.
8. Équations de deux cubiques. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 520.
9. Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points. Pecquery & Chrétien. N. ann. math. XL, 184.
10. Sur un système de quinze cubiques du troisième ordre passant toutes par six points donnés. Goffart. N. ann. math. XL, 428.
11. Enveloppe d'une droite tirée par les deux points d'intersection d'une conique avec une autre conique tangant la première et circonscrite à un triangle donné. Genty. N. ann. math. XL, 368.
12. Sur une enveloppe. S. F. W. Baehr. N. ann. math. XL, 250.
13. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. Resal. Journ. mathém. Ser. 3, VI, 115.
14. Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Chr. Wiener. Zeitschr Math. Phys. XXVI, 257.
15. Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal Weill. N. ann. math. XL, 160.
16. Génération du limaçon de Pascal. Neuberg. Mathesis I, 200.
17. Sur la logocyclique ou strophoïde. Günther Mathesis I, 81.
18. Spirale d'Archimède engendrée au moyen d'une chainette roulant extérieurement sur un cercle. Clevers. Mathesis I, 28. — Brocard ibid. 71.
19. Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale. Schiffner. Grun. Archiv LXVI, 334.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Lemniscate. Parabel. Singularität.

### Analytische Geometrie des Raumes.

20. Entwickelungsgeschichte der Lehre von den Raumcurven Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 173.
21. Ueber Parallelen geschlossener Curven. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 46.
22. Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion. Cretin. N. ann. math. XL, 131.
23. Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 386.

24. Notes de géométrie analytique. Ed. Lucas. Mathesis I, 65.
25. Six plans se coupant suivant une même droite. Genèse. N. ann. math. XL, 175.
26. Cylindre parabolique coupé par des plans. Brocard. Mathesis I, 122.
27. Sur une courbe du quatrième degré. Griess. N. ann. math. XL, 20.
28. Equation différentielle du second ordre des projections sur un plan donné de certaines courbes tracées sur une surface de révolution. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 55. — Evesque ibid. 229.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Kegelschnitte. Mannichfaltigkeiten. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

### Astronomie.

29. Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 107, 328.
30. Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 50.
31. Ueber die Bestimmung des Ortes eines Gestirns durch den Durchschnitt zweier grösster Kugelkreise. Edm. Weiss. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 201.
32. Sur une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Concordia. Souchon. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 337.

Vergl. Nautik.

## B.

### Bestimmte Integrale.

33. Beitrag zu einer Classe von bestimmten Integralen complexer Functionen. Niemöller. Grun. Archiv LXVI, 225.
34. Sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. Radau. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 283.
35. Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur. F. August. Grun. Archiv LXVI, 72.
36. Valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} . dx$. Mansion. Mathesis I, 67.

### Brennpunkt.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Ellipse 66, 67. Ellipsoid 70. Hyperbel 124, 125. Kegelschnitte 135, 139, 140. Oberflächen zweiter Ordnung 202.

## C.

### Combinatorik.

37. Parmi les permutations de $n$ lettres combien y en a-t-il où aucune lettre n'est à sa place naturelle? Neuberg. Mathesis I, 27.
38. Sur le calcul des dérangements. C. Henry. N. ann. math XL, 5.
39. Problème des huit reines sur un échiquier. J. Bourget. N. ann. math. XL, 473.

Vergl. Planimetrie 233. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### Complanation.

40. Sur un théorème de Pappus relatif à la spirale sphérique. Resal. N. ann. math. XL, 433.
41. Surfaces engendrées par un arc de cercle et par une droite et se trouvant en un rapport donné. Leinekugel. N. ann. math. XL, 307.
42. Sur l'aire décrite par un arc de chaînette tournant autour de l'axe des abscisses. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 416.

### Cubatur.

43. Formules de Joachimsthal pour la surface d'un triangle et pour le volume d'un tétraèdre. Droz. N. ann. math. XL, 411.
44. Volume engendré par un trapèze tournant autour d'un côté. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 315.
45. Volume d'un ellipsoide décrit par un quatrième point d'une droite dont trois points glissent sur les faces d'un angle trièdre. Mister. Mathesis I, 182.
46. Volume compris entre une surface du quatrième degré et deux plans. Jamet. Mathesis I, 180.

47. Expressions simples des volumes de deux corps de révolution. Dostor. Mathesis I, 157.
48. Ueber den Rauminhalt dreier Kegel, deren ebene Leitcurven gegeben sind, und die eine gemeinsame Spitze besitzen. Hočevar. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 207.
Vergl. Quadratur 240. Tetraeder 259.

## D.

### Determinanten.

49. Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 64.
50. Werth einiger doppelt-orthosymmetrischer Determinanten. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 132.
51. Beweis eines Weierstrass'schen Satzes. Hovestadt. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 392.

### Differentialgleichungen.

52. Sur les solutions singulières des équations différentielles totales. Petersen. Mathesis I, 155.
53. Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. D. André. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 27.
54. Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles. Méray. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 235.
Vergl Analytische Geometrie des Raumes 28. Ellipsoid 69. Oberflächen 189. Optik 206. Variationsrechnung 264.

### Differentialquotient.

55. Formule pour trouver la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction de fonction. Teixeira. Mathesis I, 23.
Vergl. Potential 235.

### Division.

56. Sur un procédé particulier de division rapide. C. Henry. N. ann. math. XL, 213.

## E.

### Elasticität.

57. Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques. Sophie Germain. Journ. mathém. Sér. 3, VI, Supplém.
58. Theorie der elastischen Schwingungen. Tendering. Grun. Archiv LXVI, 147

### Ellipse.

59. Ueber Summen und Producte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 59.
60. Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 135.
61. Sur un système d'ellipses semblables. Lemoine. Mathesis I, 129. — P. Serret ibid. 130.
62. Une cycloïde reste constamment tangente à deux droites fixes $OX$, $OY$: le lieu du centre du cercle qui passe par le point $O$ et les deux points de contact $M$, $N$ est une ellipse. Barbarin. N. ann. math. XL, 453.
63. Théorèmes sur les normales à l'ellipse. Weill. N. ann. math. XL, 73, 110.
64. Ueber die Normalen der Ellipse. Lauermann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 387.
65. Déplacement d'un point dont on connait les quatre normales à une ellipse donnée. Hilaire. N. ann. math. XL, 14.
66. Lieu des foyers des ellipses ayant un sommet donné à une extrémité du petit axe, et une tangente donnée à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux Geneix-Martin. N. ann. math. XL, 462.
67. Circonférence passant par les foyers d'une ellipse. H. Du Montel. N. ann. math. XL, 379.
68. Lieu des sommets de triangles circonscrits à une ellipse donnée. Doucet. N. ann. math. XL, 321.
Vergl. Oberflächen 194. Quadratur 241.

### Ellipsoid.

69. Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Picart. N. ann. math. XL, 145. Legoux ibid. 326.
70. Die Brennpunkte der Krümmungslinien des Ellipsoids. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 383.
71. Théorèmes sur un ellipsoïde tangant aux six arêtes d'un tétraèdre donné. Griess. N. ann. math. XL, 27.

Vergl. Cubatur 45. Hydrodynamik. Oberflächen 194.

### Elliptische Transcendenten.

72. Ueber die Sturm'sche Methode der Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Much. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 333.
73. Sur la réduction de $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx$ à l'intégration d'une fonction rationelle au moyen de la substitution $x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}$. Hermite. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 5.

## F.

### Functionen.

74. Einige Anwendungen eines functionentheoretischen Satzes. Krey. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 357.
75. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 314.
76. Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 1, 72.
77. Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles. De Maximovitch. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 167.
78. Sur la fonction génératrice des polynomes $P_{m,n}$ de Didon. Orlow. N. ann. math. XL, 481.
79. Sur des polynômos de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi. Appell. Grun. Archiv LXVI, 238.

Vergl. Abbildung. Bestimmte Integrale. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Grenzwerthe. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Logarithmen Partialbrüche. Quadratische Formen. Reihen. Singularitäten. Taylor's Reihe. Thetafunctionen. Unbestimmte Integration.

## G.

### Geodäsie.

80. Sur les points de la surface de la terre dont la latitude est égale à la longitude. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 314.

### Geometrie (descriptive).

81. Ueber die Grundprincipien der Linearperspective. G. Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 273.
82. Trouver la perspective d'une hélice, le tableau étant perpendiculaire à son axe et le point de vue étant sur cet axe. L. Lebrun. N. ann math. XL, 12.

### Geometrie (höhere).

83. Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades. Hain. Grun. Archiv LXVI, 282.
84. Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes. M. d'Ocagne. N. ann. math. XL, 197.
85. Généralisation d'une propriété des polaires. Mansion. Mathesis I, 7. — Catalan ibid. 58.
86. Exercices de géométrie. Dewulf. N. ann. math. XL, 391.
87. Combien existe-t-il de courbes rationelles (unicursales) du quatrième ordre qui ont deux points doubles et qui passent par sept points simples donnés? Dewulf. N. ann. math. XL, 401.
88. Ueber das Transversalensystem zweier Punkte Hain. Grun. Archiv LXVI, 280.
89. Sur le centre des médianes antiparallèles. Neuberg. Mathesis I, 153, 178, 185.
90. Unrichtigkeit eines von Chasles herrührenden Satzes in seiner ursprünglichen Fassung. Lange. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 98.

91. Richtigstellung eines Satzes von Chasles. Schroeter. Zeitschr. Math Phys. XXVI, 270.
92. Propriétés du limaçon de Pascal. Clevers. Mathesis I, 43. — Ed. Lucas ibid. 66.
Vergl. Infinitesimalgeometrie Kegelschnitte. Mechanik 171.

### Geschichte der Mathematik.

93. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 121.
94. Ueber die Gradeintheilung des Kreises. Hultsch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 38.
95. Die Methode Tá jàn im Suán-kīng von Sun tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I Abschnitte des Tá jàn lỲ schū. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 33.
96. Sur l'orthographe du mot djebr. Parmentier. N. ann. math. XL, 139.
97. Carré magique de la Villa Albani. Catalan. Mathesis I, 121. — Boncompagni ibid. 151.
98. Le nom et la date de la mort de Tartaglia. Boncompagni. Mathesis I, 144.
99. Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. Isenkrahe. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 1.
100. Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 19.
101. Justus Bellavitis 1803—1880. Favaro. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 153.
102. Nécrologe de Giusto Bellavitis. N. ann. math. XL, 137.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 20. Astronomie 30. Complanation 40. Kreis 147. Logarithmen 165. Mechanik 179.

### Gleichungen.

103. Remarques sur le théorème de Sturm. Candèze. N. ann. math. XL, 193.
104. Sur le théorème de Rolle. Collin. N. ann. math. XL, 132.
105. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation. Candèze. N. ann. math. XL, 49.
106. Beitrag zu den Gleichungen des 2., 3. und 4. Grades mit rationalen Wurzeln. Sinram. Grun. Archiv LXVI, 94. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 419.]
107. Résolution de l'équation du troisième degré. A. Scholz. N. ann. math. XL, 220.
108. Discussion de l'équation du troisième dégré. Liebrecht. Mathesis I, 38. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 160.]
109. Eine algebraische Lösung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen. Lehmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, hist.-lit. Abth. 39.
110. Discussion des valeurs des racines de l'équation $x^3+Px+Q=0$. Realis. N. ann. math. XL, 408.
111. Résolution de l'équation du quatrième degré. F. Briot. N. ann. math. XL, 225.
112. Ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation réciproque. Brocard. Mathesis I, 199. — Neuberg ibid. 199.
113. Sur les racines de l'équation $x^4-(k-b+c)x^2+(b-2c)ax-ck=0$. Pecquery. N. ann. math. XL, 376.
114. Sur l'équation $\left(\frac{a-b}{x}+\frac{b-x}{a}+\frac{x-a}{b}\right)\left(\frac{x}{a-b}+\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}\right)=9$. Verhelst. Mathesis I, 42. — Charlier ibid. 58.
115. En rendant rationelle l'équation $(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\ldots+(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0$ on parvient à une équation du degré $2^{n-2}$. Desboves. N. ann. math. XL, 329.
116. Le polynôme $(x+y)^m-x^m-y^m-3(x+y)(xy)^{\frac{m-1}{2}}$ est divisible par $x^2+xy+y^2$ si $m$ est un multiple impair de 3. Van Glabbeke. Mathesis I, 94.
117. Dans une progression géométrique de quatre termes trouver ces termes, la somme des trois premier et celle des trois derniers étant donnée. Geneix-Martin. N. ann. math. XL, 280.
118. Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré $m$ à deux inconnues. Escary. N. ann. math. XL, 227.
Vergl. Kettenbrüche 144.

### Grenzwerthe.

119. Note sur les limites et les nombres incommensurables. Jablonski. N. ann. math. XL, 241.
120. Définition du mot limite. Mansion. Mathesis I, 193.

## H.

### Hydrodynamik.

121. Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène ayant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes. Picart. N. ann. math. XL, 216.

### Hyperbel.

122. Problème sur l'hyperbole équilatère. H. Lez. N. ann. math. XL, 127.
123. Propriété des hyperboles équilatères tangentes en un point donné à une ligne donnée et qui passent par un point donné. Boudènes. N. ann. math. XL, 235.
124. Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre fixe et passant par un point fixe. Geneix-Martin. N. ann. math. XL, 460.
125. Équation générale des hyperboles ayant un point donné pour foyer, et telles qu'un des sommets du rectangle construit sur les axes soit en un point donné. Geneix-Martin. N. ann. math. XL, 459.

### Hyperboloid.

126. Das gleichseitige Hyperboloid. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 136.
127. Sur la déformation du cache-pot. E. Lucas. N. ann. math. XL, 9.
128. Conséquences géométriques du théorème que quatre forces qui se font équilibre sont situées sur un même hyperboloïde. Jamet. N. ann. math. XL, 271.

## I.

### Imaginäres.

Vergl. Bestimmte Integrale 33. Functionen. Taylor's Reihe. Zahlentheorie 270.

### Infinitesimalgeometrie.

129. Exercice de géométrie infinitésimale. Ph. Gilbert. Mathesis I, 97.

## K.

### Kegelschnitte.

130. Sur un mode de description des courbes du second ordre. Gambey. N. ann. math. XL, 273.
131. Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte. Hain. Grun. Archiv LXVI, 274.
132. Puissance d'un point par rapport à une conique à centre. Barbarin. Mathesis I, 85. — G. T. ibid. 156.
133. Normale menée à une conique à centre d'un point situé sur une de ses axes. E. Lebon. N. ann. math. XL, 133, 240.
134. Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten. Pelz. Grun. Archiv LXVI, 1.
135. Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second degré et sur la détermination analytique de ces points. Letnikow. N. ann. math. XL, 289.
136. Lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes à une courbe donnée $S$ du second degré et à une circonférence variable $S'$, touchant $S$ en un point donné $O$. P. Ruex. Mathesis I, 53. — Neuberg ibid. 54.
137. Le lieu du centre de la circonférence qui passe par un point donné d'une conique et par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe est une conique. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 65.
138. Deux coniques tangentes. Laudiero. N. ann. math. XL, 179.
139. Propriété de coniques homofocales. Pisani. Mathesis I, 145. — Neuberg ibid. 147.
140. Sur un système de courbes orthogonales et homofocales. Legoux. N. ann. math. XL, 406.

141. Transversale passant par le sommet commun de trois coniques. Goffart. N. ann. math. XL, 427.
142. Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind, und deren Erzeugniss. Mahler. Grun. Archiv LXVI, 358.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 160. Parabel.

**Kettenbrüche.**

143. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. Laguerre. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 99.
144. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen. K. E. Hoffmann. Grun. Archiv LXVI, 33.

**Kreis.**

145. Circonférence décrite comme point de rencontre de deux droites. Lez. N. ann. math. XL, 310.
146. Circonférence décrite par le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu d'un côté d'un trapèze d'aire constante sur le côté opposé. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 319.
147. Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle. Dostor. Grun. Archiv LXVI, 27.
148. Quatre points, dont deux mobiles, situés sur une circonférence. Edm. van Aubel. Mathesis I, 78.
149. Einige Sätze aus der Kreislehre. Jeřábek. Grun. Archiv LXVI, 325.
150. $B$, $C$, $D$ étant situés sur une droite le rapport des rayons des circonférences passant par un point quelconque $A$ et par $B$ et $D$ et par $A$, $C$ et $D$ est indépendant de la position de $D$ sur $BC$. N. ann. math. XL, 317.
151. Distances des trois sommets d'un triangle au centre du cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle. Dostor. Grun. Archiv LXVI, 24.
152. Si, d'un point $O$ d'une circonférence, on abaisse des perpendiculaires $OM$, $ON$ à deux côtés d'un triangle inscrit, la projection du troisième côté sur $MN$ sera égale à $MN$. Goffart. N. ann. math. XL, 523.
153. Théorème sur les cercles ex-inscrits à un triangle. Van Glabbeke. Mathesis I, 116.
154. Surfaces d'un triangle donné et des triangles dont les sommets sont les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au premier. E. van Aubel. Mathesis I, 72.
155. Théorème sur un polygone inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle. H. Faure. N. ann math. XL, 142.
156. Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblems. K. E Hoffmann. Grun. Archiv LXVI, 246.
157. Lieu des centres des cercles tangant intérieurement à un démi-cercle, et extérieurement aux deux démi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du prémier demi-cercle. Dostor. Grun. Archiv LXVI, 17.
Vergl. Maxima und Minima 169.

**Krümmung.**

158. Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure. Hunyady. N. ann. math. XL, 53.
159. Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. Koenigs. N. ann. math. XL, 11.
160. Sur deux coniques osculatrice l'une à l'autre. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 372.
161. Déterminer une courbe telle que si l'on forme une de ses transformées par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné, les rayons de courbure en deux points correspondants des deux courbes soient dans un rapport donné. Fauquembergue. N. ann. math XL, 35, 171. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 1.]
162. Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten. Dietrich. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 57.
163. Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinig Erzeugenden. Buka. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 15.
Vergl. Ellipsoid 69, 70.

**Kugelfunctionen.**

Vergl. Bestimmte Integrale 33.

## L.

### Lemniscate.

164. Eigenschaften der Lemniscate. W. Hess. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 143.

### Logarithmen.

165. Méthode du module inventée par Albert Namur pour le calcul des logarithmes. Mansion. Mathesis I, 39.
166. Erratum aux tables de logarithmes de Schrön. Besche. N. ann. math. XL, 240.

## M.

### Mannichfaltigkeiten.

167. Ueber den Winkel von $n$ Dimensionen. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 448.

### Maxima und Minima.

168. Question de maximum relative à un triangle. Van Glabbeke. Mathesis I, 29. — Hudson ibid. 30.
169. D'un point $P$ pris sur la tangente en $C$ à un cercle, on mène une sécante $PAB$ telle que la surface du triangle $PAB$ soit maximum; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point $P$ se meut sur la tangente. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 518.
170. Einen Punkt $M$ so zu bestimmen, dass die Summe seiner Abstände von $n$ gegebenen Punkten ein Minimum wird. Schärtlin. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 70.

Vergl. Astronomie 29.

### Mechanik.

171. Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 157. [Vergl. Bd. XXIV, Nr. 143.]
172. Note sur les différentes branches de la cinématique. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 49.
173. Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane. H. Léauté. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 215.
174. Sur le parallélogramme de Watt. A. de Saint-Germain. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 19.
175. Sur le système articulé du colonel Peaucellier. N. ann. math. XL, 456.
176. Un corps solide se meut autour d'un point fixe: trouver à chaque instant le lieu des points du corps pour lesquels l'accélération est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 420.
177. Sur le centre de composition d'un système de forces quelconques dans le plan. M. d'Ocagne. N. ann. math. XL, 201.
178. De deux triangles plan ayant un sommet commun et ayant pour bases l'un l'accélération d'un point, l'autre sa vitesse l'aire du premier est la dérivée par rapport au temps de l'aire du second. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 281.
179. Généralisation d'un théorème de Pappus. Resal. N. ann. math. XL, 337.
180. Position d'équilibre d'une tige rigide qui s'appuie sur deux hémisphères. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 231.
181. Sur le mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. D'Ocagne. N. ann. math. XL, 506.
182. Bestimmung der Bewegung eines Rotationskörpers um einen als fest angenommenen Punkt seiner Axe unter dem Einflusse der Schwerkraft. Frenzel. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 104.
183. Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebenen. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 213.
184. Ueber das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 260.
185. Wälzung eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers auf einer Horizontalebene. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 373.
186. Sur les problèmes des températures stationaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu, dans les cylindres ou les tuyaux dont la section nor-

male est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées. Boussinesq. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 177.

Vergl. Astronomie 29. Elasticität. Geschichte der Mathematik 99. Hydrodynamik. Hyperboloid 127, 128. Maxima und Minima 170. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

## N.

### Nautik.

187. Sur l'astronomie nautique. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 85.

### Normalen.

Vergl. Ellipse 63, 64, 65. Geometrie (höhere) 84. Kegelschnitte 133.

## O.

### Oberflächen.

188. Ueber geodätische Linien. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 264.
189. Equation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface engendrée par une circonférence. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 471.
190. Surfaces applicables sur des surfaces de révolution. A. Picart. N. ann. math. XL, 113.
191. Lieu des points de l'espace d'où les trois côtés d'un triangle, dont le sommet fixe et les angles tous aigus sont donnés, sont vus sous des angles droits. Goffart. N. ann. math. XL, 524.
192. Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoide à plan directeur. Verstraeten. Mathesis 1, 49. — Mister ibd. 137.
193. Sur une certaine courbe tracée sur un cylindre. Fauquembergue. N. ann. math. XL, 348.
194. Surface produite par des ellipses situées en même temps sur des ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Barbarin. N. ann. math. XL, 57.
195. Eine Taugentenconstruction zur Astroide. Sucharda. Grun. Archiv LXVI, 321.
196. Sur une classe de surfaces du quatrième ordre. Jamet. N. ann. math. XL, 344, 385, 434.

Vergl. Elasticität 57. Krümmung 162, 163. Oberflächen zweiter Ordnung. Sphärik.

### Oberflächen zweiter Ordnung

197. Sur un théorème de Chasles. A. Droz N. ann. math. XL, 305.
198. Propriétés du paraboloïde hyperbolique. Griess. N. ann. math. XL, 120.
199. Enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donné. Hioux. N. ann. math. XL, 276.
200. Sur les conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution. Genty. N. ann. math. XL, 414.
201. Lieu des axes de certaines surfaces de révolution du second degré. C. Michaux. N. ann. math. XL, 17.
202. Ueber confocale Flächen. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 204.
203. Sur trois surfaces du second degré. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 333.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Paraboloid.

### Optik.

204. Bewegungen des Aethers im freien Raume, welche ein continuirliches Farbenspectrum verursachen. Maiss. Grun. Archiv LXVI, 397.
205. Ueber die Curve, welche die Punkte verbindet, die auf concentrischen, reflectirenden Schalen liegen und der Bedingung genügen, dass die von einem festen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen daselbst so reflectirt werden, dass sie alsdann durch einen zweiten festen Punkt gehen. W. Werner. Grun. Archiv LXVI, 56.
206. Zur Integration der Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystalllinse der Fische. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 179. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 151.]
207. Construction der Cardinalpunkte eines Linsensystems. M. Koppe. Grun. Archiv LXVI, 405.

## P.

### Parabel.

208. Paraboles passant par deux points donnés et dont les diamètres ont une direction donnée. Chambeau. N. ann. math. XL, 464.
209. Parabole enveloppe de perpendiculaires à des tangentes successives d'une première parabole. Brocard. Mathesis I, 113. — S. B. ibid. 114.
210. Parabole enveloppe d'une droite mobile. Jamet. Mathesis I, 59. — Neuberg ibid. 60.
211. Propriétés de la parabole. Boudènes. N. ann. math. XL, 180.
Vergl. Hyperbel 123. Krümmung 159. Quadratur 242.

### Paraboloid.

212. Propriété du paraboloïde. Leinekugel. N. ann. math. XL, 178.
Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 198.

### Partialbrüche.

213. Zur Zerlegung einer rationalen algebraischen Function in Partialbrüche. v. Hoepflingen-Bergendorf. Grun. Archiv LXVI, 314.

### Planimetrie.

214. Sur les figures semblables. Neuberg. Mathesis I, 106.
215. Questions de mathématiques élémentaires. Neuberg. Mathesis I, 7, 26.
216. Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que les trois parallèles aux côtés menées par ce point et limitées au périmètre du triangle soient égales entre elles. Brocard. Mathesis 1, 148. — Neuberg ibid. 149, 158. — Jeřábek ibid. 191.
217. D'un point $P$, pris sur la bissectrice de l'angle $A$ d'un triangle $ABC$, on abaisse des perpendiculaires $PA'$, $PB'$, $PC'$ sur les côtés. Démontrer que les droites $PA'$, $B'C'$ se coupent sur la médiane issue de $A$. Edm. van Aubel & Duyckaerts. Mathesis I, 117. — Pisani ibid. 118. — Neuberg ibid. 118.
218. Théorème sur des triangles successifs dont on mène les hauteurs. H. van Aubel. Mathesis I, 91.
219. Si trois droites quelconques, issues des sommets d'un triangle $ABC$, coupent les côtés en $A'$, $B'$, $C'$, les milieux $A''$, $B''$, $C''$ de $AA'$, $BB'$, $CC'$ sont les sommets d'un triangle dont l'aire vaut le quart de celle de $A'B'C'$. Edm. van Aubel. Mathesis I, 202.
220. Aire du triangle dont les sommets sont placés sur les côtés d'un triangle donné et les partagent en proportions données. Delacourcelle. N ann. math. XL, 182.
221. Propriétés d'un triangle sur les côtés duquel on construit extérieurement et intérieurement des carrés. Edm. van Aubel. Mathesis I, 163.
222. Trouver sur le côté d'un triangle équilatéral un point tel que l'aire d'un quadrilatère donné à l'aide de ce point soit d'une grandeur donnée. Lez. N. ann. math. XL, 311.
223. Dans un quadrilatère le point d'intersection des diagonales, le point d'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés opposés et le centre de gravité sont en ligne droite. H. van Aubel. Mathesis I, 90. — Edm. van Aubel ibid. 90. — P. Ruex ibid. 91. — Mister ibid. 91.
224. Construire un quadrilatère connaissant les quatre côtés et la droite qui divise deux côtés opposés dans un même rapport. Verhelst. Mathesis I, 47. — Prévost ibid. 47.
225. Construire un quadrilatère connaissant les quatre côtés et sachant de deux angles consécutifs sont égaux entre eux. Pisani. Mathesis I, 179. — Rocchetti ibid. 179.
226. Construire un quadrilatère, connaissant les côtés et la somme de deux angles opposés. H. van Aubel. Mathesis I, 93.
227. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 320.
228. Ueber die Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat. Schoenemann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 208.
229. À un cercle donné circonscrire un trapèze connaissant les deux bases. Günther. Mathesis I, 61. — Verhelst ibid. 61. — P. Ruex ibid. 61.

230. Ein Satz vom ebenen Viereck. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 133.
231. Étant construit extérieurement sur deux côtés opposés d'un quadrilatère et intérieurement sur les deux autres côtés des triangles semblables à un triangle donné il en résulte un parallélogramme; ce théorème reste vrai si le quadrilatère dévient triangle lui même. Interdonato. Mathesis I, 166, 167.
232. Partage des polygones. D'Ocagne. Mathesis I, 109. — Euzet ibid. 110.
233. Anzahl der inneren Diagonalschnitte eines Vielecks. Saalschütz. Grun. Archiv LXVI, 331. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 262.]
234. Théorie générale des polygones étoilés. Dostor. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 343.

**Potential.**

235. Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials. Th. Horn. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 145, 209.
236. Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière. Boussinesq. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 89.

## Q.

**Quadratische Formen.**

237. Réduction de deux polynomes homogènes du second degré à des sommes de carrés. H. Laurent. N. ann. math. XL, 38.

**Quadratur.**

238. Sur l'évaluation approchée des aires planes. Mansion. Mathesis I, 17, 33 & Supplément.
239. Sur le planimètre polaire. Haillecourt. N. ann. math. XL, 265. — Barbarin ibid. 266. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 476.]
240. Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und sein Zusammenhang mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte der Flächen. F. W. Fischer. Grun. Archiv LXVI, 337.
241. L'aire de l'ellipse décrite par un point d'une droite de longueur constante qui glisse entre les jambes d'un angle est indépendante de la grandeur de l'angle. Jamet. Mathesis I, 179.
242. Étant données deux paraboles, l'une du second, l'autre du troisième ordres et passant par les extrémités de trois ordonnées équidistantes, ces courbes forment entre elles deux segments curvilignes de même aire. Catalan. N. ann. math. XL, 403.
243. Sur une courbe du quatrième ordre dont l'aire est égale à celle d'une circonférence donnée. Brocard & Pisani. Mathesis I, 128. — Mansion ibid. 129.

Vergl. Bestimmte Integrale 34, 35. Cubatur 43.

**Quadratwurzel.**

Vergl. Geschichte der Mathematik 93.

## R.

**Reihen.**

244. Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 63.
245. Sur la serie $\frac{1}{(log\,2)^n}+\frac{1}{(log\,3)^n}+\ldots+\frac{1}{(log\,x)^n}+\ldots$ Hermite. Mathesis I, 37. — Catalan ibid. 58. — Baehr ibid. 58.
246. Sur la série harmonique. Cesaro. Mathesis I, 51, 143.
247. Sur la série harmonique et la formule de Stirling. Mansion. Mathesis I, 69.
248. $\frac{1.2}{3.4.5.6}+\frac{2.3}{4.5.6.7}+\frac{3.4}{5.6.7.8}+\ldots=\frac{1}{9}$. Fouquet. Mathesis I, 76. — Verhelst ibid. 77. — Catalan ibid 139. — Mansion ibid. 140.
249. Somme des cinquièmes puissances des $n$ premiers nombres entiers. D. Marchand. N. ann. math. XL, 140.

Vergl. Taylor's Reihe.

## S.

### Schwerpunkt.

250. Ueber den Schwerpunkt des Eckpunktsystems eines Vierecks. Hoppe. Grun. Archiv LXVI, 330. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 494.]

Vergl. Quadratur 240.

### Singularitäten.

251. Théorie des points singuliers dans les coubes algébriques. Biehler. N. ann. math. XL, 97, 489, 537. [Vergl Bd. XXVI, Nr. 498.]
252. Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales. E. Pellet. N. ann. math. XL, 444.
253. Recherche de points multiples à l'aide d'introduction de certains résultats étrangers mais bien connus. Saltel. N. ann. math. XL, 546.
254. Propriété d'une courbe plane du degré $n$ qui a précisément $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2$ points doubles différents. H. A. Schwarz. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 111.
255. Ueber Discontinuitäten bei Curven. P. Vogel. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 391.

Vergl. Geometrie (höhere) 87.

### Sphärik.

256. Sur les angles d'un triangle formé par trois arcs de loxodromie sur une sphère. P. Ruex. Mathesis I, 29.

Vergl. Geodäsie.

### Spiralen.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 18, 19.

## T.

### Taylor's Reihe.

257. Démonstration élémentaire du théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire. Mansion. Mathesis I, 3.

### Tetraeder.

258. Propriétés du tétraèdre dont les faces sont équivalentes. N. ann. math. XL, 515.
259. Sur l'expression du volume de certains tétraèdres. Faure. N. ann. math. XL, 338.

### Thetafunctionen.

260. Sur la transformation des fonctions $\Theta$. David. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 187.

### Trigonometrie.

261. Zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. J. Lange. Grun. Archiv LXVI, 220.
262. Résoudre un triangle rectangle connaissant les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles dans lesquels le triangle cherché est décomposé par la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse. A Lambert. Mathesis I, 131.

Vergl. Astronomie 30, 31. Planimetrie 125.

## U.

### Unbestimmte Integration.

263. Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies. Resal. N. ann. math. XL, 529.

## V.

### Variationsrechnung.

264. Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung. Ehrhorn. Grun. Archiv LXVI, 113.
265. Ueber die Variationen $n^{ter}$ Ordnung. G. Erdmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 73. [Vergl. Bd. XXIV, Nr. 202.]

## W.

### Wärmelehre.

266. Sur le pulsomètre de Hall. De Maupeou. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 267.

Vergl. Mechanik 186.

**Wahrscheinlichkeitsrechnung.**

267. Sur un principe de calcul des probabilités. Bienaymé. Mathesis I, 10.
268. Wahrscheinlichkeit, mit $n$ Würfeln $k$ Augen zu werfen. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 127.
269. Zur mathematischen Statistik. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 297.

**Z.**

**Zahlentheorie.**

270. Sur la théorie des nombres complexes. Zolotareff. Journ. mathém. Sér. 3, VI, 51, 129.
271. Abkürzung des dritten Gauss'schen Reciprocitätsbeweises. A. Voigt. Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 134.
272. Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Product der ersten $n$ Primzahlen prim und kleiner als dasselbe sind. Walla. Grun. Archiv LXVI, 353.
273. Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren. Harmuth. Grun. Archiv LXVI, 286.
274. Ueber magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen. Harmuth. Grun. Archiv LXVI, 413.
275. Théorème de Farey. Pullich. Mathesis I, 161.
276. Théorie des fractions périodiques. Mansion. Mathesis I, 103.
277. Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger. Cesaro. Mathesis I, 99.
278. Solution de différentes questions d'analyse indéterminée proposées par M. Ed. Lucas. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 150, 201, 253.
279. Exercices de calcul algébrique. Realis. N. ann. math. XL, 501.
280. Zum Beweise des Satzes, dass jede Primzahl $p = 4n + 1$ Summe zweier Quadrate ist. Harmuth. Grun. Archiv LXVI, 327.
281. Toute puissance entière de 3 est une somme de trois carrés premiers avec 3. Neuberg. Mathesis I, 73. — Realis ibid. 75. — Catalan ibid. 87.
282. Sur les carrés égaux à la somme de plusieurs carrés et décomposition d'une somme de $n$ carrés en une somme de $n$ ou de $(n+1)$ autres carrés. Dostor. Mathesis I, 156.
283. Sur les carrés des nombres entiers. Neuberg. Mathesis I, 88.
284. Sur quelques équations indéterminées du second degré. Rocchetti. N. ann. math. XL, 425.
285. Trouver, par des formules directes, une infinité de valeurs entières de $x, y, z$, telles que l'expression $2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$ se réduise à un carré pair, assigné d'avance. Rochetti. Mathesis I, 165. — Neuberg ibid. 165.
286. Des solutions entières et positives de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$. Pisani. N. ann. math. XL, 372.
287. Une pile de boulets à base carrée ou a base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 330.
288. Sur quelques équations indéterminées du troisième degré. Desboves. N. ann. math. XL, 173.
289. Sur une somme de cubes. Realis. Mathesis I, 176.
290. Un nombre $p$, qui est la somme de $n$ cubes entiers, étant donné, assigner un nombre $q$ tel que le produit $p^2 q$ soit la somme algébrique de $n$ cubes entiers. Realis. N. ann. math. XL, 177.
291. Décomposition des nombres $f^{12} - 9g^{12}$ et du double de ces nombres en deux cubes rationnels. C. Henry. N. ann. math. XL, 418.
292. Ueber die Gleichung $x^y = y^x$. Luxenberg. Grun. Archiv LXVI, 332.
293. Trouver un nombre positif ayant la double propriété d'être égal au produit de trois entiers consécutifs et à celui de deux entiers consécutifs. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 431.
294. Trouver un nombre positif ayant la triple propriété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de deux entiers consécutifs, le plus petit des facteurs de cette moitié étant lui même égal au produit de deux entiers consécutifs. Moret-Blanc. N. ann. math. XL, 375.

Vergl. Division. Geschichte der Mathematik 95, 97, 100. Quadratische Formen.

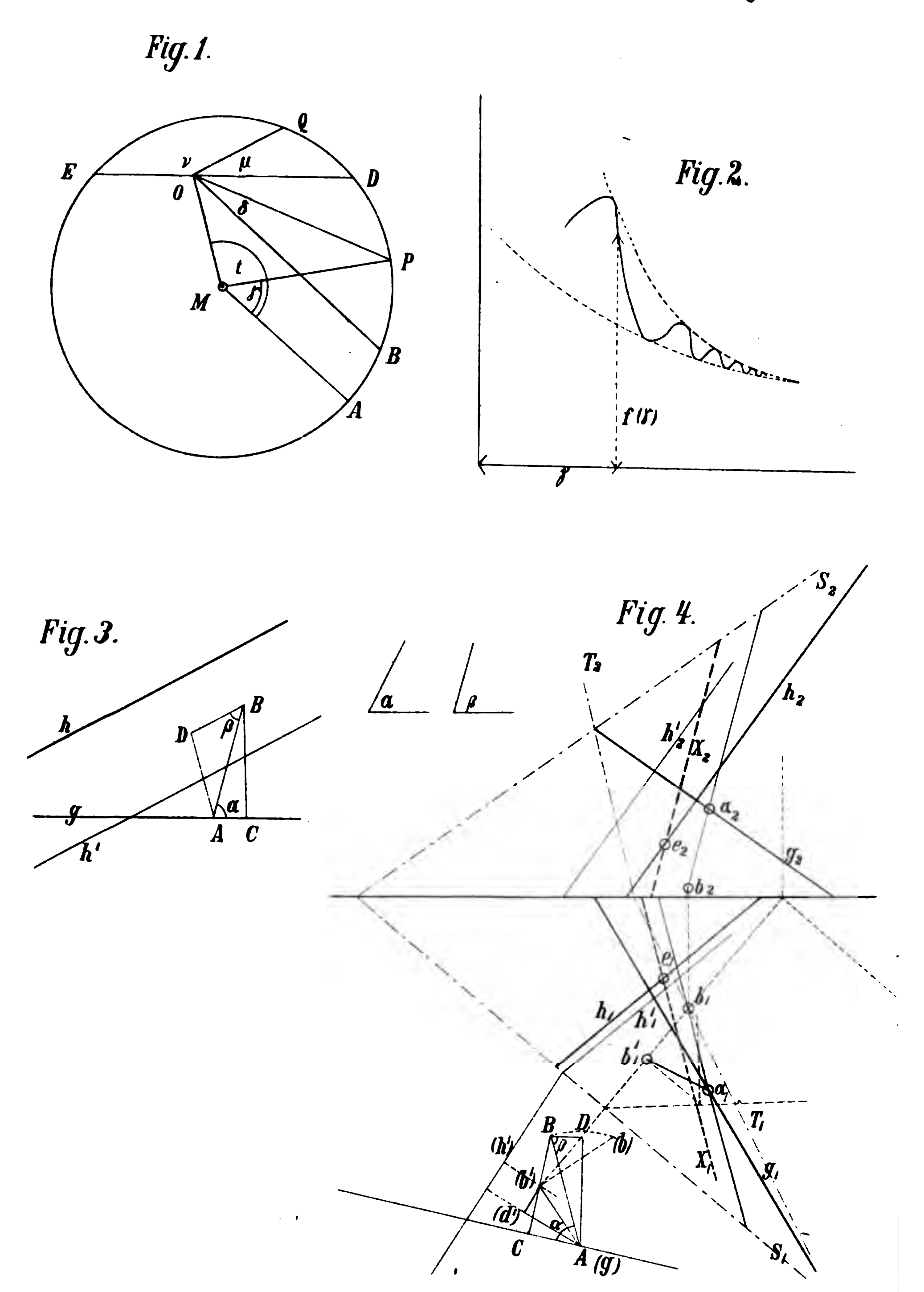


Fig. 1.
Q
E
ν
μ
D
O
δ
P
t
M
γ
B
A
Fig. 2.
f(γ)
γ
Fig. 3.
h
B
D
β
g
α
A
C
h'
α
β
Fig. 4.
S₂
T₂
h₂
h'₂
X₂
a₂
e₂
g₂
b₂
e₁
b₁
h₁
h'₁
b'₁
a₁
T₁
B
D
(h')
β
(b)
(b')
X₁
g₁
(d')
α
C
A (g)
S₁

# Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1882.

**Klein, Felix,** o. ö. Professor der Geometrie an der Universität Leipzig, **über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale.** Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. [VIII und 82 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. 40.

**Koehler, Dr. Carl, über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen.** [32 S.] gr. 8. geh. ℳ 1. —

**Krazer, Dr. Adolf, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel.** [VII und 66 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 3. 60.

**Milinowski, A.,** Oberlehrer am Gymnasium zu Weißenburg i. Elsaß, **elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte.** Mit Figuren im Text. [XII und 412 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8. 80.

**Netto, Dr. Eugen,** a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Straßburg i. E., **Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra.** [VIII und 290 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6. 80.

**Pasch, Dr. Moritz,** Professor an der Universität zu Gießen, **Vorlesungen über neuere Geometrie.** [IV und 201 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 4. —

**Prym, Dr. Friedrich,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, **Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel** und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. [VIII und 112 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 6. —

**Reidt, Prof. Dr. F.,** Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule in Hamm, **die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben.** [VII und 50 S.] gr. 8. kart. ℳ 1. 20.

**Salmon, George, analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilh. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweite verbesserte Auflage. gr. 8. [XVI und 508 S.] geh. n. ℳ 11. 20.

**Schlömilch, Dr. O.,** Geh. Schulrat, **Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis.** Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Dritte Auflage. [VII und 384 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 7. 60.

**Wüllner, Dr. Adolph,** Professor der Physik an der Kgl. techn. Hochschule zu Aachen, **Lehrbuch der Experimentalphysik.** Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII und 849 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 10. —

Die folgenden Bände des gegenwärtig den ersten Rang einnehmenden ausführlichen Lehrbuchs der Physik werden vorerst noch nicht in neuer Auflage erscheinen. Für die Abnehmer sämtlicher 4 Bände ist daher ein neues Gesamtregister gedruckt worden, welches sich über die 4. Auflage des *I. Bandes* und die 3. Auflage des II., III. und IV. Bandes erstreckt. Dasselbe wird den Käufern des vollständigen Werkes gratis geliefert.

**Zeuthen, H. G., Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre.** [VI und 97 S.] gr. 8. geh. ℳ 2. —

# INHALT.


Seite

IX. Die Fourier'sche Reihe. Von W. Veltmann (Taf. III Fig. 1 u. 2) . . . 193
X. Perspectivische Studien. Von Prof. Dr. Guido Hauck in Berlin . . . 236

## Kleinere Mittheilungen.

XIV. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hilfe von Involutionen auf Kegelschnitten. Von Ludwig Kotányi, Stud. phil. in Wien . . . . 248
XV. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwinkligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet. Von M. Petzold in Hannover (Taf. III Fig. 3 u. 4) . . . . . . . . . . 252
Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft . . . . . . 253

## Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme. Von Dr. Heinrich Suter 121
Berichtigung zu S. 65 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125

Recensionen:

Van der Waals, Prof., Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustands, übersetzt a. d. Holländ. v. Dr. Roth. Von P. Zech 126
Mousson, Prof. Dr. Alb., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Von P. Zech . . . . . . . . . . . . . . . . 127
Verdet, E., Vorlesungen üb. d. Wellentheorie d. Lichtes. Von P. Zech 128
Jürgenssen, E., Ueber eine Art Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche. Von P. Zech . . . . . . . . . . . 128
Walberer, Prof. Dr., Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. Von P. Zech . . . . . . . . . . . . . . . . 128
Lüroth, Prof. Dr., Grundriss der Mechanik. Von P. Zech . . . 128
Undeutsch, Prof. H., Einführung in die Mechanik. Von P. Zech . 129
Planck, Dr. Max, Ueber Gleichgewichtszustände isotroper Körper in verschiedenen Temperaturen. Von P. Zech . . . . 129
Klein, Dr. Benno, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Von M. Noether . . . . . . . . . . 130
Lie, Sophus, Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Von M. Noether . 130
Helmling, P., Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx}+y^2=X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. Von M. Noether . . . . . . . 131
Arnold, Y de, Trisectio angulorum. Von E. Ullrich . . . . 131
Beyda, H. F. T., Die imaginären Grössen u. ihre Auflösung. Von Cantor 131
Hegel, Dr. Richard, Differential- und Integralrechnung, Ausgleichungsrechnung, Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung. Von Cantor . . . . . . . . . . . . . . . . 133
Cremona, L., et E. Beltrami, In memoriam Dominici Chelini. Von Cantor 136
Henrici, Prof. J., und Treutlein, Prof. P., Lehrbuch der Elementargeometrie. Von Cantor . . . . . . . . . . . . 139
Götting, Prof. R., Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Von Cantor . . 140
Bremiker, Dr. C., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Von Cantor . . . . . . . . . . 142
Pryde, James, Mathematical Tables. Von Cantor . . . . . . 143
Wittstein, Dr. phil. und Prof. Theodor, Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit. Von Cantor . . . . . . . . . 144

Bibliographie vom 1. Mai bis 30. Juni 1882:

Periodische Schriften . . . . . . . . . . . . . . . . 145
Geschichte der Mathematik und Physik . . . . . . . . 145
Reine Mathematik . . . . . . . . . . . . . . . . . 146
Angewandte Mathematik . . . . . . . . . . . . . . 150
Physik und Meteorologie . . . . . . . . . . . . . 151

Mathematisches Abhandlungsregister. 1881. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni . . . . . . . . . . . . . . . . . [illegible]



Druck von B. G. Teubner in Dresden.



00125/282

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**27. Jahrgang. 5. Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 30. September 1882.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

**Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn**

Universitätsbuchhändler in Kopenhagen.

## Schriften des Docenten Dr. Jul. Petersen.

**Theorie**
der
**algebraischen Gleichungen**
Preis 10 Mark.

**Methoden und Theorien**
zur Auflösung
**geometrischer Constructionsaufgaben**
angewandt auf 400 Aufgaben. Preis 3 Mark 50 Pf.

**Lehrbuch**
der
**elementaren Planimetrie.**
Preis 1 Mark 60 Pf.

**Lehrbuch**
der
**Statik fester Körper.**
Preis 3 Mark 60 Pf.

**Vorräthig in allen Buchhandlungen.**

---

**Neuer Verlag von J. C. B. Mohr in Freiburg i/B.**

**Reiff, R.** Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik von Dr. Richard Reiff, Repetent am mathematischen Seminar der Universität Tübingen. 8. ℳ 1. 20.

---

## Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
## 1882.

Soeben sind erschienen:

**Henrici, J.**, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und **P. Treutlein**, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, **Lehrbuch der Elementargeometrie.** Zweiter Teil. Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Größen. Pensum der Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. 80.

**Holzmüller, Dr. Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbe[illegible]agen, **Einführung in die Theorie der isogonalen Verw**[illegible] und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendung[illegible]ematische Physik. Mit 26 lithogr. Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. [illegible]1. 20.

**Pasch, Dr. Moritz**, Professor an der Universität zu Gie[illegible]tung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VIII u. 18[illegible]ren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 3. 20.

## XI.

# Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen.

Von

Dr. A. Weiler

in Hottingen.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—20.

### Einleitung.

Eine lineare Congruenz besteht aus allen Strahlen, welche zwei feste Geraden, die Directricen, gleichzeitig schneiden. Wenn die Directricen in allgemeiner Lage sind, so ist die Congruenz eine allgemeine. Schneiden sich die Directricen, so entsteht eine zerfallende Congruenz. Ihre Bestandtheile sind ein Bündel und ein Strahlfeld. Sind die Directricen zwei (sich nicht schneidende) unendlich nahe Raumgeraden, so ist die Congruenz eine specielle. Dieselbe kann auch in folgender Weise definirt werden: Die Ebenen durch eine Gerade (Directrix) werden den Punkten auf derselben projectivisch zugeordnet. Die Strahlbüschel aus jenen Punkten in den ihnen entsprechenden Ebenen bilden die Congruenz.

### Complexe ersten Grades.

Ein linearer Complex hat bekanntlich die Eigenschaft, dass alle seine Geraden, welche eine bestimmte Raumgerade treffen, noch eine zweite (conjugirte) Gerade schneiden. Die Congruenz, deren Directricen jene Gerade und deren conjugirte sind, gehört ganz dem Complex an. Die Conjugirte einer Complexgeraden liegt der letzteren unendlich nahe.

Der lineare Complex enthält $\infty^4$ lineare Congruenzen. Beschreibt eine Directrix einen Büschel $A$A (vom Scheitel $A$ in der durch $A$ gehenden Ebene A), so beschreibt die andere einen Büschel $B$B und es sind die Strahlen beider Büschel in projectivischer Zuordnung. Im Büschel $A$A kommt ein Complexstrahl vor und da seine conjugirte Linie mit ihm zusammenfällt, so folgt: Die Scheitel $A$, $B$ der beiden Büschel liegen in der Schnittlinie ihrer Ebenen A, B und $AB$ = AB entspricht sich selbst. — Hiernach lässt sich der lineare Complex erzeugen aus $\infty^1$

linearen Congruenzen, deren Directricen zwei projectivische Büschel bilden, welche einen gemeinsamen und selbstentsprechenden Strahl haben. (Sylvester'sche Erzeugungsweise.)* Für den nämlichen Complex ist dies auf $\infty^5$ Arten ausführbar.

Indem man beim allgemeinen linearen Complex ausgeht von einem Büschel von Complexstrahlen, erhält man weiter folgende Erzeugung des Complexes: Er wird gebildet durch $\infty^1$ specielle Congruenzen, deren Directricen $d_1$, $d_2$, ... ein Büschel $A$A bilden. Dem Punkte $A$ entspricht stets die Ebene A. Der Complex ist bestimmt durch zwei der speciellen Congruenzen. Für den nämlichen Complex ist diese Erzeugung auf $\infty^3$ Arten möglich.

Für den speciellen linearen Complex gelten jene Erzeugungen aus linearen Congruenzen noch. Wenn für die projectivischen Strahlbüschel $A$A, $B$B die Scheitel in der Linie AB zusammenfallen und AB sich selbst entspricht, so zerfallen die entstehenden Congruenzen und der Complex wird speciell. — An Stelle dessen lasse man A mit B zusammenfallen und $A$ von $B$ verschieden sein, so bilden die Directricenpaare zwei perspectivische Büschel in einerlei Ebene.

Andere Erzeugungen des linearen Complexes aus Congruenzen ergeben sich als Specialfälle bei Behandlung der Complexe zweiten Grades. Bringt man die Strahlen der einen Regelschaar einer Fläche zweiten Grades in involutorische Zuordnung, so ergiebt jedes Strahlenpaar eine Congruenz des Complexes.** Ist die Involution parabolisch, so entsteht der specielle Complex.

## Complexe zweiten Grades.

Es giebt im Ganzen 58 Complexe zweiten Grades.*** Von ihnen zerfallen 8 und von den übrigen 49 eigentlichen Complexen lassen sich 38 aus linearen Congruenzen erzeugen.

Wenn nämlich ein Complex zweiten Grades aus linearen Congruenzen besteht, so bilden die Directricen eine (irreducible oder zerfallende) Regelfläche, die nothwendig zur Singularitätenfläche gehört. Denn für die Punkte und Ebenen dieser Directricen zerfallen die Complex-Kegel und Kegelschnitte. Also müssen die Singularitätenflächen der hier zu untersuchenden Complexe Linienflächen sein.

Wenn man umgekehrt weiss, dass für einen Complex zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Linienfläche ist, so kann man daraus schliessen, dass dieser Complex aus linearen Congruenzen besteht. — Sei

* Comptes rendus 1861, t. 52. — Im Uebrigen vergl. Plücker, „On a new Geometry of space", Trans. of the Camb. Phil. Soc., Vol. XI, Part. I, 7 (1865).

** Vergl. Chasles, Liouville's Journal 1839, t. IV pag. 348.

*** Vergl. meine Dissertation: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Math. Annalen Bd. VII S. 145.

nämlich $e$ eine Erzeugende der Linienfläche, jedoch nicht gleichzeitig Complexstrahl. Dann zerfällt in jeder Ebene A durch $e$ (Tangentialebene der Singularitätenfläche) der Complexkegelschnitt in zwei Büschel, deren Scheitel $S_1$, $S_2$ nie auf $e$ fallen. Ebenso bilden die durch einen Punkt $A$ auf $e$ gehenden Complexstrahlen zwei Büschel, deren Ebenen $E_1$, $E_2$ nie durch $e$ gehen. — Dreht man A um $e$, so bilden die Punkte $S_1$, $S_2$ einen Ort zweiter Ordnung, welcher, mit jedem Punkte von $e$ verbunden, zwei Büschel liefern muss. Das ist nur dann möglich, wenn dieser Ort aus zwei Geraden besteht (die mit $e$ zwei lineare Congruenzen des Complexes ergeben). — Ist $e$ ein Complexstrahl, so muss, wie eine dem Vorigen entsprechende Betrachtung lehrt, der Ort der Punkte $S_1 S_2$ bestehen aus $e$ und einer weiteren Geraden. In $e$ vereinigen sich somit zwei zusammengehörige Directricen. Ihre Congruenz ist speciell und besteht aus allen Tangenten der Fläche an $e$. (Die Anwendung des Satzes von der Erzeugenden der Singularitätenfläche, welche Complexstrahl ist, und der Umkehrung dieses Satzes ist dann nicht immer giltig, wenn $e$ auf einer Fläche zweiten Grades liegt, von der die andere Schaar von Erzeugenden aus Directricen besteht.) — Ist endlich die (zur Schaar der Directricen gehörende) Gerade $e$ Doppelgerade des Complexes, so fallen beide zugehörenden Directricen mit $e$ zusammen (und es ist $e$ ein Doppelstrahl, resp. eine Rückkehrgerade der gesammten Singularitätenfläche).

Mit Hilfe der eben bewiesenen Sätze erkennt man, dass alle die 38 Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenflächen Regelflächen sind, aus linearen Congruenzen bestehen. Die Erzeugenden der Regelfläche sind die Directricen (bei Flächen zweiten Grades im Allgemeinen nur die der einen Schaar, die der andern Schaar sind dann stets doppelte Complexgeraden, welche allen Congruenzen angehören.)

Nachdem man nun die Gleichungen der verschiedenen Gattungen der Complexe kennt, sowie die zugehörigen Singularitätenflächen, so besteht eine sichere und einfache Methode zur Bestimmung der Zusammengehörigkeit der Erzeugenden zu Directricen in Folgendem: Man drückt die Lage zweier Punkte $P$, $Q$ der Singularitätenfläche aus durch Parameter $\alpha, \beta$; $\gamma, \delta$, berechnet die Coordinaten von $PQ$, setzt in die Gleichung des Complexes ein und erhält die Bedingung dafür, dass $PQ$ Complexgerade ist. Seien $\alpha$, $\gamma$ die Parameter der Erzeugenden, auf welchen $P$ und $Q$ liegen, so müssen die Coefficienten der Glieder mit $\beta$, $\delta$ einen gemeinsamen Factor haben, der nur $\alpha$, $\gamma$ enthält. Setzt man ihn gleich Null, so hat man die Beziehung zwischen den Parametern der Erzeugenden, welche Directricenpaare sind.*

* Die hier gegebene Methode ist verschieden von der von Herrn Fiedler angedeuteten. Vergl. Geometrische Mittheilungen, Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft, Zürich, 1879, Bd. XXIV S. 186.

Für die folgende Untersuchung halte ich mich an die in meiner Dissertation angenommenen Bezeichnungen. Die zu den Elementartheilern gehörenden Wurzeln $\lambda$ oder lineare Functionen derselben sind durch die Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$ ersetzt. — Bei jedem Complex sind der Vollständigkeit wegen die Gleichungen, welche ihn und seine singulären Linien bestimmen, vorangestellt. Darauf folgt die Gleichung der Singularitätenfläche.

Der Behandlung der einzelnen Fälle mag noch die Bemerkung vorangeschickt werden, dass in vielen Fällen die gegebene Erzeugung sich so verallgemeinern lässt, dass Complexe höheren Grades entstehen.

**Complex [(11)1111], Nr. 1** (der Dissertation).

1) $\Omega = a(p_{13}^2 + p_{42}^2) + 2b p_{13} p_{42} + c(p_{14}^2 + p_{23}^2) + 2d p_{14} p_{23} = 0,$

2) $\Omega' = ab(p_{13}^2 + p_{42}^2) + (a^2 + b^2) p_{13} p_{42} + cd(p_{14}^2 + p_{23}^2) + (c^2 + d^2) p_{14} p_{23} = 0,$

3) $$a(d^2 - c^2)(y_1^2 y_3^2 + y_4^2 y_2^2) + c(b^2 - a^2)(y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2) + 2\{b(d^2 - c^2) - d(b^2 - a^2)\} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist die XI. Gattung von Cremona's Linienflächen vierten Grades. — Wir gelangen in diesem Falle durch eine einfache geometrische Betrachtung zum Ziele (Fig. 1).

Es sei $e$ eine Erzeugende der Fläche $F$, $P$ ein Punkt auf $e$ und P die zu $P$ gehörende Tangentialebene von $F$. Die Ebene P schneidet $F$ in $e$ und einer Curve dritter Ordnung $C_3$ ohne Doppelpunkt, welche durch $P$ geht und $e$ in den Punkten $A$, $B$ trifft, in denen $e$ die beiden Doppelgeraden von $F$ schneidet. In dieser singulären Ebene P des Complexes löst sich die Complexcurve auf in zwei Büschel, deren Scheitel $M$, $N$ auf $C_3$ liegen und deren Verbindungslinie als singuläre Linie des Complexes durch den zugehörigen singulären Punkt $P$ geht.*

Wäre $e$ eine von den vier Erzeugenden von $F$, welche zugleich Complexgeraden sind (Diss. S. 157), so würde $e$ die Directrix einer speciellen Congruenz sein (s. die Einleitung dieses Aufsatzes). Infolge dessen würde der Büschel $P$P dem Complexe angehören, also einer von den Punkten $M$, $N$ nach $P$ rücken und $MN$ wäre die in $P$ an $C_3$ mögliche Tangente.

In jedem der beiden Fälle zerfällt die Congruenz zweiten Grades der $e$ schneidenden Complexgeraden in zwei lineare, deren zweite Directricen die durch $M$ und $N$ gehenden Erzeugenden von $F$ sind.

Trifft irgend eine Erzeugende $d$ auf $F$ die $C_3$ in $D$, so ziehe $DM$, $DN$, welche $C_3$ noch in $D'$, $D''$ schneiden. Durch $D'$, $D''$ gehen auf $F$ noch die Erzeugenden $d'$, $d''$ und es gehören die Congruenzen $dd'$, $dd''$ dem Complex an.

* Vergl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Nr. 320. — Die singulären Linien in P sind $MN$ doppelt gezählt und die Tangenten an $C_3$ in $M$ und $N$.

Erzeugung des Complexes [(11)1111]. Auf einer allgemeinen Linienfläche vierten Grades $F$ mit zwei Doppelgeraden, Cremona XI,* wähle man eine beliebige Erzeugende $e$, auf dieser einen Punkt $P$. Die in $P$ an $F$ gelegte Tangentialebene P schneide $F$ nebst in $e$ noch in der Curve dritter Ordnung $C_3$, auf welcher man wiederum einen Punkt $M$ willkürlich wählt. Die Strahlen des Büschels $M$P schneiden $C_3$ in Punktepaaren $DD'$, $D_1D'_1$ etc. und die durch diese Paare gelegten Paare $dd'$, $d_1d'_1$ etc. von Erzeugenden von $F$ sind die Directricen von $\infty^1$ Congruenzen, deren Gesammtheit der Complex ist. — Dieser Complex lässt sich auf zwei verschiedene Arten in genannter Weise erzeugen, resp. in zwei getrennte Schaaren von je $\infty^1$ Congruenzen zerlegen.

Führt man bei der gegebenen Erzeugung an Stelle des Punktes $M$ die beiden Punkte $M$, $N$ (deren Verbindungslinie durch $P$ geht) ein und benutzt man beide gleichzeitig, so entsteht der Complex doppelt. Die aus $M$ und $N$ an $C_3$ gezogenen Tangenten liefern die vier speciellen Congruenzen des Complexes. Ihre Directricen gehen durch die Berührungspunkte jener Tangenten und sind die vier einzigen Erzeugenden von $F$, welche zugleich Complexgerade sind.

Die gegebene Erzeugung des Complexes gilt auch dann noch, wenn $M$ auf $C_3$ mit $P$ coincidirt.

Hat man durch gleichzeitige Benutzung der Punkte $M$, $N$ zu jeder Directrix $d$ (auf $F$) die beiden zugehörigen $d'$, $d''$ bestimmt, so erhält man die singulären Linien des Complexes als die Gesammtheit von $\infty^1$ Regelschaaren, welche je $d$, $d'$, $d''$ gleichzeitig schneiden. Alle enthalten die beiden Doppelgeraden von $F$. Wenn somit die Doppelgeraden $x$, $y$ von $F$ und eine singuläre Linie $s$ bekannt sind, so lassen sich sofort $\infty^1$ singuläre Linien, nämlich die Erzeugung $x$, $y$, $s$ eines Hyperboloids linear construiren.**

**Complex [(111)111], Nr. 2.**

1) $$\Omega = -a(p_{13}-p_{42})^2 + b(p_{14}+p_{23})^2 - c(p_{14}-p_{23})^2 = 0,$$
2) $$\Omega' = -a^2(p_{13}-p_{42})^2 + b^2(p_{14}+p_{23})^2 - c^2(p_{14}-p_{23})^2 = 0,$$
3) $$(y_1y_3 - y_4y_2)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist vom zweiten Grade, doppelt zählend. Sie enthält das Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ des Coordinatentetraeders. Die eine

* Vergl. die Abhandlung des Herrn Cremona: „Sulle superficie gobbe di quarto grado", Memoria dell'Accademia delle scienze, t. VIII (serie 2ª).

** Ist $F$ gegeben, so kann man leicht alle Complexe zweiten Grades construiren, welche $F$ zur Singularitätenfläche haben. Man wähle nämlich $P$ als festen Punkt und lasse die singuläre Linie $MN$ den Büschel $P$P durchlaufen.

Erzeugung $\frac{y_1}{y_4}=\frac{y_2}{y_3}=\beta$ besteht aus doppelten Complexgeraden. Die andere Regelschaar ist $\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_3}{y_4}=\alpha$. — Der Schnittpunkt $P$ dieser beiden Strahlen $\beta$, $\alpha$ hat die Coordinaten $y_1:y_2:y_3:y_4=\beta:\alpha\beta:\alpha:1$. Ein weiterer Punkt $Q$ der Fläche sei $\delta:\gamma\delta:\gamma:1$. Für $PQ$ als Complexstrahl ergiebt sich aus 1)

$$4)\qquad (b-c)\alpha^2\gamma^2-a(\alpha+\gamma)^2+2(b+c)\alpha\gamma+(b-c)=0.$$

Die Zuordnung der Strahlen $\alpha$, $\gamma$ zu Directricenpaaren ist eine [2, 2]-deutige. Zerfallende Congruenzen treten nicht auf, dagegen giebt es vier specielle. Man erhält sie, indem man in 4) $\alpha=\gamma$ setzt.

Setzt man die Coordinaten von $PQ$ in 2) ein oder ersetzt man in 4) $a$, $b$, $c$ durch deren Quadrate, so erhält man eine Gleichung, welche mit 4) die singulären Linien ergiebt. Man erfährt so, dass die singulären Complexstrahlen vier von den linearen Congruenzen ausmachen.

Indem man weiterhin noch den Complexkegelschnitt in einer beliebigen Ebene des Raumes einführt, hat man:

Erzeugung des Complexes [(111)111]. Man wählt eine Fläche zweiten Grades $F$ und einen Kegelschnitt $C$ in allgemeiner Lage (Fig. 2). Mit $C$ liege der Kegelschnitt $K$ von $F$ in einerlei Ebene. Die Tangenten von $C$ schneiden $K$ in Punkten, die sich entsprechende genannt werden sollen. Irgend einem Punkte $D$ auf $K$ entsprechen dann die zweiten Schnittpunkte $D'$, $D''$ der von $D$ an $C$ gezogenen Tangenten mit $K$. Durch die entsprechenden Punkte $DD'$, resp. $DD''$ gehen die Directricenpaare $dd'$, $dd''$ der linearen Congruenzen und gehören sämmtlich derselben Regelschaar von $F$ an.

Wenn bei dieser Erzeugung die an $C$ gezogene Tangente auch $K$ berührt, so entsteht je eine specielle Congruenz.

Geht $d$ (Fig. 2) durch einen der Schnittpunkte $Q$, $R$, $S$, $T$ von $C$ und $K$, so fallen jedesmal $d'$ und $d''$ zusammen. Für einen Punkt auf $d$ erhält man einen Büschel von Complexgeraden, welcher nach der vereinigten Linie $d'd''$ geht. Der Büschel ist aufzufassen als zwei unendlich benachbarte Büschel von Complexstrahlen. Jeder Strahl kann als der gemeinsame beider Büschel gelten, d. h. als der zugehörige singuläre Complexstrahl.* Diese Büschel und somit jene vier Congruenzen bestehen aus singulären Linien. Damit sind die singulären Linien aus der gegebenen Erzeugung hergeleitet und es ist einleuchtend, dass jene Erzeugung von $F$, welche aus (doppelten) Complexgeraden besteht, bei den singulären Linien vierfach zu zählen ist. Denn ihre Strahlen gehören den vier linearen Congruenzen singulärer Linien zugleich an.

* Plücker, a. a. O. Nr. 311.

**Complex [(11)(11)11], Nr. 8.***

1) $\Omega = 4a\, p_{13} p_{42} + b\,(p_{14} + p_{23})^2 - c\,(p_{14} - p_{23})^2 = 0,$

2) $\Omega' = 4a^2 p_{13} p_{42} + b^2 (p_{14} + p_{23})^2 - c^2 (p_{14} - p_{23})^2 = 0,$

3) $(dy_1 y_4 + y_2 y_3)(y_1 y_4 + dy_2 y_3) = 0.$

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades $F_1$, $F_2$, welche ein windschiefes Vierseit gemein haben. $P$ auf $F_1$ und $Q$ auf $F_2$ seien $1:\beta:-\delta\alpha:\alpha\beta$, $-d\delta:1:\gamma\delta:\gamma$. Hierbei sind $\alpha$, $\gamma$ die Parameter der Erzeugenden auf $F_1$, $F_2$, welche durch $P$ und $Q$ gehen und zu der Schaar $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ gehören, $\beta$ und $\delta$ aber die Parameter der Strahlen der anderen Erzeugungen.

Der Schnittpunkt $R$ des Strahles $\delta$ mit $A_3 A_4$ hat die Coordinaten $0:0:\delta:1$ und $PR$ ist Complexstrahl, wenn

4) $\beta^2 \delta^2 (b-c) + 2\beta\delta(b+c-2a) + (b-c) = 0.$

Bildet man die Bedingung für $PQ$, wobei $Q$ auf einer $\beta$ nach 4) zugeordneten Erzeugenden $\delta$ liegen soll, so bleibt

5) $\beta^2 \delta^2\, d(b+c) + 2\beta\delta \{d^2 a + d(b-c) + a\} + d(b+c) = 0.$

Diese Bedingung 5) stimmt mit 4) überein, wenn

$$d^2 - 2d\,\frac{2bc - a(b+c)}{a(b-c)} + 1 = 0$$

oder, nach der Bezeichnung in der Dissertation (S. 161; $\lambda_3 = a$, $\lambda_5 = b$, $\lambda_6 = c$), $d^2 - 2d.C + 1 = 0$, welche Gleichung aber erfüllt sein muss. Somit gehört $PQ$ dem Complex an, wenn

6) $$\beta\delta = \frac{2a-b-c}{b-c} + \sqrt{\left(\frac{2a-b-c}{b-c}\right)^2 - 1}.$$

Zwischen $\alpha$ und $\gamma$ lässt sich eine analoge Beziehung herleiten. — Die durch $P$ auf $F_1$ gehenden Complexstrahlen bilden zwei Büschel, deren Ebenen $F_2$ in vier Erzeugenden schneiden. Bewegt sich $P$ auf $\beta$, so drehen jene Ebenen um die aus 6) bestimmten Strahlen $\delta$. Bewegt sich $P$ auf dem Strahl $\alpha$, so drehen jene Ebenen um zwei Strahlen $\gamma$.

Erzeugung des Complexes [(11)(11)11]. Von zwei Flächen zweiten Grades $F_1$, $F_2$, welche ein windschiefes Vierseit $s_1 s_2 s_3 s_4$ gemein haben, bringe man die Strahlen zweier Erzeugungen, welche dieselben Gegenseiten ($s_1 s_3$ oder $s_2 s_4$) des Vierseits schneiden, in projectivische Zuordnung, so dass die gemeinsamen unter ihnen sich selbst entsprechen. Die so entstehenden Strahlenpaare sind die Directricen der Congruenzen. — Diese Construction ist für denselben Complex auf vier Arten möglich.

---

* Die Herleitung der Erzeugung durch rein geometrische Betrachtung analog [(11)1111] ist auch hier noch möglich. Dasselbe gilt für mehrere spätere Fälle.

Für die singulären Linien vergl. [(11)1111]. Man erkennt, dass hier die von ihnen gebildete Congruenz in zwei zerfällt, von denen jede aus $\infty^1$ Regelschaaren besteht.

**Complex [(111)(11)1], Nr. 4.**

1) $$\Omega = -a(p_{13}-p_{42})^2 + a(p_{14}+p_{23})^2 - c(p_{14}-p_{23})^2 = 0,$$
2) $$\Omega' = -a^2(p_{14}-p_{42})^2 + a^2(p_{14}+p_{23})^2 - c^2(p_{14}-p_{23})^2 = 0,$$
3) $$(y_1 y_3 - y_4 y_2)^2 = 0.$$

Im Vergleich zu [(111)111] wird $b = a$. Die Singularitätenfläche bleibt dieselbe, ebenso die Darstellung der Coordinaten von $P$ und $Q$ durch $\alpha\beta\gamma\delta$. $PQ$ ist Complexstrahl, wenn

4) $$\alpha\gamma + \sqrt{\frac{a}{a-c}}(\alpha-\gamma) - 1 = 0.$$

Für die speciellen Congruenzen und für die singulären Linien hat man $\alpha = \gamma = \pm 1$.

Erzeugung des Complexes [(111)(11)1]. Auf einer Fläche zweiten Grades $F$ bringe man die Erzeugenden der einen Schaar so in projectivische Zuordnung*, dass die selbstentsprechenden Erzeugenden verschieden sind. Entsprechende Strahlen sind die Directricen der linearen Congruenzen.

Bei [(111)111] (Fig. 2) lasse man $C$ und $K$ sich doppelt berühren. — Ist alsdann insbesondere $F$ eine Rotationsfläche, $K$ einer ihrer Kreise, $C$ ein mit $K$ concentrischer Kreis, so lässt sich der Complex erzeugen durch Rotation einer Congruenz um die Axe eines durch die Directricen gehenden Rotationshyperboloids.

**Complex [(11)(11)(11)], Nr. 5.**

1) $$\Omega = a\, p_{12}p_{34} + b\, p_{13}p_{42} + c\, p_{14}p_{23} = 0,$$
2) $$\Omega' = a^2 p_{12}p_{34} + b^2 p_{13}p_{42} + c^2 p_{14}p_{23} = 0,$$
3) $$y_1 y_2 y_3 y_4 = 0, \quad v_1 v_2 v_3 v_4 = 0.$$

Dieser Complex ist der tetraedrale, seine Singularitätenfläche ist das Fundamentaltetraeder. — Die Coordinaten zweier Punkte $P$, $Q$ in $A_1$, $A_3$ seien $0:1:\beta:\alpha$, $\delta:\gamma:0:1$. Alsdann ergiebt sich für $PQ$

4) $$\alpha\gamma = \frac{b-a}{b+c}.$$

Die Büschel $A_1 A_3$ und $A_3 A_1$ von zwei Ecken nach der gegenüberliegenden Kante des Tetraeders sind also projectivisch zu Directricenpaaren geordnet. Dabei entsprechen sich die darunter vorkommenden sich schneidenden übrigen Kanten.

---

* Die involutorische Zuordnung würde einen linearen Complex liefern; s. die Einleitung.

Erzeugung des Complexes [(11)(11)(11)]. Man bilde zwei projectivische Büschel in allgemeiner Lage. Entsprechende Strahlen sind die Directricen linearer Congruenzen des Complexes. — Für denselben Complex ist diese Erzeugung auf sechs Arten möglich.

Die oben angegebenen Büschel $A_1A_3$, $A_3A_1$ erzeugen in $A_2A_4$ zwei vereinigte projectivische Punktreihen. Die Doppelpunkte sind $A_2$ und $A_4$. Diese Reihen können auch in eine Involution übergehen.

In einem metrischen Specialfalle entsteht dieser Complex durch Rotation einer linearen Congruenz um die Binormale der beiden Directricen (welch' letztere für den Fall der Involution sich rechtwinklig kreuzen).

**Complex [(111)(111)], Nr. 6.**

1), 2) $$\Omega = \Omega' = -(p_{13}-p_{42})^2 + 4p_{13}p_{42} = 0,$$

3) $$(y_1y_3 - y_4y_2)^2 = 0.$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnung bei [(111)111] erhält man

4) $$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = 0.$$

Erzeugung des Complexes [(111)(111)]. Jeder Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades $F$ ordnet man die consecutive derselben Schaar zu. Beide sind Directricen einer speciellen Congruenz des Complexes (bestehend aus Tangenten von $F$).

Diese Erzeugung ist auf doppelte Weise möglich, man kann beide Regelschaaren auf $F$ zu Directricen machen.

Ist $F$ eine Rotationsfläche, so entsteht der Complex durch Rotation einer speciellen Congruenz, s. [(111)(11)1].

Dieser Complex [(111)(111)] entsteht, wie [(111)111], Fig. 2, wenn nämlich $C$ mit $K$ zusammenfällt.

**Complex [111(12)], Nr. 8.**

1) $$\Omega = a\,(p_{12}^2+p_{34}^2) + 2b\,p_{12}p_{34} + c\,(p_{13}+p_{42}^2) + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = ab\,(p_{12}^2+p_{34}^2) + (a^2+b^2)\,p_{12}p_{34} + c^2\,(p_{13}+p_{42})^2 = 0,$$

3) $$ac(y_1^4+y_4^4) + (a^2-b^2+2bc)y_1^2y_4^2 + c(a^2-b^2)(y_1y_3-y_4y_2)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist die Regelfläche vierten Grades, Cremona XII, und es kann dieser Fall ganz wie [1111(11)] behandelt werden, nur sind die beiden Doppelgeraden einander unendlich nahe gerückt.

Erzeugung des Complexes [111(12)]. Es seien $P$ und P Berührungspunkt und zugehörige Tangentialebene einer Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona XII. Die Ebene P schneidet $F$ in einer Erzeugenden $e$ und einer Curve dritter Ordnung $C_3$ ohne Doppelpunkt (welche $e$ in $P$ schneidet und

an einer andern Stelle berührt), auf welcher man einen Punkt $M$ willkürlich wählt. Die Strahlen des Büschels $MP$ schneiden $C_3$ in Punktepaaren, durch welche man die Directricenpaare als Erzeugende von $F$ zieht. — Diese Erzeugung ist für den nämlichen Complex auf zwei verschiedene Arten möglich. — Die Congruenz der singulären Linien ist irreducibel und lässt sich zusammensetzen aus $\infty^1$ Regelschaaren, welche sämmtlich zwei consecutive Strahlen gemein haben.

**Complex [11(11)2], Nr. 9.**

1) $$\Omega = a\,(p_{12}^2+p_{34})^2 + 2b\,p_{12}p_{34} + 2c\,p_{13}p_{42} + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = ab\,(p_{12}^2+p_{34}^2) + (a^2+b^2)p_{12}p_{34} + c^2 p_{13}p_{42} = 0,$$

3) $$\{a^2-(b-c)^2\}\,y_1^2y_4^2 - ac^2(y_1^2y_2^2+y_3^2y_4^2) + 2c\,(b^2-a^2-bc)\,y_1y_2y_3y_4 = 0.$$

Die Singularitätenfläche $F$ hat zwei doppelte Leitgeraden $A_1A_3$, $A_2A_4$ ($y_2=y_4=0$, $y_1=y_3=0$) und eine doppelte Erzeugende $A_2A_3$ ($y_1=y_4=0$). Sie ist die allgemeine Cremona V. — Die Ebenen durch $A_2A_3$ schneiden $F$ in Kegelschnitten und enthalten zerfallende Complexkegelschnitte, wobei beide Büschel ihre Scheitel in $A_2A_3$ haben.* ($A_2A_3$, die doppelte Erzeugende von $F$, ist doppelte Complexgerade.)

Erzeugung des Complexes [11(11)2]. Eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona V, habe die doppelten Leitgeraden $a$, $b$, die doppelte Erzeugende $c$ und einen Leitkegelschnitt $K$ (wobei die Ebene von $K$ durch $c$ geht). Auf $K$ construire man eine Involution von Punkten, deren Pol ein Punkt $M$ von $c$ ist. Durch die entsprechenden Punkte zieht man die Erzeugenden von $F$ (Transversalen an $a$, $b$) und erhält so die Directricen der linearen Congruenzen. — Diese Erzeugung ist für den nämlichen Complex auf zwei Arten ausführbar.

**Complex [11(112)], Nr. 10.**

1) $$\Omega = a\,(p_{12}+p_{34})^2 - b\,(p_{12}-p_{34})^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = a^2(p_{12}+p_{34})^2 - b^2(p_{12}-p_{34})^2 = 0,$$

3) $$(y_1y_4)^2 = 0, \quad (v_2v_3)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist eine zerfallende doppelt zählende Fläche zweiten Grades. Die Büschel $p_{12}=p_{14}=p_{34}=0$ oder $A_2A_1$ und $A_3A_4$ bestehen aus doppelten Complexgeraden, die übrigen Büschel $A_2A_4$ und $A_3A_1$ werden die Directricen liefern.

Für $P$ und $Q$ wählen wir die Punkte $1:\beta:\alpha:0$ und $0:\gamma:\delta:1$. Dann erhält man für $PQ$ als Complexstrahl

4) $$a(\alpha+\gamma)^2 - b\,(\alpha-\gamma)^2 + 1 = 0.$$

---

* Die Schnittpunkte der doppelten Erzeugenden mit den doppelten Leitgeraden, mit einem Kegelschnitte der Fläche und die zugehörenden Scheitel des zerfallenen Complexkegelschnittes bilden drei Paare einer Involution. Vergl. auch [1(11)3].

Es sind somit die Strahlen der Büschel $A_2 A_4$, $A_3 A_1$ [2, 2]-deutig zu Directricen geordnet. — Für die singulären Linien hat man nebst 4)

5) $$a^2(\alpha+\gamma)^2-b^2(\alpha-\gamma)^2+1=0.$$

Aus 4) und 5) ergeben sich für $\alpha$, $\gamma$ vier Werthepaare, d. h. die singulären Linien bilden vier Congruenzen.

Die [2, 2]-deutige Zuordnung der Strahlen $\alpha$, $\gamma$ lässt sich durch einen Complexkegelschnitt herstellen.

Erzeugung des Complexes [11(112)]. Durch die Verbindungslinie zweier Punkte $A$, $B$ geben zwei Ebenen A, B (Fig. 3). Letztere schneiden einen Kegelschnitt $K$ in $C$, $D$, $E$, $F$. Irgend eine Tangente $t$ von $K$ treffe A und B (bezüglich $CD$, $EF$) in $T_1$, $T_2$. Alsdann sind stets $AT_1=d_1$ und $BT_2=d_2$ Directricen einer linearen Congruenz des Complexes.

Entsprechend [111(111)] ergeben $AC$, $AD$, $BE$, $BF$ und deren (je vereinigte) entsprechende Strahlen die Directricen der Congruenzen singulärer Linien.

**Complex [1(11)(12)], Nr. 11.**

1) $$\Omega=4a\,p_{12}p_{34}+b\,(p_{13}+p_{42})^2+p_{14}{}^2=0,$$

2) $$\Omega'=4a^2p_{12}p_{34}+b^2(p_{13}+p_{42})^2=0,$$

3) $$(y_1y_3-y_4y_2+cy_1y_4)(y_1y_3-y_4y_2-cy_1y_4)=0,\quad c=\sqrt{\frac{b-a}{ab}}.$$

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades $F_1F_2$, welche sich nach $A_2A_3(p)$ berühren und längs $A_1A_2(q)$ und $A_3A_4(r)$ schneiden. (Specialfall von [11(11)(11)], zwei Gegenseiten des Vierseits der Doppelgeraden coincidiren.) Für $P$ auf $F_1$ und $Q$ auf $F_2$ seien die Coordinaten $1:\beta:\alpha(\beta-c):\alpha$, $1:\delta:\gamma(\delta+c):\gamma$. Dann ergiebt sich

4) $$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{b}\{2b-a+\sqrt{a(a-b)}\},\quad \delta-\beta=-c+\sqrt{c^2-\frac{1}{a}}.$$

Erzeugung des Complexes [1(11)(12)]. Zwei Flächen zweiten Grades $F_1$, $F_2$ berühren sich längs der Geraden $p$ und schneiden sich längs $q$, $r$. Man bringe entweder die Regelschaaren, zu denen $q$, $r$ gehören, so in projectivische Zuordnung, dass $q$ und $r$ sich selbst entsprechen. Oder man bringe die Strahlen der anderen Regelschaaren in projectivisches Entsprechen, so dass für die hierbei in $q$ (oder $r$) entstehenden projectivischen Reihen beide Doppelpunkte in $pq$ ($pr$) zusammenfallen. — Für den nämlichen Complex ist jede der genannten Erzeugungen auf zwei Arten ausführbar. — Bezüglich der singulären Linien s. [11(11)(11)].

**Complex [1(111)2], Nr. 12.**

1) $$\Omega=a\,(p_{12}+p_{34})^2+2b\,p_{14}p_{23}+p_{14}{}^2=0,$$

2) $$\Omega'=a^2(p_{12}+p_{34})^2+bp_{14}(bp_{23}+p_{14})=0,$$

3) $$(y_1 y_2 - y_3 y_4)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche $F$ ist vom zweiten Grade, doppelt zählend. Auf ihr liegen $P(\alpha:\beta:1:\alpha\beta)$, $Q(\gamma:\delta:1:\gamma\delta)$ und $PQ$ ist Complexstrahl, wenn

4) $$\alpha^2\gamma^2 + a(\alpha+\gamma)^2 - 2b\,\alpha\gamma = 0.$$

Die Zuordnung der Erzeugenden $\alpha$, $\gamma$ zu Directricen ist $[2, 2]$-deutig. Für die speciellen Congruenzen ist

$$\alpha = \gamma, \quad \alpha^2\{\alpha^2 + 2(2a-b)\} = 0.$$

Die Congruenz $\alpha = \gamma = 0$ besteht aus allen Tangenten von $F$ längs $A_2 A_3$, sie gehört doppelt zählend dem Complex an. Ausserdem giebt es noch zwei specielle Congruenzen.

Erzeugung des Complexes [1(111)2]. Man wähle eine Fläche zweiten Grades $F$ und einen Kegelschnitt $C$, welcher $F$ berührt. Die Tangenten von $C$ schneiden aus $F$ Punktepaare, durch welche die Directricenpaare gehen. Alle Directricen gehören zur selben Regelschaar von $F$. — Vergl. [111(111)] und Fig. 2.

**Complex [(11)(11)2], Nr. 18.**

1) $$\Omega = 2a\,p_{12}p_{34} + 2b\,p_{13}p_{42} + p_{14}{}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = a^2\,p_{12}p_{34} + b^2\,p_{13}p_{42} = 0,$$

3) $$y_1 y_4\{y_1 y_4 + 2k\,y_2 y_3\} = 0, \quad k = \frac{ab}{b-a}.$$

In Ebenencoordinaten erhält man für die Singularitätenfläche die in 3) vorkommende Fläche zweiten Grades $F$, sowie die Punkte $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ $(A_2, A_3)$. Somit hat man im Ganzen $F$, zwei Punkte auf $F$ und die beiden Tangentialebenen von $F$, welche durch die Verbindungslinie jener Punkte gehen.*

$P$ auf $F$ und $Q$ in $A_4$ seien $\beta:1:\alpha\beta:-2k\alpha$, $1:\delta:\gamma:0$. Dann erhält man aus 1)

4) $$\{\beta\delta(b-a) + a\}.\{(a-b)\gamma + b\alpha\} = 0.$$

Entweder giebt $\beta\delta = \dfrac{a}{a-b}$ die Zuordnung der Directricen und dann erhält man für $\beta = 0$, $\delta = \infty$ die zerfallende Congruenz $A_4 A_2$, $A_2 A_3$, für $\beta = \infty$, $\delta = 0$ eine specielle mit der Directrix $A_1 A_3$. Oder es ist $\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{b}{b-a}$, dann sind die $A_1 A_3$ schneidenden Strahlen in projectivischer Zuordnung u. s. f.

---

* Auf S. 177 der Dissertation ist eine diesbezügliche Berichtigung anzubringen. — Dieser Complex, sowie [(11)(11)(11)], [(11)(13)], [2(22)], [(24)] sind vor Kurzem durch Herrn Archer Hirst behandelt worden. Vergl.: „Note on the complexes generated by two correlative planes.“ Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. X No. 149.

Erzeugung des Complexes [(11)(11)2]. Auf einer Fläche zweiten Grades $F$ wähle man zwei sich schneidende Erzeugende $e_1$, $e_2$ und auf $e_1$ den Punkt $P$ (Fig. 4). Der Strahlbüschel $Pe_2$ wird der Erzeugung auf $F$, welche $e_2$ trifft, projectivisch zugeordnet, so dass $e_1$ sich selbst entspricht. — Für den nämlichen Complex ist diese Erzeugung auf vier Arten möglich.

**Complex [(11)(112)], Nr. 14.**

1) $$\Omega = 2a\, p_{12} p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = p_{12} p_{34} = 0,$$

3) $$(y_1 y_4)^2 = 0, \quad (v_2 v_3)^2 = 0.$$

Mit Beibehaltung der bei [11(112)] eingeführten Bezeichnung erhält man hier die Bedingungsgleichung

4) $$2a\,\alpha\gamma + 1 = 0.$$

Die Büschel sind hier projectivisch, in Fig. 3 fallen $C$ mit $D$ und $E$ mit $F$ zusammen, die Congruenzen singulärer Linien vereinigen sich paarweise in zerfallende.

Erzeugung des Complexes [(11)(112)]. Die Directricenpaare sind entsprechende Strahlen zweier projectivischen Büschel $A$A, $B$B, deren Scheitel $A$, $B$ in der Schnittlinie AB liegen. ($AB$ darf sich nicht selbst entsprechen.)

**Complex [(111)(12)], Nr. 15.**

1) $$\Omega = -c(p_{13} - p_{42})^2 + 4c\, p_{14} p_{23} + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = -c(p_{13} - p_{42})^2 + 4c\, p_{14} p_{23} + 2p_{14}^2 = 0,$$

3) $$(y_1 y_3 - y_4 y_2)^2 = 0.$$

Die Verbindungslinie der Punkte $1 : \alpha : \alpha\beta : \beta$, $1 : \gamma : \gamma\delta : \delta$ ist Complexstrahl, wenn

4) $$\alpha - \gamma = \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

Erzeugung des Complexes [(111)(12)]. Man bringe die Strahlen der einen Erzeugung einer Fläche zweiten Grades $F$ so in projectivische Zuordnung, dass die beiden sich selbst entsprechenden zusammenfallen. Die Paare von Erzeugenden sind die Directricen der Congruenzen.

Vergl. Fig. 2. $QRST$ sind consecutive Punkte von $K$, d. h. $C$ und $K$ osculiren sich vierpunktig.

**Complex [11(13)], Nr. 17.**

1) $$\Omega = a\,(p_{12}^2 + p_{34}^2) + 2b\, p_{14} p_{34} + 2p_{14}(p_{13} + p_{42}) = 0,$$

2) $$\Omega' = ab\,(p_{12}^2 + p_{34}^2) + (a^2 + b^2) p_{12} p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$

3) $$a(y_1^4 + y_4^4) + 2b\, y_1^2 y_4^2 + 2(b^2 - a^2)\, y_1 y_4 (y_1 y_3 - y_4 y_2) = 0.$$

Die Singularitätenfläche $F$ ist die allgemeine Cremona X. Die dreifache Gerade ist $y_1 = y_4 = 0\,(A_2 A_3)$, längs derselben hat man zwei statio-

näre Tangentialebenen $y_1 = 0$, $y_4 = 0$. Die Fläche entsteht dadurch, dass man die Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung $C_3$ mit Doppelpunkt und diejenigen einer Geraden $t$, welche $C_3$ im Doppelpunkte $T$ schneidet, in projectivische Zuordnung bringt und entsprechende Punkte durch Geraden verbindet.

Es sei $P$ ein Punkt auf $F$, P die zugehörige Tangentialebene. In P liegen eine Erzeugende $e$ (durch $P$ gehend) und eine Curve dritter Ordnung $C_3$, welche durch $P$ geht und einen auf $e$ gelegenen Doppelpunkt $T$ besitzt (Fig. 5). Der Complexkegelschnitt in P löst sich auf in zwei Punkte $M$, $N$ auf $C_3$, wobei $P$ in $MN$ liegen muss. Die aus $M$ (oder $N$) gezogenen Strahlen schneiden $C_3$ in den Paaren $DD'$, $D_1D'_1$, ... einer Involution und durch $DD'$, $D_1D'_1$, ... gehen die Directricenpaare als Erzeugende von $F$. — Die Strahlen $TD$, $TD'$ etc. bilden ebenfalls eine Involution. Durch Betrachtung der an $T$ liegenden Paare der Involution auf $C_3$ findet man sofort, dass in der Strahleninvolution um $T$ die beiden Tangenten an die $C_3$ sich entsprechen. — Auch die Ebenen und die Punkte der dreifachen Geraden $t$ der Fläche sind involutorisch geschaart und zwar auf zwei Arten, und die stationären Ebenen, sowie die stationären Punkte bilden je ein Paar dieser Involutionen.

Erzeugung des Complexes [11(13)]. Eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona X, habe die dreifache Gerade $t$, auf $t$ seien $A$ und $B$ die stationären Punkte und es seien A und B die stationären Ebenen. Alsdann bringe man die Punkte von $t$ so in involutorisches Entsprechen, dass $A$ und $B$ ein Paar bilden (oder man construire eine Involution unter den Ebenen von $t$ mit A und B als einem Paare). Die durch die Paare dieser Involution gelegten Erzeugenden von $F$ sind die Directricen der Congruenzen. — Diese Construction ist für den Complex stets auf zwei Arten ausführbar. — Für das Weitere vergl. [1111(11)].

**Complex [1(11)3], Nr. 18.**

1) $$\Omega = 2a\,p_{12}p_{34} - b\,(p_{13} - p_{42})^2 + 2p_{14}(p_{13} + p_{42}) = 0,$$

2) $$\Omega' = a^2\,p_{12}p_{34} - b^2(p_{13} - p_{42})^2 + p_{14}^2 = 0,$$

3) $$a^2b\,(y_1y_3 + y_4y_2)^2 + 2(2b - a)y_1y_4(y_1y_4 + a y_1y_3 - a y_2y_4) = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist eine Regelfläche $F$ von der vierten Ordnung, welche zwei doppelte Leitgeraden und eine Rückkehrerzeugende besitzt (Specialfall von Cremona V). Der Vergleich mit [11(11)2] ergiebt:

Erzeugung des Complexes [1(11)3]. Eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona V, habe die doppelten Leitgeraden $a$, $b$, die Rückkehrerzeugende $c$ und es sei $K$ ein Leitkegelschnitt von $F$ (wobei $c$ und $K$ sich berühren). Auf $K$ construire man eine Involution von Punkten, deren Pol ein

Punkt $M$ von $c$ ist. Durch die entsprechenden Punkte auf $K$ zieht man die Erzeugenden von $F$ (als Transversalen zu $a$, $b$) und erhält damit die Directricenpaare der Congruenzen.

Diese Erzeugung ist zweimal ausführbar, man kann den Punkt $M$ auf zwei Arten in $c$ wählen. Diese beiden Punkte $M$, $N$, die Schnittpunkte $ca$, $cb$ bestimmen zwei Paare einer Involution, von welcher der eine Doppelpunkt in den Berührungspunkt von $K$ mit $c$ fällt.

**Complex [1(113)], Nr. 19.**

1) $$\Omega = -a(p_{12}-p_{34})^2 + 2p_{14}(p_{13}+p_{42}) = 0,$$

2) $$\Omega' = -a^2(p_{12}-p_{34})^2 + p_{14}^2 = 0,$$

3) $$(y_1^2-y_4^2)^2 = 0, \quad (v_2^2-v_3^2)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche besteht doppelt aus den Punkten $A(v_2+v_3=0)$, $B(v_2-v_3=0)$ und den Ebenen $\mathrm{A}(y_1-y_4=0)$, $\mathrm{B}(y_1+y_4=0)$. Die Punkte $P$ in A und $Q$ in B seien $1:\beta:\alpha+\beta:1$, $1:-\delta:\gamma+\delta:-1$. Hierbei sind $\alpha$ und $\gamma$ die Parameter der Strahlen $AP$, $BQ$ in den Büscheln $A\mathrm{A}$, $B\mathrm{B}$. Für $PQ$ ergiebt sich

4) $$a(\alpha+\gamma)^2 - 4(\alpha-\gamma) = 0.$$

Wie bei [11(112)] findet man:

Erzeugung des Complexes [1(113)]. Die Schnittlinie von zwei Ebenen A, B (Fig. 6) enthalte die Punkte $A$, $B$ und schneide einen Kegelschnitt $K$ in $C$. Irgend eine Tangente $t$ an $K$ treffe A und B in $T_1$, $T_2$. Die Strahlen $AT_1 = d_1$ und $BT_2 = d_2$ sind alsdann stets die Directricenpaare.

**Complex [(11)(13)], Nr. 20.**

1) $$\Omega = a\,p_{12}p_{34} + p_{14}(p_{13}+p_{42}) = 0,$$

2) $$\Omega' = a^2 p_{12}p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$

3) $$y_1y_4\{a(y_1y_3 - y_4y_2) + y_1y_4\} = 0.$$

Die Singularitätenfläche hat, in Ebenencoordinaten geschrieben, eine Gleichung, in welcher $v_2v_3$ als Factor auftritt. Somit besteht diese Fläche aus einer vom zweiten Grade $F$ nebst zwei Tangentialebenen $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_4)$ und deren Berührungspunkten $(A_3, A_2)$, welche auf der nämlichen Erzeugenden liegen. — $P$ auf $F$ und $Q$ in $\mathrm{A}_4$ seien $a:a\beta+1:a\alpha\beta:a\alpha$, $1:\delta:\gamma:0$. Es ergiebt sich dann

4) $$(\delta-\beta)(\alpha\gamma+\alpha) = 0$$

Ist $\delta = \beta$, so erhält man zwischen den Strahlen auf $F$, zu denen $A_2A_3$ gehört, und denen des Büschels $A_3\mathrm{A}_4$ eine projectivische Zuordnung. Der gemeinsame Strahl ist selbstentsprechend.

Wenn $\alpha\gamma+\alpha = 0$, so hat man die eindeutige Zuordnung zwischen den Strahlen des Büschels $A_2\mathrm{A}_4$ und denen der andern Regelschaar auf $F$.

Hätte man $Q$ in $\mathrm{A}_1$ gewählt, so würde man eine weitere, 4) analoge Gleichung erhalten haben. Es sind die Erzeugenden auf $F$ auch mit

zwei Büscheln in $A_1$ in projectivischer Zuordnung. — Alle Complexstrahlen, welche $\alpha$ treffen, bilden zwei Congruenzen, deren zweite Directricen den Büscheln $A_2A_4$ und $A_3A_1$ angehören. Die zu $\beta$ gehörenden Directricen liegen in den Büscheln $A_2A_1$ und $A_3A_4$.*

Erzeugung des Complexes [(11)(13)]. Auf einer Fläche zweiten Grades $F$ (Fig. 7) wähle man eine Erzeugende $e$, auf ihr die Punkte $A$, $B$, welche die Berührungspunkte der Ebenen A, B seien. In A und B seien nebst $e$ noch die weiteren Erzeugenden $e_1$, $e_2$ von $F$ gelegen. Nun bringe man die $e$ schneidenden Erzeugenden von $F$ in projectivische Zuordnung mit den Strahlen im Büschel $A$A, so dass $e_1$ sich selbst, dem Strahl $e_2$ aber $e$ entspricht. — Oder man bringe die andere Regelschaar von $F$ in eindeutiges Entsprechen mit dem Büschel $A$B, so dass für die hierbei in $e_2$ entstehenden vereinigten projectivischen Reihen die Doppelelemente in $B$ vereinigt sind. — Jede der genannten Erzeugungsweisen ist für denselben Complex zweimal ausführbar.

**Complex [(111)3], Nr. 21.**

1) $$\Omega = 4\,a\,p_{12}p_{34} - a\,(p_{13}-p_{42})^2 + 2p_{14}(p_{13}+p_{42}) = 0,$$

2) $$\Omega' = 4\,a^2 p_{12}p_{34} - a^2(p_{13}-p_{42})^2 + p_{14}^2 = 0,$$

3) $$(y_1 y_3 + y_4 y_2)^2 = 0.$$

Für $P(1:\alpha:-\alpha\beta:\beta)$, $Q(1:\gamma:-\gamma\delta:\delta)$ erhält man

4) $$a(\gamma-\alpha)^2 + 2(\gamma+\alpha) = 0.$$

Erzeugung des Complexes [111(3)]. Die Ebene eines Kegelschnittes $C$ schneide eine Fläche zweiten Grades $F$ im Kegelschnitte $K$. Beide, $C$ und $K$, osculiren sich an einer Stelle dreipunktig (so dass sie sich ausserdem in noch einem Punkte schneiden). Jedem Punkte auf $K$ entsprechen die zweiten Schnittpunkte der von ihm an $C$ gezogenen Tangenten mit $K$. Die durch die entsprechenden Punkte von $K$ gehenden Erzeugenden der einen Schaar von $F$ sind die Directricenpaare. — Siehe [(111)111], Fig. 2.

**Complex [11(22)], Nr. 23.**

1) $$\Omega = a\,(p_{12}+p_{34})^2 - b\,(p_{12}-p_{34})^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = a^2(p_{12}+p_{34})^2 - b^2(p_{12}-p_{34})^2 = 0,$$

3) $$y_1^2(my_1^2 - y_3^2 - y_4^2) = 0, \quad v_2^2(mv_2^2 - v_3^2 - v_4^2) = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist ein Kegel K mit der Spitze $A_2$ und ein Kegelschnitt $C$ in $A_1$, welche zwei gemeinsame Erzeugende haben.

---

* Hieraus ergeben sich sofort die singulären Linien. In Nr. 20 der Dissertation sind dieselben unrichtig angegeben.

Ein Punkt $P$ auf K sei $2\alpha:2\alpha\beta:-(m+\alpha^2):-i(m-\alpha^2)$. — Seien nun $M$ und $N$ die gemeinsamen Schnittpunkte von K und $C$ mit $A_3 A_4$ (Fig. 8), gegeben durch $y_3{}^2+y_4{}^2=0$, und seien $D$, $E$ bezüglich auf den Tangenten $A_2 M$, $A_2 N$ an $C$ gelegen, so sind sie darstellbar durch $0:\gamma:-i:1$, $0:1:i\gamma':\gamma'$. Alsdann gehören $PD$, $PE$ dem Complexe an, wenn

$$4)\qquad \alpha\gamma=m\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad \alpha\gamma'=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\quad \left(m=\frac{a-b}{4ab}\right).$$

Es zeigt sich, dass die durch $\gamma$, $\gamma'$ bestimmten Punkte $D$, $E$ als Verbindungslinie eine Tangente an $C$ ergeben. Da $\alpha$, $\gamma=0$, $\infty$ die Gleichung 4) erfüllen, so sind $A_2 M$, $A_2 N$ selbstentsprechende Strahlen (Directricen specieller Congruenzen).

Versteht man unter $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ die absoluten Werthe der Wurzeln, so erhält man für jeden Werth von $\alpha$ zwei Werthe $\gamma_1=\frac{m}{\alpha}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\gamma_2=\frac{m}{\alpha}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, so dass $\gamma_1:\gamma_2=Const.$ Jeder Kegelseite $d$ mit dem Parameter $\alpha$ sind zwei Tangenten $d'$, $d''$ von $C$ zugeordnet, welche, mit $A_2 M$ geschnitten, zwei projectivische Reihen ergeben. Die Doppelpunkte fallen nach $A_2$ und $M$. — Je zwei dieser Tangenten $d'd''$ ergeben einen Schnittpunkt $O$, dessen geometrischer Ort ein neuer Kegelschnitt $C_1$ ist, welcher $C$ in $M$ und $N$ berührt.

Die Complexstrahlen aus $P$ auf K bilden zwei Büschel $Pd'$, $Pd''$. Der gemeinsame Strahl $PO$ ist ein singulärer Complexstrahl. Bewegt sich $P$ auf $d$, so bleiben $d'$, $d''$ und $O$ fest und es besteht also der Büschel $Od$ aus singulären Linien. Indem man das für alle Strahlen $d$ auf K ausführt, erhält man eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien, bestehend aus $\infty^1$ Büscheln, deren Scheitel Punkte $O$ auf $C_1$ sind und deren Ebenen die jenen Punkten eindeutig entsprechenden Strahlen $d$ auf K enthalten.

Betrachtet man ferner die beiden linearen Congruenzen, welche als gemeinsame Directrix eine Tangente von $C$ haben ($\gamma=Const.$ ergiebt zwei Werthe für $\alpha$), so erhält man als zweite Directricen zwei Strahlen auf K. Es entsteht auch so ein Büschel singulärer Linien.* Solcher Büschel giebt es für jede Tangente von $C$ eines und die Gesammtheit ist eine weitere Congruenz zweiten Grades von singulären Linien.

Erzeugung des Complexes [11(22)]. Ein Kegelschnitt $C$ in der Ebene E berühre die in E liegenden Seiten $s_1$, $s_2$ eines Kegels K in $M$ und $N$ (Fig. 8). Man bringe die Seiten von K und die Tangenten an $C$ so in projectivische Zuordnung, dass die

* Die Enveloppe der Ebenen dieser Büschel ist ein weiterer Kegel $K_1$, welcher K an den nach $M$ und $N$ gehenden Seiten berührt.

gemeinsamen unter ihnen sich selbst entsprechen. Die Strahlenpaare sind die Directricen der Congruenzen. — Für denselben Complex ist diese Erzeugung auf zwei Arten ausführbar.

Es seien nun $C$ ein Kreis, $M$ und $N$ seine unendlich fernen imaginären Punkte, K ein Rotationskegel, dessen Axe im Mittelpunkte von $C$ zu der Ebene von $C$ senkrecht steht. Alsdann geht der Complex durch Rotation um jene Axe in sich selbst über: Der Complex entsteht durch Rotation einer Congruenz mit den Directricen $d_1$, $d_2$ um eine Axe $a$, welche $d_1$ schneidet und $d_2$ rechtwinklig kreuzt, wobei die Ebene vom Punkte $ad_1$ nach $d_2$ zu $a$ senkrecht steht.

Complex [12(12)], Nr. 24.

1) $$\Omega = -a(p_{12}-p_{34})^2 + 4b\,p_{13}p_{42} + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$
2) $$\Omega' = -a^2(p_{12}-p_{34})^2 + 4b^2 p_{13}p_{42} + 2b\,p_{13}^2 = 0,$$
3) $$a y_1^4 + 4b(b-a)y_1^2 y_4^2 - 4ab^2(y_1 y_2 - y_3 y_4)^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche $F$ ist eine Linienfläche vierten Grades, Cremona VI. Sie hat eine Cayley'sche Doppelgerade und eine doppelte Erzeugende. Letztere ist $y_1 = y_3 = 0$ $(A_2 A_4)$. Sie ist zugleich Doppelgerade des Complexes und daher hat man in einer beliebigen Ebene P durch sie einen Complexkegelschnitt, welcher in zwei Punkte $M$, $N$, auf jener Linie liegend, zerfällt. Von der Fläche enthält P auch einen Kegelschnitt $K$,* auf welchem durch die Büschel $M$P, $N$P zwei Involutionen entstehen. Durch die Involutionspaare gehen die Directricenpaare als Erzeugende von $F$. (Vergl. [1(11)2], die doppelten Leitgeraden sind hier unendlich nahe gerückt.)

Erzeugung des Complexes [12(12)]. Eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona VI, habe die Doppelerzeugende $c$. Die Ebene P durch $c$ enthalte den Kegelschnitt $K$ von $F$. Auf $K$ construire man eine Involution, deren Pol in $c$ fällt, so sind die durch die Punktepaare der Involution gehenden Erzeugenden von $F$ die Directricen der Congruenzen. — Diese Erzeugung ist stets zweimal ausführbar.

Complex [1(122)], Nr. 25.

1) $$\Omega = a(p_{12}+p_{34})^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$
2) $$\Omega' = (p_{12}+p_{34})^2 = 0,$$
3) $$y_1^4 = 0, \quad v_2^4 = 0.$$

Die Singularitätenfläche besteht aus dem Büschel $A_2 A_1$, vierfach zählend. Die Congruenzen müssen hier specielle sein.

* Die Schnittpunkte von $K$ mit der Doppelerzeugenden und die Punkte $M, N$ bestimmen eine Involution, von welcher der eine Doppelpunkt in den Schnitt der beiden Doppelgeraden von $F$ fällt.

Ein Punkt $P$ in $A_1$ sei $0:\alpha\gamma:\alpha:1$ (Fig. 9), wobei $\alpha$ der Parameter des durch $P$ gehenden Strahles im vorhin genannten Büschel ist. Ein Punkt $B$ in $A_1 A_3$ sei $-1:0:\beta:0$. Dann gehören die Strahlen des Büschels aus $P$ nach $A_2 B$ dem Complex an, wenn

4) $$a(\alpha\gamma-\beta)^2+\alpha^2+1=0.$$

Ist $\alpha = Const.$, so gehören zu jedem Werthe $\gamma$ zwei Werthe $\beta_1$, $\beta_2$, also zu jedem Punkte $P$ im festen Strahl $A_2 P$ zwei Punkte $B_1$, $B_2$, welche die Lage der Ebenen der Büschel aus $P$ ergeben. — Rückt $P$ nach $A_2$ ($\gamma=\infty$), so fallen die Punkte $B_1$, $B_2$ nach $A_3$ ($\beta=\infty$) und die Ebenen der Büschel sind in $A_1$ vereinigt.

Für den Schnittpunkt $A$ von $\alpha$ mit $A_3 A_4$ ist $\gamma=0$, $y_3=\alpha y_4$ und für die zugeordneten Punkte $B$ ist $-\frac{y_3}{y_1}=\beta=\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{-a}}$. Diese Punkte geben, mit $A$ verbunden, Tangenten des Kegelschnittes $y_1^2+a(y_3^2+y_4^2)=0$. Dieser Kegelschnitt $K$ ist der Complexkegelschnitt in $A_2$. Für ihn ist $A_1 A_3 A_4$ ein Tripel harmonischer Pole und die Schnittpunkte mit $A_3 A_4$ sind bestimmt durch $y_3^2+y_4^2=0$.

Setzt man in 4) $\beta=0$, so folgt $\gamma=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{-a}}$. Somit hat man für die Punkte $P$, für welche je die eine zugehörige Ebene nach $A_1$ geht, $\frac{y_3}{y_4}=\alpha$, $\frac{y_2}{y_3}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{-a}}$. Hieraus ergiebt sich als Ort dieser Punkte der Kegelschnitt $K_1$ in $A_1$ von der Gleichung $ay_2^2+y_3^2+y_4^2=0$. Er ist der Schnitt des Complexkegels aus $A_1$ mit $A_1$. Ferner schneidet er $A_3 A_4$ in denselben Punkten ($y_3^2+y_4^2=0$) wie $K$.

Erzeugung des Complexes [1(122)]. Zwei Ebenen P, M (Fig. 10) enthalten die Kegelschnitte $K_1$, $K$, welche $p=$ PM im selben Punktepaar schneiden, resp. auf $p$ dieselbe Involution harmonischer Pole erzeugen. Die Pole von $p$ für $K$, $K_1$ seien $M$, $P$. Für jeden Strahl $\alpha$ des Büschels $P$P ordne man dem Punkte $A=\alpha p$ die eine Tangentialebene $\alpha t$ aus $\alpha$ an den Kegelschnitt $K$ zu und dem einen Schnittpunkte $B$ von $\alpha$ mit $K_1$ die Ebene $Bq$ ($BPM$). Endlich sei die dem Punkte $P$ zugeordnete Ebene P. Hierdurch ist zwischen den Punkten und Ebenen von $\alpha$ eine projectivische Zuordnung gegeben. Die Strahlen aus den Punkten in den zugeordneten Ebenen geben je eine (specielle) Congruenz des Complexes. — Für denselben Complex ist diese Erzeugung auf zwei Arten ausführbar.

Wird der Complex metrisch specialisirt, so lässt er sich durch Rotation erzeugen. Es sei M parallel mit P. $K$ und $K_1$ seien Kreise, so sind $P$, $M$ deren Mittelpunkte und $PM=q$ sei senkrecht zu P (und M). Dann ist $q$ die Rotationsaxe. Der Complex entsteht durch Rota-

tion einer speciellen Congruenz um eine Axe, welche die Directrix schneidet und senkrecht steht zu der dem Schnittpunkte entsprechenden Ebene. — Vergl. den Rotationscomplex [11(22)]; $d_1$ und $d_2$ sind hier unendlich benachbart.

**Complex [(11)22], Nr. 26.**

1) $$\Omega = 4\,a\,p_{12}p_{23} + 4\,b\,p_{13}p_{42} + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = 2a^2p_{12}p_{34} + 2b^2p_{13}p_{42} + \quad b\,p_{13}^2 \quad = 0,$$

3) $$y_1\{a^2y_1y_3^2 + (b-a)^2y_1y_4^2 + 4ab(b-a)y_2y_3y_4\} = 0.$$

Die Ebene $A_1$ ($y_1 = 0$) ist Ausnahmeebene und der Punkt $A_2$ ($v_2 = 0$) Ausnahmepunkt. Als Beitrag zur Singularitätenfläche liefern beide den Büschel $A_2A_1$. Der übrige Theil ist eine Regelfläche dritten Grades $F$, für welche $A_2$ und $A_1$ ein Doppelpunkt und eine Doppeltangentialebene sind. — Die Directricen der Congruenzen sind also entweder Strahlen des Büschels $A_2A_1$ oder Erzeugende von $F$.

Die Doppelgerade von $F$ werde $d$ genannt, die einfache Leitgerade sei $l$. Der Punkt $A$ auf $d$ sei der Ausnahmepunkt des Complexes und $A = Al$ sei die Ausnahmeebene (Fig. 11). Eine Tangentialebene P von $F$ enthalte die Erzeugende $e$, daneben einen Kegelschnitt $K$, beide auf $F$ gelegen. Dann schneiden sich $K$ und $e$ im Punkte $D$ von $d$, sowie im Berührungspunkte $P$ von P mit $F$. Weiterhin wird $e$ von $l$ in $L$ geschnitten, die Ebene $A = Al$ schneide P in $a$, welche Linie auch durch $L$ gehen muss. $K$ wird von $a$ in $R$ und $S$ geschnitten. ($F$ wird gebildet durch alle gemeinschaftlichen Schnittlinien von $K$, $d$ und $l$, drei von ihnen sind $e$, $AR$, $AS$.)

In P löst sich der Complexkegelschnitt auf in zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch (den singulären Punkt) $P$ gehen muss. Diese Punkte liegen auf dem Schnitte von P mit der Singularitätenfläche ($e$ ausgenommen, vergl. frühere Fälle), also der eine auf $a$, der andere auf $K$. In Fig. 11 sind sie $M$, $N$ genannt.

Eine Erzeugende $x$ von $F$ treffe $P$, resp. $K$ in $X$. Diesem Punkte entsprechen $X'$, $X''$. Die zu $x$ gehörenden zweiten Directricen sind somit die durch $X'$ gehende Erzeugende von $F$ und der Strahl $AX''$ des Büschels $AA$. Hierbei können sich $X$ und $X''$ in $R$ und $S$ vereinigen und andererseits ist $RS$ ein Paar der Involution $XX'$.

Erzeugung des Complexes [(11)22]. Eine Regelfläche dritten Grades $F$ habe die Doppelgerade $d$, die einfache Leitgerade $l$. Man bringe vermittelst der Punkte auf $l$ oder der Ebenen durch $d$ oder der Punkte eines Kegelschnittes $K$ der Fläche ihre Erzeugenden in involutorische Zuordnung, so sind die Erzeugendenpaare die Directricen der Congruenzen. — Oder man wähle eine Doppeltangentialebene A von $F$, welche $d$ in $A$ treffen möge. Die Strahlen des Büschels

$A$A setzt man in projectivische Zuordnung zu den Erzeugenden von $F$, so dass die in A liegenden Strahlen von $F$ sich selbst entsprechen.

Anmerkung zu der ersten Erzeugungsweise. Die Strahlen von $F$, welche je von demselben Punkte auf $d$ ausgehen, schneiden aus $l$ eine Involution von Punkten. Die involutorische Zuordnung der Erzeugenden von $F$ zieht das Auftreten einer zweiten Involution nach sich. Beide haben ein gemeinsames Paar, welches eine zerfallende Congruenz ($A$, A) liefert.

**Complex [(112)2], Nr. 27.**

1) $$\Omega = 4a\,p_{13}p_{42} + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = 2a\,p_{13}p_{42} + p_{13}^2 \qquad = 0,$$

3) $$(y_1y_4)^2 = 0, \quad (v_2v_3)^2 = 0.$$

Zu der Singularitätenfläche gehören je doppelt $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_4$, $A_2$, $A_3$. In $\mathrm{A}_1$ und $\mathrm{A}_4$ wähle man $P$ und $Q$ mit den Coordinaten $0:\beta:\alpha:1$, $1:\gamma:\delta:0$, so folgt aus 1)

4) $$\alpha^2 - 4a\alpha\gamma + 1 = 0.$$

Die Strahlen der Büschel $A_2\mathrm{A}_1$ und $A_3\mathrm{A}_4$ sind [2, 1]-deutig zu Directricen geordnet.

Erzeugung des Complexes [(112)2]. Von zwei Ebenen A, B, in deren Schnittlinie die Punkte $A$, $B$ liegen, berühre die eine den Kegelschnitt $K$ in $C$, währenddem die andere $K$ in $E$, $F$ schneidet. Die Tangenten $t$ von $K$ schneiden A und B in Punkten $T_1$, $T_2$ und es sind $AT_1 = d_1$, $BT_2 = d_2$ die Paare der Directricen. — Vergl. [11(112)]; in Fig. 3 fallen $C$ und $D$ zusammen.

Die gegebene Erzeugung kann man auch so auffassen: Den Strahlen $a$, $b$, $c$, ... eines Büschels $B$B lasse man die Paare $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, ... einer Involution von Strahlen im Büschel $A$A entsprechen, doch so, dass $A$ und $B$ in AB liegen und dass $a = AB$ mit dem einen Strahl $a'$ des entsprechenden Involutionspaares zusammenfällt (sich einfach selbst entspricht).

**Complex [(12)(12)], Nr. 28.**

1) $$\Omega = a(p_{12}+p_{34}^2) + 4a\,p_{13}p_{42} + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = a(p_{12}+p_{34})^2 + 4a\,p_{13}p_{42} + \quad 2p_{13}^2 \quad = 0,$$

3) $$\{y_1^2 + 2a(y_1y_2 + y_3y_4)\}\{y_1^2 - 2a(y_1y_2 + y_3y_4)\} = 0.$$

Analog [11(11)(11)], [1(11)(12)] erhält man:

Erzeugung des Complexes [(12)(12)]. Zwei Flächen zweiten Grades $F_1$, $F_2$ berühren sich nach zwei Erzeugenden $p$, $q$. Man bringe ihre Regelschaaren, welche $q$ schneiden, in projectivische Zuordnung, so dass für die hierbei in $q$ entstehenden vereinigten projectivischen Reihen die Doppelelemente in $pq$ vereinigt sind. Entsprechende Strahlen sind

die Directricenpaare. — Diese Erzeugung lässt sich für denselben Complex auf vier Arten ausführen.

**Complex [(11)(22)], Nr. 29.**

1) $\Omega = 4a\, p_{12} p_{34} + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$

2) $\Omega' = \quad p_{12} p_{34} \qquad = 0,$

3) $y_1^2(y_3^2 + y_4^2) = 0, \quad v_2^2(v_2^2 + v_3^2) = 0.$

Die doppelten Ausnahmeelemente sind $y_1 = 0$ (Ebene C), $v_2 = 0$ (Punkt $C$). Die einfachen sind $y_3^2 + y_4^2 = 0$ (Punkte $A$ und $B$). Bezüglich ihrer gegenseitigen Lage s. Fig. 12. Es treten ohne Zweifel die Büschel auf: $A$A, $B$B, $A$C, $B$C, $C$A, $C$B. Der Büschel $C$C von Strahlen, die in den doppelten Ausnahmeelementen liegen, kann hier nicht in Betracht kommen; für jeden seiner Strahlen erhält man eine Congruenz, bestehend aus dem Bündel $C$ und dem Strahlfelde C, beide doppelt zählend.

Die sehr einfache Untersuchung ergiebt:

Erzeugung des Complexes [(11)(22)]. Zwei Büschel ($A$A, $B$B in Fig. 12) in allgemeiner Lage werden so in projectivische Zuordnung gebracht, dass für die in der Schnittlinie ihrer Ebenen entstehenden projectivischen Reihen die Doppelelemente zusammenfallen. (Vergl. [(11)(11)(11)]). Oder: Zwei projectivische Büschel $A$C, $C$B liegen so, dass die Ebene des ersten durch beide Scheitel geht und der Scheitel der zweiten in beiden Ebenen liegt. (Nach der eingeführten Bezeichnung entsprechen sich dann $AB$ und $CB$, ferner $AC$ und AB.) — Letztere Erzeugung ist auf zwei Arten ausführbar.*

In Fig. 12 ist $s$ ein beliebiger Complexstrahl; er ergiebt für jedes Büschelpaar zwei entsprechende Strahlen und bestimmt mit $ABC$ABC den Complex.

**Complex [1(14)], Nr. 31.**

1) $\Omega = a\,(p_{12} + p_{34})^2 + 2 p_{13} p_{23} + 4 p_{14}^2 = 0,$

2) $\Omega' = a^2 (p_{12} + p_{34})^2 + 2 p_{13} p_{14} \qquad = 0,$

3) $y_3^2(4 y_1^2 + a y_3^2) + 8 a y_1^2 (y_3 y_4 - y_1 y_2) = 0.$

Die Singularitätenfläche ist vom vierten Grade mit der dreifachen Geraden $y_1 = y_3 = 0$. Die stationären Ebenen sind in $y_1 = 0$ vereinigt (Specialfall von Cremona X). Man erhält diesen Fall aus [11(13)], indem man den dort auftretenden Doppelpunkt $T$ von $C_3$ in eine Spitze verwandelt.

Erzeugung des Complexes [1(14)]. Für eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona X, mit vereinigten stationären Elementen bringe man die Ebenen durch die dreifache Ge-

* S. die Schlussbemerkung zu [(33)].

rade so in involutorische Zuordnung, dass die eine selbstentsprechende Ebene in die stationäre fällt. Die Ebenenpaare schneiden $F$ in den Directricenpaaren der linearen Congruenzen. — Die zweite Doppelebene der Involution ergiebt jeweilen eine specielle Congruenz. Solcher giebt es aber zwei und es ist oben gegebene Erzeugung des Complexes auf zwei Arten ausführbar. Selbstverständlich ist, dass man die Involution der Ebenen durch eine aus Punkten auf der dreifachen Geraden ersetzen kann.

**Complex [(11)4], Nr. 82.**

1) $\Omega = 2a\,p_{12}p_{34} + p_{13}p_{23} + 2p_{14}^2 = 0,$

2) $\Omega' = a^2\,p_{12}p_{34} + p_{13}p_{14} = 0,$

3) $y_1\{y_1(y_3 + 2ay_4)^2 + 2a^2y_2y_3^2\} = 0.$

Die Singularitätenfläche ist eine Regelfläche dritten Grades $F$ mit einer Cuspidalebene und dem zugehörigen Cuspidalpunkte. — Eine Betrachtung analog [(11)22] ergiebt folgendes Resultat (in Fig. 5 fallen $R$ und $S$ zusammen):

Erzeugung des Complexes [(11)4]. Eine Regelfläche dritten Grades $F$ habe die Doppelgerade $d$, die einfache Leitgerade $l$, die eine Cuspidalerzeugende sei $c$, der dazu gehörende Cuspidalpunkt $C = cd$ und die Cuspidalebene C$=cd$. Alsdann construire man in $l$ zwei projectivische Reihen $X$, $Y$, $Z$, ...; $X'$, $Y'$, $Z'$, ..., deren Doppelpunkte im Punkte $lc$ vereinigt sind. Die aus $X$, $Y$, ... gezogenen Erzeugenden von $F$ bilden mit den Strahlen $CX'$, $CY'$, ... die Directricen der Congruenzen. — Oder man ordnet die Punkte auf $l$ zu einer Involution, so dass ein Doppelpunkt nach $lc$ fällt, und zieht die Directricenpaare als Erzeugende von $F$ durch die Involutionspaare.

**Complex [(114)], Nr. 83.**

1), 2) $\Omega = p_{13}p_{23} + 2p_{14}^2, \quad \Omega' = p_{13}p_{14} = 0,$

3) $(y_1y_3)^2 = 0, \quad (v_3v_4)^2 = 0.$

Wie bei [11(112)], [1(113)] findet man, dass die Directricen zwei Büschel mit [1, 2]-deutiger Zuordnung bilden.

Erzeugung des Complexes [(114)]. Den Strahlen $a, b, c$, ... eines Büschels $B$B lasse man die Paare $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, ... einer Involution von Strahlen im Büschel $A$A entsprechen, wobei $A$ und $B$ in AB liegen und $AB$ zugleich Strahl in $B$B und der eine Doppelstrahl der Involution in $A$A ist (sich doppelt selbst entspricht). — Man vergl. [(112)2]. — Bei [1(113)] lasse man $D$ nach $C$ fallen, so dass A den Kegelschnitt $K$ in $C$ berührt.

**Complex [1(28)], Nr. 35.**

1) $\Omega = -a(p_{12}-p_{34})^2 + p_{13}^2 + 2p_{14}(p_{12}+p_{34}) = 0,$

2) $\Omega' = a^2(p_{12}-p_{34})^2 - p_{14}^2 = 0,$

3) $y_1^2\{y_1^2 + 4a(y_1y_3 - y_4^2)\} = 0, \quad v_2^2\{v_2^2 - 4a(v_2v_4 + v_3^2)\} = 0.$

Die Untersuchung wird hier geführt, wie bei [11(22)]. Es ergiebt sich:

Erzeugung des Complexes [1(23)]. Ein Kegel K und ein Kegelschnitt K seien so gelegen, dass *K* in einer Tangentialebene von *K* liegt und die darin befindliche Kegelseite an der Kegelspitze tangirt. Nun bringe man die Kegelseiten und die Tangenten von *K* in projectivische Zuordnung mit Beachtung folgender Bedingung. Wenn man die Tangenten *a*, *b*, ... von *K* mit der festen *t* unter ihnen schneidet, so entstehen Punkte *A*, *B*, *C*, ...; durch eine feste Kegelseite lege man Ebenen nach den Seiten *a'*, *b'*, *c'*, ..., welche den Tangenten *a*, *b*, *c*, ... entsprechen. Diese Ebenen schneiden *t* in den Punkten *A'*, *B'*, *C'*, ..., welche mit *A*, *B*, *C*, ... zwei vereinigte projectivische Reihen bilden. Die Doppelelemente müssen im Schnitte von *t* mit der K und *K* gemeinsamen Erzeugenden vereinigt sein. — Diese Erzeugung ist stets auf zwei Arten ausführbar.

Jeder Seite von K entsprechen zwei Tangenten von *K*. Der geometrische Ort des Schnittpunktes ist ein neuer Kegelschnitt $K_1$, welcher *K* an der Kegelspitze vierpunktig osculirt. Er ist die eine Brenncurve für die eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien. Die duale Betrachtung ergiebt eine weitere Congruenz, s. [11(22)].

**Complex [2(13)], Nr. 36.**

1) $\Omega = 4ap_{13}p_{42} + p_{13}^2 + 2p_{14}(p_{12}+p_{34}) = 0,$

2) $\Omega' = 4a^2p_{13}p_{42} + 2ap_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$

3) $y_1\{y_1^3 + 8a^2y_4(y_1y_2 + y_3y_4) + 4ay_1y_4^2\} = 0.$

Die Singularitätenfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritten Grades *F* mit einer Ebene A ($y_1 = 0$) ihrer Doppeleveloppabeln und dem dazu gehörenden Punkte *A* der Doppelgeraden. Als Linienfläche vierten Grades besteht sie aus *F* und dem Büschel *A*A.

Ein Punkt auf *F* sei *P*, P sei die zugehörige Tangentialebene. Dann hat man in P (Fig. 13) einen Kegelschnitt *K*, eine Erzeugende *e* und die Schnittlinie *a* mit der Ausnahmeebene. Hierbei schneiden sich *K*, *e* und *a* in einem gemeinsamen Punkte *D*, welcher auf der Doppelgeraden *d* von *F* gelegen ist. Die Tangente *b* in *D* an *K* ist die Schnittlinie von P mit der stationären Ebene. — Der Complexkegelschnitt in P besteht aus den Büscheln *M*, *N*, wobei *M* auf *a*, *N* auf *K* liegt und *MN* durch *P* geht. Einem Punkte *X* auf *K* entsprechen *X'* (auf *K*) und *X''* (auf *a*). Auf *K* entsteht eine Involution von Punkten, wobei *DE* eines der Paare ist.

Ferner vereinigen sich $X$ und $X''$ sowohl in $D$, als in $E$. Dabei ist $E$ der Schnittpunkt von P mit der in der Ausnahmeebene gelegenen Erzeugenden.

Erzeugung des Complexes [2(13)]. Die Erzeugenden einer Cayley'schen Linienfläche dritten Grades $F$ bringe man in involutorische Zuordnung. Entsprechende Erzeugenden sind die Directricen der linearen Congruenzen.* Oder: Auf der Doppelgeraden derselben Fläche $F$ sei ein Punkt $A$ mit der zugehörigen Tangentialebene A. Die Strahlen des Büschels $A$A bringe man in projectivische Zuordnung mit den Erzeugenden auf $F$, so dass die beiden gemeinsamen Strahlen (die stationäre Erzeugende und die in A aus $A$ gehende) sich selbst entsprechen.

**Complex [3(12)], Nr. 37.**

1) $\Omega = 4\,a\,p_{14}p_{23} + a\,(p_{12}+p_{34})^2 + p_{13}^2 + 2\,p_{14}(p_{12}+p_{34}) = 0,$

2) $\Omega' = 4a^2\,p_{14}p_{23} + a^2(p_{12}+p_{34})^2 + p_{14}^2 + 4a\,p_{14}(p_{12}+p_{34}) = 0,$

3) $y_1^4 - 4a\,y_1^3y_3 + 4a^3(y_1y_2 - y_3y_4)^2 = 0.$

Die Singularitätenfläche ist eine Regelfläche vierten Grades $F$, Cremona VI, mit Rückkehrerzeugender $c$, die Cayley'sche Doppelgerade sei $d$.

Man gelangt hier sehr leicht zum Ziele, wenn man irgend eine Tangentialebene von $F$ einführt (dasselbe gilt für [12(12)]). Noch einfacher ist es aber, eine Ebene P durch die Rückkehrerzeugende $c$ einzuführen, etwa $y_4 = 0$. Wie man aus obigen Gleichungen leicht nachweist, enthält diese Ebene nebst $c$ einen Kegelschnitt $K$, der $c$ berührt, und der Complexkegelschnitt in dieser Ebene ist $v_2^2 + a v_3^2 = 0$. Er hat sich aufgelöst in zwei Büschel, deren Scheitel $M$, $N$ in $c$ liegen. Der Schnittpunkt von $c$ mit der Doppelgeraden der Fläche, der Berührungspunkt mit $K$, $M$ und $N$ bilden dabei eine harmonische Gruppe.

Erzeugung des Complexes [3(12)]. Eine Regelfläche vierten Grades, Cremona VI, habe die Rückkehrerzeugende $c$. Die Ebene P durch $c$ enthalte den Kegelschnitt $K$ von $F$ (welcher $c$ berührt). Auf $K$ construire man eine Involution, deren Pol in $c$ fällt, so sind die durch die Punktepaare der Involution gehenden Erzeugenden von $F$ die Directricen der Congruenzen. — Diese Erzeugung ist stets zweimal ausführbar.

**Complex [(123)], Nr. 38.**

1), 2) $\Omega = p_{13}^2 + 2p_{14}(p_{12} + p_{34}) = 0, \quad \Omega' = p_{14}^2 = 0,$

3) $y_1^4 = 0, \quad v_2^4 = 0.$

* Die der stationären Erzeugenden entsprechende liefert eine zerfallende Congruenz.

Als Linienfläche aufgefasst, besteht die Singularitätenfläche aus dem Büschel $y_1 = v_2 = 0$, vierfach zählend. Man hat hier specielle Congruenzen.

Auf dem Strahl $y_3 = \alpha y_4$ des Büschels $A_2 \mathrm{A}_1$ sei $Q$ mit den Coordinaten $0 : \alpha\gamma : \alpha : 1$. Durch $A_2 Q$ legt man eine Ebene nach $B$ auf $A_1 A_3$, wobei für $B$ $y_1 = \beta y_3$. Das Büschel in dieser Ebene $\beta$ mit dem Scheitel $Q$ gehört dem Complex an, wenn

4) $$\alpha^2 \beta + 2\alpha\beta\gamma + 2 = 0.$$

Für einen beliebigen Werth von $\alpha$ besteht zwischen $\beta, \gamma$ eine bilineare Gleichung. — Für $Q$ in $A_2$ fällt die Ebene $\beta$ mit $\mathrm{A}_1$ zusammen ($\beta = 0$, $\gamma = \infty$). Für den Schnittpunkt $N$ der Directrix $\alpha$ mit $A_3 A_4$ (Fig. 14) ist $\gamma = 0$, $\beta = -\frac{2}{\alpha^2}$ und es umhüllen diese Linien $NB$ in $\mathrm{A}_1$ den Kegelschnitt $u_4^2 - 2u_1 u_3 = 0$, $y_4^2 - 2y_1 y_3 = 0$. Er ist der Complexkegelschnitt $K_2$ in $\mathrm{A}_2$.

Für $\beta = \infty$ ist nach 4) $\alpha + 2\gamma = 0$. In $\mathrm{A}_1$ liegt also der Kegelschnitt $y_3^2 + 2y_2 y_4 = 0$ und es entspricht dem Schnittpunkte $M$ von $\alpha$ mit ihm eine nach $A_1$ gehende Ebene.

Erzeugung des Complexes [(123)]. $A_1 A_2 A_3 A_4$ (Fig. 14) sei ein Tetraeder. In der Fläche $\mathrm{A}_1$ berührt der Kegelschnitt $K_1$ die Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ in $A_2$ und $A_4$. Der Kegelschnitt $K_2$ in $\mathrm{A}_2$ berührt $A_1 A_4$, $A_3 A_4$ in $A_1$ und $A_3$. Nun bringe man für die Strahlen $A_2 MN$ des Büschels $A_2 \mathrm{A}_1$ die Punkte und Ebenen so in projectivische Zuordnung, dass 1. dem Punkte $A_2$ stets die Ebene $\mathrm{A}_1$, 2. dem Punkte $N$ in $A_3 A_4$ die Tangentialebene $\alpha t$ an $K_2$ und 3. der Ebene $A_2 M A_1$ der Schnittpunkt $M$ mit $K_1$ entspricht. Damit ist $A_2 N$ die Directrix einer speciellen Congruenz des Complexes.

Hier wurden der Complexkegelschnitt $K_2$ in $\mathrm{A}_2$ und der Complexkegel $A_1 K_1$ zur Construction verwendet. An Stelle dessen kann man auch zwei Complexkegel einführen: Die Complexkegel aus den Punkten $S_1$, $S_2$ des Raumes* schneiden eine Ebene $\mathrm{A}$ in $K_1$, $K_2$, welche Kegelschnitte sich in einem Punkte $A$ dreipunktig osculiren. (Fig. 15.) Der letzte gemeinsame Punkt $B$ von $K_1$, $K_2$ liegt mit $A$, $S_1$, $S_2$ in einer Ebene. Irgend ein Strahl $\alpha$ des Büschels $A\mathrm{A}$ schneide $K_1$, $K_2$ in $M_1$, $M_2$. Dann ist $\alpha$ Directrix

* Die Punkte $S_1$, $S_2$ dürfen hierbei nicht in derselben Geraden aus dem Ausnahmepunkte $A$ liegen, da sonst $K_1$ und $K_2$ zusammenfallen. – Der Complex lässt sich leicht aus Congruenzen erster Ordnung zweiter Classe erzeugen. Die eine Brenncurve ist je eine Gerade aus $A$, die andere ein Kegelschnitt in $\mathrm{A}$ durch $A$ gehend. – Etwas Aehnliches gilt für [1(122)], welcher Complex auch aus speciellen Congruenzen besteht, deren Directricen einen Büschel bilden.

einer speciellen Congruenz des Complexes, wenn den Punkten $A$, $M_1$, $M_2$ die Ebenen A, $\alpha S_1$, $\alpha S_2$ entsprechen.

**Complex [2(22)], Nr. 40.**

1) $$\Omega = 2a\,p_{12}p_{34} + p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0,$$

2) $$\Omega' = p_{12}(p_{14} + a\,p_{34}),$$

3) $$y_1^2\{y_1^2 - a^2(y_3^2 + y_4^2)\} = 0, \quad v_2^2(v_3^2 + v_4^2) = 0.$$

Bei diesem Complex treten eigentlich zwei duale wesentlich verschiedene Fälle auf. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall (A), Diss. S. 194. Hier besteht die Singularitätenfläche aus einem Kegel K mit der Spitze $A_2$ (Fig. 16) und zwei Büscheln $M$A$_1$, $N$A$_1$. — A$_1$ ist die Ebene $y_1 = 0$, $M$ und $N$ sind die Punkte $y_3 + iy_4 = 0$, $y_3 - iy_4 = 0$ in $A_3A_4$. — Ein Punkt $P$ auf der Erzeugenden $\alpha$ des Kegels habe die Coordinaten $2ia\alpha : \beta : -i(1+\alpha^2) : (1-\alpha^2)$. Ferner sei $Q$ in A$_1$ der Schnittpunkt der Strahlen $y_3 + iy_4 + \gamma y_2 = 0$, $\delta(y_3 - iy_4) + y_2 = 0$, hat also die Coordinaten $0 : -2i\delta : (\gamma\delta + 1) : (\gamma\delta - 1)$. Für $PQ$ erhält man dann

4) $$(\alpha - i\delta)(\alpha - i\gamma) = 0.$$

Somit bilden die Complexstrahlen, welche die Kegelseite $\alpha$ treffen, zwei lineare Congruenzen, deren zweite Directricen Strahlen in A$_1$ aus $M$ und $N$ sind. Nach 4) ist für sie $\gamma = \delta$ und der Ort ihres Schnittpunktes ist somit der Kegelschnitt $y_3^2 + y_4^2 - y_2^2 = 0$. Er wird von $A_2M$, $A_2N$ in $M$ und $N$ berührt. Seine Punkte sind den Erzeugenden von K eindeutig zugeordnet und die so entstehenden Strahlbüschel bilden eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien. Die anderen singulären Linien bilden zerfallende Congruenzen, bestehend aus den Bündeln $M$, $N$ und aus der Ebene A$_1$ doppelt.

**Erzeugung des Complexes [2(22)], (A).** Auf einem Kegel zweiten Grades K wähle man einen Punkt $M$. Durch die Kegelseite, in welcher $M$ liegt, lege man eine Ebene E und bringe die Erzeugenden des Kegels so in projectivische Zuordnung mit den Strahlen des Büschels $M$E, dass der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht. Entsprechende Strahlen sind die Directricen der Congruenzen. Diese Erzeugung ist in doppelter Weise ausführbar.

**Erzeugung des Complexes [2(22)], (B).** Ein Kegelschnitt $K$ in der Ebene E (Fig. 17) habe eine Tangentialebene A und es sei $A$ ein Punkt in AE. Die Strahlen $a$, $b$, $c$, ... des Büschels $A$A bringe man in projectivische Zuordnung mit den Tangenten $a'$, $b'$, $c'$, ... von $K$, so dass die Linie AB sich selbst entspricht. Die Congruenzen sind $aa'$, $bb'$, $cc'$, .... — Diese Erzeugung ist stets zweimal ausführbar.*

* Bezüglich der singulären Linien vergl. den Fall (A). In der Dissertation S. 195 sind dieselben unrichtig angegeben.

**Complex [(222)], Nr. 41.**

1), 2) $\Omega = p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0, \quad \Omega' \equiv 0,$

3) $y_1^4 = 0, \quad (v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) = 0.$

Hier handelt es sich zunächst um den Fall [(222)], (A). Der Complex besteht aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes ($y_1 = y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$).

Erzeugung des Complexes [(222)], (A). Die Directricenpaare sind consecutive Tangenten eines Kegelschnittes.

Erzeugung des Complexes [(222)], (B). Die Directricenpaare sind consecutive Erzeugende eines Kegels.

Wenn man auf einer Fläche zweiten Grades die Strahlen $a$, $b$, ... der einen Regelschaar mit denen der andern ($a'$, $b'$, ...) in projectivische Zuordnung bringt, so bilden die zerfallenden Congruenzen $aa'$, $bb'$, ... beide Complexe [(222)] als zerfallenden Complex vierten Grades.

Beide Complexe können bei metrischer Specialisirung durch Rotation erzeugt werden. Bei (A) rotirt eine zerfallende Congruenz mit den Directricen $d_1$, $d_2$ um eine Axe, welche $d_1$ schneidet und zur Ebene $d_1 d_2$ senkrecht steht. — Bei (B) rotirt die zerfallende Congruenz um eine Axe, welche durch den Punkt $d_1 d_2$ geht. — Beide Fälle lassen sich als Specialfälle des Rotationscomplexes [11(22)] darstellen. — Auch der zerfallende Complex vierten Grades (A), (B) kann zum Rotationscomplex werden.

**Complex [(15)], Nr. 48.**

1) $\Omega = 2p_{13}p_{23} + p_{14}(p_{12} + p_{34}) = 0,$

2) $\Omega' = 2p_{13}(p_{12} + p_{34}) + p_{14}^2 \quad = 0,$

3) $y_1 \{y_1^2 y_2 - y_1 y_3 y_4 + 2y_3^2\} = 0.$

Die Singularitätenfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritten Grades $F$ mit ihrer stationären Ebene S und dem stationären Punkte $S$.

Fig. 18 (analog Fig. 13 für [2(13)]) giebt ein Bild dessen, was in einer Tangentialebene P von $F$ enthalten ist. Aus $F$ werden $K$ und $e$ geschnitten, aus der Doppelgeraden von $F$ der Punkt $D$, aus der stationären Ebene die Gerade $s$ (die Tangente an $K$ in $D$). Die singuläre Linie durch $P$ ist $MN$. — Die Directricen, welche auf $F$ liegen, ergeben auf $K$ die Involution mit dem Pol $M$. Die andere Schaar von Congruenzen hat zu Directricen Erzeugende $x$ von $F$ (welche $K$ je in einem Punkte $X$ treffen) und Strahlen $SX''$ des Büschels $S$S.

Erzeugung des Complexes [(15)]. Die Directricen sind die zu einer Involution geordneten Erzeugenden einer Cayley'schen Regelfläche dritten Grades, wobei die eine selbstentsprechende Erzeugende die stationäre ist. — Oder: Man bringe die Erzeugenden $a$, $b$, ... der genannten Fläche (mit dem stationären Punkte $S$ und der stationären Ebene S)

in projectivische Zuordnung mit den Strahlen $a'$, $b'$, ... des Büschels $SS$, so dass zunächst die stationäre Erzeugende sich selbst entspricht. Die Zuordnung muss zudem folgende Bedingung erfüllen: Ein Kegelschnitt $K$ auf $F$ werde von $a$, $b$, ... in den Punkten $A$, $B$, ... geschnitten und die Ebene von $K$ von den Strahlen $a'$, $b'$, ... in $A'$, $B'$, ...; dann müssen die Verbindungslinien $AA'$, $BB'$, ... ein Büschel bilden, dessen Scheitel auf $K$ liegt.*

**Complex [(24)], Nr. 45.**

1), 2) $\Omega = p_{12}^2 + p_{14}^2 + 2p_{34}p_{42} = 0$, $\Omega' = p_{12}p_{42} = 0$,

3) $y_4^2(y_2^2 + y_4^2) = 0$, $v_3^2(v_1^2 - 2v_2v_3) = 0$,

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei degenerirten Flächen zweiten Grades. Die eine ist ein Kegelschnitt $K$ in $A_4$. Die andere zerfällt in zwei Doppelbüschel, deren Scheitel in einem Punkte ($A_3$) auf $K$ vereinigt sind (Fig. 19). Die Ebenen dieser Büschel sind zwei Tangentialebenen von $K$ ($y_2 \pm iy_4 = 0$).

Es sei $P$ ein Punkt auf dem Strahl $\alpha$ des Büschels $A_3$, $y_2 - iy_4 = 0$ mit den Coordinaten $\alpha : i : \beta : 1$. Für $Q$ in $A_4$ habe man $1 : \delta : \gamma : 0$, so ist $PQ$ Complexstrahl, wenn

4) $$\alpha^2\delta - 2\gamma - 2i\alpha = 0.$$

Der Ort von $Q$ für ein bestimmtes $\alpha$ ist somit die Gerade $\alpha^2 y_2 - 2y_3 - 2i\alpha y_1 = 0$, welche als Enveloppe den Kegelschnitt $v_1^2 - 2v_2v_3 = 0$ ergiebt, also $K$, s. 3). — Die Zuordnung der Tangenten $t$ an $K$ mit den Strahlen $\alpha$ des Büschels $A_3 . A_1 M$ ergiebt sich durch Einführung der Linie $AB$, welche ihre Schnittpunkte mit der Ebene $A_3 = A_1A_2A_4$ verbindet. $A$ ist $\alpha : i : 0 : 1$, $B$ ist $\alpha : 2i : 0 : 0$ und die Linie $AB$ trifft $A_2A_4$ stets im Punkte $y_1 = y_3 = y_2 + iy_4 = 0$, also im Schnittpunkte von $A_2A_4$ mit der zweiten Ebene der Singularitätenfläche. Die Reihen $A$ (in $MA_1$) und $B$ (in $A_2A_1$) sind perspectivisch.

Ebenso entspricht der Tangente $t$ an $K$ ein Strahl $\gamma = A_3C$ im Büschel $A_3 . A_1N$. Die Schnittpunkte $B$, $C$ mit $A_3$ liegen perspectivisch mit $M$ als Centrum.

Ohne Zweifel ist die Ebene $A_3$ eine singuläre (eine Tangentialebene der Singularitätenfläche), $A_2$ der singuläre Punkt in ihr, $A_2MN$ die singuläre Linie und $M$, $N$ repräsentiren den zerfallenden Complexkegelschnitt in $A_3$.

* Aehnliche Einschränkungen kommen vor bei [1(23)], [(111)(12)], [(11)(13)] etc. — Es hängt das damit zusammen, dass die Singularitätenfläche (hier $F$, $S$ und S zusammen) im Allgemeinen für $\infty^1$ Complexe (zweiten Grades) gleicher Gattung Singularitätenfläche ist. Tritt also bei der Zuordnung der Directricen eine Involution auf, so hat man nur eine einschränkende Bedingung, bei Projectivität dagegen deren zwei.

Nachdem man erkannt hat, dass die Congruenzen $t$, $A_3A$ und $t$, $A_3C$ (Fig. 19; $M$, $N$, $A_i$ sind fest, dagegen $t$, $B$, $A$, $C$ veränderlich) dem Complex angehören, kann man eine Congruenz erster Ordnung zweiter Classe von singulären Linien leicht angeben. Die Ebene $A_3AC$ schneidet $t$ in $T$. Da aber ohne Zweifel die Gruppe $A_1BA_2B'$ eine harmonische ist, so ist $T$ gerade der Berührungspunkt von $t$ mit $K$. Der Büschel aus $T$ in der Ebene $A_3AC$ besteht aus singulären Linien Für jede Lage von $t$ ist $T$ auf $K$ und die Ebene des Büschels geht durch die feste Linie $A_3A_4$. Somit besteht die Congruenz der gleichzeitigen Treffgeraden von $A_3A_4$ und $K$ aus singulären Linien. — Der übrige Theil der Congruenz singulärer Linien zerfällt.*

Erzeugung des Complexes [(24)], (A). An einen Kegelschnitt $K$ lege man eine beliebige Tangentialebene E und es sei $P$ der Berührungspunkt, $p$ die zugehörige Tangente an $K$. Man bringe die Strahlen des Büschels $P$E in projectivische Zuordnung mit den Tangenten von $K$, so dass der gemeinsame Strahl $p$ sich selbst entspricht.** — Diese Erzeugung ist stets auf zwei Arten ausführbar.

Erzeugung des Complexes [(24)], (B). Auf einem Kegel zweiten Grades K liege ein Punkt $P$. Es sei $p$ die durch $P$ gehende Kegelseite und P die Tangentialebene längs $p$. Die Erzeugenden $p$, $a$, $b$, ... von K bringe man in projectivische Zuordnung mit den Strahlen $p$, $a'$, $b'$, . . des Büschels $P$P, so dass $p=p'$ sich selbst entspricht. — Für den Complex ist diese Erzeugung auf zwei Arten ausführbar.

**Complex [(33)], Nr. 47.**

1) $$\Omega = p_{13}(p_{12}+p_{34}) + p_{14}(p_{12}-p_{34}) = 0,$$

2) $$\Omega' = p_{13}^2 - p_{14}^2 = 0,$$

3) $$y_1^3(y_3+y_4)=0, \quad v_2^3(v_3+v_4)=0.$$

Bezeichnen wir die Punkte $y_1=y_2=y_3+y_4=0$ und $y_1=y_2=y_3-y_4=0$ durch $R$ und $S$, so besteht die Singularitätenfläche aus $A_2$ und $A_1$ je dreifach, sowie aus der Ebene $A_1A_2R$ und dem Punkte $S$.

* Vergl. einen allgemeinen Satz, Diss. S. 203.

** Vergl. die Anmerkung zu [(15)]. Eine weitere einschränkende Bedingung der Projectivität ist hier nicht vorhanden. Ist nämlich die gesammte Singularitätenfläche (bestehend aus $K$ und den beiden Tangentialebenen E, F in $P$) bekannt, so muss für die Strahlen $p$, $a$, $b$, ... des Büschels $P$E und der Tangenten $p=p'$, $a'$, $b'$, ... von $K$ Folgendes eintreten: Schneidet man das Ganze mit irgend einer Tangentialebene T von $K$, so müssen die aus $p$, $a$, ...; $p'$, $a'$, ... geschnittenen Reihen perspectivisch liegen für einen Punkt in der Schnittlinie FT (perspectivisch sind sie unmittelbar, weil $p=p'$). Man kann alsdann nur ein Paar $aa'$ frei wählen.

Ein Punkt $P$ auf dem Strahl $\alpha$ in $A_1 A_2 R$ aus $A_2$ sei $\alpha : \alpha\beta : -1 : 1$. Der Punkt $Q$ sei $0 : 1 : (\gamma + \delta) : \delta$, also der Schnitt der Strahlen $\gamma y_2 - y_3 + y_4 = 0$ $(QS)$, $y_4 = \delta y_2$ $(QA_3)$. Für $PQ$ folgt

4) $$(\gamma + 2\delta)(\alpha - \gamma) = 0.$$

$\gamma + 2\delta = 0$ giebt $y_3 + y_4 = 0$, wobei $\alpha$ und $\beta$ beliebig sind. So würde ein specieller Complex entstehen ($p_{13} + p_{14} = 0$). — Wenn dagegen $\alpha - \gamma = 0$, so sind die Strahlen $\alpha$, $\gamma$ in projectivischer Zuordnung, so dass $A_2 R$ und $A_2 S$ sich entsprechen (ebenso $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$, Wahl des Coordinatensystems).

Erzeugung des Complexes [(33)]. Durch einen Punkt $A$ (Fig. 20) gehen zwei Ebenen A, B. In ersterer liegt $B$ ausserhalb AB. Den Strahlen $a$, $b$, $c$, ... aus $A$ in B entsprechen die Strahlen $a'$, $b'$, $c'$, ... aus $B$ in A, so dass $a$ = AB und $a' = AB$ sich entsprechen. Der Complex besteht aus den Congruenzen $aa'$, $bb'$ etc.

In Fig. 20 ist der zu der Ebene $mn$ gehörende Complexkegelschnitt dargestellt. — Zu derselben Singularitätenfläche gehören hier $\infty^2$ solcher Complexe.

Dieser Complex, sowie [(11)(22)], lassen sich durch Einführung eines Kegelschnittes ähnlich wie [11(112)] erzeugen. In Fig. 3 werde $C = D$, $E = F$, d. h. $K$ berührt sowohl A, als B. $A$ bleibt in AB, dagegen rückt $B$ beliebig in B. So entsteht [(11)(22)]. Wenn speciell $B$ in die Verbindungslinie von $A$ mit dem Berührungspunkte von $K$ mit B fällt, so entsteht [(33)].

---

Bezüglich der hier gegebenen Erzeugungsweisen von Complexen zweiten Grades mag noch bemerkt werden, dass mit Ausnahme von [2(22)], [(222)], [(24)] die duale Erzeugung überall denselben Complex, dieselben Directricen und dieselbe Zuordnung zwischen ihnen ergiebt. Diese Zuordnung ist [(2, 2)]-deutig bei

[(111)111], [(112)11], [(113)1], [(111)12], [(111)3],

[2, 1]-deutig bei

[(112)2], [(114)],

und bei den 31 übrigen [1, 1]-deutig.

Bezüglich der Anzahl der Möglichkeiten der Erzeugungen steht [(11)(11)(11)] mit 6 obenan. Vierfache Möglichkeit hat man für

[(11)(11)11], [(12)(11)1], [(11)(11)2], [(12)(12)], [(13)(11)], [(11)(22)],

dreifache bei [(111)(11)1], [(111)12)], [(112)(11)], zweifache bei den Complexen

[(11)1111], [(12)111], [(13)11], [(14)1], [(15)], [(11)112],
[(11)13], [(11)22], [(11)4], [(12)12], [(12)3], [(13)2], [(22)11],
[(22)2], [(23)1], [(24)], [(111)(111)], [(122)1], [(33)],

bei den übrigen 9 hat man nur einfache Möglichkeit.

Für die Complexe, welche mehrfache Möglichkeit der Erzeugung aus linearen Congruenzen zulassen, ist leicht zu zeigen, wie je aus einer die anderen hervorgehen. Ich gedenke hierüber später einige Andeutungen zu geben.

Die übrigen zehn Complexe (abgesehen vom allgemeinen) lassen sich aus Congruenzen 1. (2.) Ordnung 2. (1.) Classe oder aus solchen vom zweiten Grade erzeugen. Der erstere Fall tritt ein, wenn ein Ausnahmepunkt (eine Ausnahmeebene) vorkommt. Auch hierüber gedenke ich bald Einiges mitzutheilen.

Hottingen-Zürich, im Mai 1881.

Nachschrift. Für [(11)(22)], Nr. 29, S. 278, habe ich nachträglich folgende Eigenschaft gefunden: Der Complex entsteht in einem metrisch specialisirten Falle durch Parallelverschiebung einer linearen Congruenz.

Bezüglich der hier gegebenen Resultate wolle man die Arbeit des Herrn Lie vergleichen: „Ueber Complexe“, Mathem. Annalen V, speciell Nr. 75.

# XII.

# Grundzüge der mathematischen Chemie.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

---

## III.

### 8. Kalium.

Atomgewicht $K = 39$ = Moleculargewicht.

Beträgt die Quantität der trägen Substanz eines Atoms das 39fache von derjenigen eines Wasserstoffatoms, so ist es das, was die Chemiker Kaliumatom nennen und mit $K$ oder $Ka$ bezeichnen.

Befindet sich ein solches Kaliumatom in einem äthererfüllten Raume, so werden sich vermöge der Anziehung von Aether- und Massensubstanz vier Aethertheilchen auf dem Atom unmittelbar niederlassen und wegen ihrer gegenseitigen Abstossung sich so auf letzterem gruppiren, dass ihre Mittelpunkte als die Ecke eines kleinen Tetraeders betrachtet werden können, dessen Mittelpunkt mit demjenigen der Massenkugel zusammenfällt. Mehr Aethertheilchen, als diese vier, werden nicht unmittelbar aufgenommen, weil die Abstossung, welche die bereits incorporirten Theilchen auf ein neu aufzunehmendes ausüben, die von dem Massentheilchen ausgehende Anziehung überwiegt. Dem so entstandenen kleinen Tetraeder entsprechend, gruppirt sich nun der umgebende Aether, und die nächsten Theile desselben sind so gestellt, dass sie entweder in einer Geraden sind, die man vom Mittelpunkte des Atoms normal auf eine Tetraederfläche ziehen kann, oder in einer Geraden, welche senkrecht auf einer Tetraederkante steht und durch den Atommittelpunkt geht. Im ersten Falle beträgt die Zahl der nächstliegenden Aethertheilchen vier, im zweiten sechs. Im ersten Falle ist die Bedingung der Ruhe für ein Aethertheilchen durch folgende Gleichung gegeben:

$$1)\quad \frac{39}{18,6}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{3\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{(R+r)^2}-\sqrt{\frac{27}{32}}\cdot\frac{1}{R^2}+R=0.$$

In dieser Gleichung, welche denjenigen der früheren Abhandlungen analog gebildet ist, giebt das erste Glied die Anziehung, welche das Atom auf das äussere Aethertheilchen, dessen Entfernung bestimmt werden soll, ausübt. Im zweiten Gliede findet sich die Abstossung zwischen dem äussern Aethertheilchen und denjenigen drei incorporirten, welche an den Ecken der dem äussern Aethertheilchen zugewandten Tetraederfläche liegen. Das dritte Glied giebt die Abstossung zwischen dem äussern Aethertheilchen und dem incorporirten, welches das abgewendete Eck des kleinen Tetraeders bildet. Das vierte Glied stellt die Abstossung dar, welche die drei übrigen äusseren Aethertheilchen auf das betrachtete ausüben, und das fünfte Glied endlich giebt den äussern Aetherdruck. Der Werth von $R$, welcher der Gleichung 1) genügt, ist 1,3890.

Wenn die nächstliegenden Aethertheilchen nicht in der auf einer Tetraederfläche errichteten Normalen, sondern über einer Kante sich befinden, so ergiebt sich als Bedingungsgleichung:

$$2)\quad \left(\frac{39}{18{,}6}-\tfrac{1}{4}-\sqrt{2}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{2(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+R=0.$$

Dieser Gleichung entspricht der Werth $R=1{,}5242$. Da nun in diesem Falle $R$ bedeutend grösser ist, als im ersten, so ergiebt sich, dass um das kleine Kaliumtetraeder herum sich ein solches von Aethertheilchen einstellt, dessen Ecken normal über den Flächen des innern Tetraeders sich befinden. Dann mag die durch Gleichung 2) angedeutete Stellung (allerdings mit anderem $R$) kommen u. s. w.; doch soll dieses zunächst nicht berücksichtigt werden.

Man kann nun von den Aethertheilchen des äussern Tetraeders eines wegnehmen und durch ein zweites Kaliumtetraeder ersetzen, und dabei dem äussern Tetraeder eine solche Stellung geben, dass die Abstossung zwischen ihm und dem innern einen kleinsten Werth erhält. Es ist diese Stellung diejenige, bei welcher beide Tetraeder sich je eine Seite zuwenden, und wenn die Seite des neu hinzugekommenen äussern Tetraeders gegen die des ursprünglich allein vorhandenen innern 60 Grade um die Verbindungslinie gedreht wird. Bezeichnet man die gegenseitige Wirkung der beiden Tetraeder mit $A$, so ist

$$3)\quad A=\frac{39}{18{,}6}\left[\frac{6\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{2}{(R+r)^2}\right]-\frac{6(R+\frac{2}{3}r)}{((R+\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{6(R-\frac{2}{3}r)}{((R-\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}-\frac{3(R-\frac{2}{3}r)}{((R-\frac{2}{3}r)^2+4.\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+2r)^2}-\frac{39^2}{18{,}6^2}\frac{1}{R^2}.$$

Die von einem Ecktetraeder nach dem Mittelpunkte gerichtete Componirende $B$ der Einwirkung, welche das Ecktetraeder von einem der drei an den anderen Ecken befindlichen Aethertheilchen erfährt, ist

$$4)\quad B=\frac{39}{18,6}\,\frac{\left(R+\frac{R_1}{3}\right)}{\left(\left(R+\frac{R_1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}R_1^2\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R+\frac{R_1}{3}-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+\frac{R_1}{3}-\frac{r}{3}\right)^2+\left(R_1\sqrt{\tfrac{8}{9}}+r\sqrt{\tfrac{2}{9}}\right)^2+\frac{2}{3}r^2\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{\left(R+\frac{R_1}{3}-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+\frac{R_1}{3}-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}(R_1-r)^2\right)^{3/2}}-\frac{\left(R+\frac{R_1}{3}+r\right)}{\left(\left(R+\frac{R_1}{3}+r\right)^2+\frac{8}{9}R_1^2\right)^{3/2}},$$

wenn $R$ die Entfernung des Ecktetraeders, $R_1$ die Entfernung des Aethertheilchens von dem Mittelpunkte angiebt.

Die von einem Eckäthertheilchen nach dem Mittelpunkte gerichtete Componirende $C$ der Wirkung, welche ein Ecktetraeder auf ein Eckäthertheilchen ausübt, ist

$$5)\quad C=\frac{39}{18,6}\,\frac{\left(R_1+\frac{R}{3}\right)}{\left(\left(R_1+\frac{R}{3}\right)^2+\frac{8}{9}R^2\right)^{3/2}}-\frac{\left(R_1+\frac{R}{3}+\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R_1+\frac{R}{3}+\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}(R+r)^2\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R_1+\frac{R}{3}+\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R_1+\frac{R}{3}+\frac{r}{3}\right)^2+\left(R\sqrt{\tfrac{8}{9}}-r\sqrt{\tfrac{2}{9}}\right)^2+\frac{2}{3}r^2\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{\left(R_1+\frac{R}{3}-r\right)}{\left(\left(R_1+\frac{R}{3}-r\right)^2+\frac{8}{9}R^2\right)^{3/2}}.$$

Die nach dem Mittelpunkte gerichtete Componirende $D$ der Wirkung eines Eckäthertheilchens auf ein anderes ist

$$6)\quad D=-\frac{1}{2\sqrt{\tfrac{8}{3}}\,R_1^2}.$$

Die Wirkung des Mitteltetraeders auf ein Eckäthertheilchen ist

$$7)\quad E=\frac{39}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}-\frac{3\left(R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{(R_1+r)^2}.$$

Wird nun eines der vier Aethertheilchen, welche nach 1) das ursprüngliche Kaliumtetraeder umgeben, durch ein zweites Tetraederchen ersetzt, so ist Ruhe für das Ecktetraeder und für die drei Eckäthertheilchen, wenn nachstehende Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$8)\qquad A+3B+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0,\quad E+2D+C+R_1=0.$$

Das Glied $\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R$ giebt die Einwirkung, welche der allgemeine äussere Aether auf das Kaliumatom ausübt, also den Druck des ersteren, mit welchem er letzteres gegen den Mittelpunkt zu führen sucht. Er ist, wie ich bereits wiederholt erwähnt, der Entfernung vom Mittelpunkte proportional, beträgt also für die vier Aethertheilchen

$$\frac{3\left(R-\frac{r}{3}\right)\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{1/2}}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{1/2}}+R+r=4R.$$

Für das Massentheilchen findet die Wirkung im entgegengesetzten Sinne statt, der Aetherwerth des Massentheilchens ist $\frac{39}{18,6}$.

Den Gleichungen 8) entsprechen die Werthe $R=1,3622$ und $R_1=1,4437$. Wenn nun eine grössere Anzahl von Atomen sich im äthererfüllten Raume befindet, so ist die Möglichkeit geboten, dass das eine in die Nähe eines andern kommt, dass ein Aethertheilchen aus dem Umgebungstetraeder abgedrängt wird und dann ein Atom sich an dessen Stelle setzt. Dieses zweite Atom nähert sich dem ersten mehr, als das Aethertheilchen, das von ihm verdrängt worden ist, nach 1) es thut, und sowie es seinen Platz eingenommen hat, rücken die übrigen drei Aethertheilchen des Umhüllungstetraeders in die grössere Entfernung 1,4437. Der eben geschilderte Vorgang kann sich mit einem zweiten Aethertheilchen wiederholen. Soll nochmals ein Tetraeder an die Stelle eines Aethertheilchens treten, so wird auch da wieder die Stellung der kleinsten Abstossung eintreten müssen, es wendet also das neue Tetraeder dem mittleren eine Fläche um 60 Grade gedreht zu, und die Stellung gegen das bereits aufgenommene Ecktetraeder ist derartig, dass beide gegen eine sie verbindende Gerade vollkommen gleich gestellt sind. Die eine Kante eines Ecktetraeders ist die Fortsetzung der entsprechenden Kante des andern und gleichzeitig ein Theil der Kante des Umhüllungstetraeders. Die von einem Ecktetraeder gegen das mittlere Tetraeder gerichtete Componirende $F$ der Einwirkung des einen Ecktetraeders auf das andere ist:

$$9)\qquad F=\frac{39}{18,6}\left[\frac{\frac{4}{3}(2R+r)}{(\frac{8}{3}R^2+\frac{8}{3}Rr+r^2)^{3/2}}+\frac{\frac{4}{3}(2R-r)}{(\frac{8}{3}R^2-\frac{8}{3}Rr+r^2)^{3/2}}+\frac{\frac{16}{3}R}{(\frac{8}{3}R^2+r^2)^{3/2}}\right]$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{39^2}{18,6^2}+2\right]\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{3}}(R+r)^2}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{3}}(R-r)^2}$$
$$-\frac{(2R+r)}{\sqrt{\frac{8}{3}}(R^2+Rr+r^2)^{3/2}}-\frac{(2R-r)}{\sqrt{\frac{8}{3}}(R^2-Rr+r^2)^{3/2}}-\frac{R}{\sqrt{\frac{8}{3}}(R^2+r^2)^{3/2}}.$$

Für die Aufnahme eines zweiten Ecktetraeders gelten die Bedingungsgleichungen:

$$10)\quad A+2B+F+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0 \text{ und } E+D+2C+R_1=0.$$

Die Gleichungen 10) sind erfüllt, wenn $R=1,4183$ und $R_1=1,4928$. Es ist auch hier wieder $R$ kleiner, als $R_1$ des vorigen Falles, es muss sich also auch das zweite Aethertheilchen abdrängen lassen. Die beiden nun vorhandenen Ecktetraeder rücken in die Entfernung 1,4183 und die beiden noch bleibenden Aethertheilchen müssen abermals zurückweichen.

Soll der nämliche Vorgang ein drittes Mal stattfinden, so muss bei den Gleichungen:

$$11)\quad A+B+2F+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0 \text{ und } E+3C+R_1=0$$

wieder $R$ kleiner und dann $R_1$ grösser ausfallen, als $R_1$ in 10). In der That ergiebt sich $R=1,4679$ und $R_1=1,5338$, und das ursprüngliche (nunmehr innere) Tetraeder hat jetzt drei Ecktetraeder und ein Eckätherthellchen um sich. Soll dieses letztere auch noch wegkommen, so muss in der Gleichung:

$$12)\quad A+3F+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

$R$ kleiner sein, als $R_1$ des vorigen Falles, und dieses ist in der That auch so, es hat $R$ den Werth 1,5138, es umgiebt sich also das ursprüngliche Tetraederchen nach und nach mit vier, die in einiger Entfernung von ihm stehen bleiben und ein grösseres Tetraeder bilden. Die Ecktetraeder zeigen gegen das innere eine Fläche und deren drei nach aussen. Diesen gegenüber sind ursprünglich auch Aethertheilchen, doch werden letztere ebenfalls infolge Fortsetzung des Vorganges abgedrängt, und endlich kommt ein grösserer Körper von der Structur zum Vorschein, die ich in meinen „Moleculargesetzen" in Fig. II dargestellt habe und die im Allgemeinen einen Krystall des tesseralen Systems geben würde. Bei der Art, wie das Kalium dargestellt wird, ist selbstverständlich ein Krystall nicht zu erwarten und es entsteht also an dessen Stelle ein Körper von krystallinischer Structur. Ich habe allerdings noch in keinem Buche gelesen, dass das Kalium krystallisire; allein es ist nicht nothwendig, dass man Krystalle eines Körpers habe, wenn derselbe krystallinisch vorkommt. Das Kalium sieht auf dem frischen Schnitte nicht anders aus, als das Silber, und letzteres ist offenbar krystallinisch, d. h. es besteht aus kleinen Krystallen. Man findet bekanntlich auch kleine Krystalle von Silber; aber diese sehen im Innern nicht anders aus, als das gewöhnliche Silber. Wahrscheinlich sind viele Metalle im festen Zustande krystallinisch, denn selbst das Blei zeigt in dem Bleibaum eine offenbare Neigung zu krystallisiren; und so gut das Blei krystallinisch ist, so gut kann es das Kalium auch sein. Es ist allerdings möglich,

dass das allmälige Abdrängen der Aethertheilchen nicht vollständig eintritt; das kann aber gerade zur Folge haben, dass sich kein Krystall, sondern ein krystallinischer Körper bildet. Denkbar ist es auch, dass einzelne Lagen von Aethertheilchen und Tetraedern auf einander folgen, dass je nach der Temperatur und anderen äusseren Umständen Verschiedenheiten eintreten.

Man kann gegen die vorstehende Ableitung einwenden, dass die Bestimmungen von $R$ und $R_1$ in den Gleichungen 8) bis 12) darum nicht ganz richtig seien, weil eine Verschiedenheit der Werthe von $R$ und $R_1$ jedenfalls auch eine Verschiedenheit der Winkel nach sich zieht, welche die Richtungen von dem mittleren Tetraeder gegen die an den Ecken befindlichen Körper einschliessen. Kleine Verschiedenheiten werden allerdings vorkommen, doch sind die dadurch bedingten Aenderungen der Werthe von $R$ und $R_1$ sicherlich nur unbedeutend und ich habe es darum für unnöthig gehalten, darauf einzugehen. Jedenfalls bezieht sich diese Verschiedenheit nur auf die Uebergangszustände, in denen ein Theil der Ecke durch Tetraeder, der andere Theil durch Aethertheilchen gebildet wird. In dem Anfangs- und Endzustande, welche durch 1) und 12) repräsentirt werden, sind alle Winkel gleich.

**Kalium und Sauerstoff.**

Die Verbindung von Kalium und Sauerstoff bietet allerlei Verschiedenheiten, denn die Bestandtheile können in wechselnder Atomzahl auftreten, es kann die Reihenfolge derselben eine verschiedene sein, und dann ist möglicherweise die Drehung der Atome noch eine abweichende. Ich werde diese Abarten nach einander durchnehmen, beschränke mich aber jedesmal auf die Zusammenstellung dreier besonderer Theile, wie ich dieses auch in meiner vorigen Abhandlung gethan habe.

Verbindung zweier Atome Kalium mit einem Atom Sauerstoff, $K_2O$, Kali oder Kaliumoxyd der Chemiker. Die drei Bestandtheile der Verbindung mögen in der Ordnung aufeinander folgen, dass das Sauerstoffatom in der Mitte ist und zu seinen beiden Seiten sich je ein Kaliumatom befindet, dass sie also die Reihe *KOK* darstellen. Diese Combination hat zwei Varianten: *a)* Es kann das Kaliumatom so gegen den Sauerstoff gestellt sein, dass es diesem eine Tetraederkante zuweist; *b)* es kann dem Sauerstoffatom eine Tetraederfläche zugewendet haben. Da es sich hier nur um das Aufsuchen derjenigen Stellung handelt, bei der die gegenseitige Abstossung ein Minimum wird, so kann man von einer dritten Variante, bei der das Kalium dem Sauerstoffe ein Eck zuweist, absehen.

*a)* Ist dem Sauerstoffe gegenüber eine Kaliumkante, so steht letztere normal auf der Verbindungslinie *KOK*, die Axe des Sauerstoffes, d. i. die Verbindungslinie der Mittelpunkte von dessen Massen- und Aether-

theilchen, steht ebenfalls rechtwinklig auf dieser Verbindungslinie, ist aber gegen die ihm zugewendete Kante des Kaliums um 90 Grade gedreht. Das zweite Kalium, das sich auf der dem ersten diametral entgegengesetzten Seite des Sauerstoffes befindet, weist ebenfalls zwei auf der Verbindungslinie senkrechte Linien auf, von denen die dem Sauerstoff näher liegende wieder um 90 Grade gegen die Sauerstoffaxe gedreht ist. Die zwei einander gegenüber liegenden und die zwei von einander abgewendeten Kanten der beiden Kaliumatome haben also je die nämliche Richtung. Als Bedingungsgleichung des Ruhezustandes ergiebt sich:

$$13)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\left(\frac{2.16}{18,6}-\tfrac{1}{2}\right)\frac{(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$+\left(\frac{2.16}{18,6}-\tfrac{1}{2}\right)\frac{(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{4.39}{18,6}\,\frac{(2R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((2R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{4.39}{18,6}\,\frac{(2R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((2R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\left(16+\tfrac{39}{4}\right)\frac{39}{18,6^2}\,\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\tfrac{3}{2}})^2)^{3/2}}-\frac{1}{2(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2}-\frac{1}{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2}$$
$$-\frac{2R}{\left(R^2+\frac{r^2}{3}\right)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0.$$

Der dieser Gleichung entsprechende Werth von $R$ ist 1,0653.

*b)* Ist dem Sauerstoffe gegenüber beiderseits eine Kaliumfläche, so ist die Axe des Sauerstoffes, wie im vorigen Falle, normal auf der Verbindungslinie der drei Atome; die dem Sauerstoffe zugewandten Flächen der Kaliumatome sind es ebenfalls, die Ecke sind aber so gestellt, dass die Verbindungslinie eines derselben mit dem Flächenmittelpunkte auf der Richtung der Sauerstoffaxe normal steht. Bei dem zweiten Kaliumatom ist dieses ebenso der Fall, aber diesesmal ist der rechte Winkel auf der andern Seite der Sauerstoffaxe, es sind also die beiden Kaliumflächen 60 Grade gegen einander gedreht. Man erhält so die Gleichung:

$$14)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3.16}{18,6}\,\frac{\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\,\frac{1}{(R+r)^2}$$
$$+\frac{6.39}{18,6}\,\frac{\left(2R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(2R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{2.39}{18,6}\,\frac{1}{(2R+r)^2}-\left(16+\tfrac{39}{4}\right)\frac{39}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{8}{9}}\cos 30^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 30^{0\,2}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{8}{9}}\cos 150^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 150^0\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\frac{8}{9})\right)^{3/2}}-\frac{6(2R-\frac{2}{3}r)}{((2R-\frac{2}{3}r^2)+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}-\frac{3(2R-\frac{2}{3}r)}{((2R-\frac{2}{3}r)^2+\frac{32}{9}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{4(R+r)^2}-\frac{6(2R+\frac{2}{3}r)}{((2R+\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0.$$

Hier bekommt $R$ den Werth 1,0832, und ist dieser also grösser als im vorigen Falle.

Benützt man die Reihenfolge der drei Elemente $KKO$, so sind die beiden Kaliumatome gleich gestellt, die sich gegenüberstehenden Kanten sind also gekreuzt. Der Sauerstoff steht gegen das benachbarte Kalium gerade so, wie im ersten Falle. Bedeutet $R$ die gegenseitige Entfernung der beiden Kaliumatome, $R_1$ diejenige von Sauerstoff und dem benachbarten Kalium, so erhält man nachstehende zwei Gleichungen:

$$15)\quad \frac{4.39}{18,6}\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{4.39}{18,6}\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.39}{18,6}\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\left(4+\frac{39^2}{18,6^2}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+\frac{8}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{4(R-2r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-2r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{4}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{4(R+2r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+2r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{4}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{4(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{16.39}{18,6^2}\frac{1}{(R+R_1)^2}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2.39}{18,6}\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.16}{18,6}\frac{(R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.39}{18,6}\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16.39}{18,6^2}\frac{1}{R_1^2}$$

$$-\frac{4(R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{16.39}{18{,}6^2}\frac{1}{(R+R_1)^2}$$
$$-\frac{4(R+R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18{,}6}\right)R_1=0.$$

Hier ist $R=1{,}2553$ und $R_1=1{,}2219$. Beide Werthe sind grösser, als derjenige von $R$ in 13); und da letzterer Werth auch kleiner ist, als $R$ in 14), so ergiebt sich, dass die Stellung 13) das Minimum der Abstossung giebt. Bei dieser Stellung heben sich Anziehung und Abstossung in der Entfernung $R=1{,}0653$ gerade auf, während sich die Theilchen in den anderen Stellungen und in der Entfernung 1,0653 abstossen würden, und darum ist 13) diejenige Position und Reihenfolge, welche wir als die in der Natur vorkommende zu betrachten haben.

Verbindung von einem Atom Kalium mit einem Atom Sauerstoff, $KO$. (Erstes) Kaliumhyperoxyd. Ersetzt man das eine Kaliumatom in 13) oder 14) durch ein Aethertheilchen, so dass also die Reihe $KOA$ zum Vorschein kommt, wenn man dem Aethertheilchen das Zeichen $A$ giebt, so entsteht ein Kaliumhyperoxyd. Auch hier giebt es wieder mehrere Varianten, von denen jede möglicherweise ein Minimum der Abstossung bietet. Es kann bei dem Kalium eine Kante, es kann eine Fläche normal auf der Verbindungslinie der Theilchen stehen.

Im ersten dieser zwei Fälle, in welchem eine Kaliumkante auf der Verbindungslinie normal steht, thut dieses auch die Sauerstoffaxe, und letztere ist gegen die ihr nächstliegende Kaliumkante um 90 Grade gedreht. Ist $R$ die Entfernung $KO$, $R_1$ die Entfernung $OA$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$16)\quad \frac{2.39}{18{,}6}\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18{,}6}\frac{(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{2.16}{18{,}6}\frac{(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{39}{18{,}6}\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.39}{18{,}6^2}\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18{,}6}\right)R=0$$

und

$$\frac{16}{18,6}\frac{1}{R_1^2}+\frac{39}{18,6}\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

Es ist $R=0,9427$ und $R_1=1,1206$.

Bei der zweiten Stellung, wenn also das Kalium dem Sauerstoff eine Fläche zuwendet, erhält man:

$$17)\quad \frac{3.16}{18,6}\frac{\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{2.39}{18,6}\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\frac{1}{(R+r)^2}$$
$$+\frac{39}{18,6}\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.39}{18,6^2}\frac{1}{R^2}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 30^0)^2+r^2\sin 30^{0\,2}\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 150^0)^2+r^2\sin 150^{0\,2}\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\frac{8}{9})\right)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}-\frac{3\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}$$
$$+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{39}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}$$
$$-\frac{3\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+R_1=0.$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe $R=1,0073$ und $R_1=1,1053$. Es ist also $R$ gegen den vorigen Fall bedeutend gewachsen, während $R_1$ nur unbedeutend abgenommen hat, und es ist demnach die Stellung 16) der Stellung 17) vorzuziehen.

Ist die Reihenfolge der drei Körper $OKA$, so kann ein Minimum der Abstossung nur dann eintreten, wenn das Kaliumatom so gestellt ist, dass eine Kante senkrecht auf der Verbindungslinie steht und dass die Sauerstoffaxe gegen die ihr nächstliegende Kaliumkante um 90 Grade gedreht ist. In diesem Falle sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$18)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.39}{18,6^2}\,\frac{1}{R^2}$$

$$-\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{39}{18,6^2}\,\frac{1}{R_1^{\,2}}+\frac{16}{18,6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2(R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

$R(OK)$ ist $=1,1538$ und $R_1(KA)=1,2910$.

Die Vergleichung dieses Resultates mit demjenigen der Gleichungen 16) zeigt eine grosse Verschiedenheit der Werthe von $R$ und $R_1$, während man glauben sollte, dass es gleichgiltig wäre, ob das Kalium auf der einen oder auf der andern Seite des Sauerstoffes sich befindet. Die Verschiedenheit könnte sich etwa dadurch ausgleichen, dass der Aether jenseits des Sauerstoffes etwas anders gruppirt ist, als jenseits des Kaliums, und unter dieser Bedingung müsste sich die Gleichheit der Werthe von $R$ in 16) und 18) erzielen lassen. Es dürfte jedoch überflüssig sein, hier weitere Untersuchungen anzustellen, da die Verbindung $KO$ wahrscheinlich gar nicht existirt. Das Kaliumsuperoxyd bildet sich, wenn Kalium in Sauerstoff verbrannt wird. Hierbei findet eine bedeutende Temperaturerhöhung und mit ihr ein heftiges Schwingen der Atome statt. Da kommt es nun vor, dass zu beiden Seiten eines Sauerstoffmoleculs je ein Kaliumatom sich anhängt und analog dem Wasserstoffhyperoxyd das Kaliumhyperoxyd sich bildet. Die gegenseitige Entfernung zweier Sauerstoffatome in dem Molecul beträgt 0,8930*, und während die Distanz zweier Kaliumatome nach 12) 1,5138 beträgt, ist nach 16) der Abstand von Kalium und Sauerstoff 0,9427. Geht das Kaliumatom von den übrigen Kaliumatomen weg und schliesst es sich einem Sauerstoffmolecul an, so findet hier jedenfalls eine bedeutende Annäherung statt. Da die Vorgänge bei erhöhter Temperatur stattfinden, während vorstehende Gleichungen den absoluten Nullpunkt voraussetzen, können allerdings noch Aenderungen in den Werthen der Anziehungen und Abstossungen eintreten; allein der Hauptsache nach dürfte doch das obige Resultat stehen bleiben.

---

* Meine zweite Abhandlung, diese Zeitschrift XXVI, 6, S. 345.

**Verbindung eines Atoms Kalium mit zwei Atomen Sauerstoff, $KO_2$. (Zweites) Kaliumhyperoxyd.** Wenn ein Atom Kalium sich mit zwei Atomen Sauerstoff verbindet, so sind unter den verschiedenen möglichen Zusammenstellungen folgende Fälle zu betrachten.

*a)* Die Reihenfolge der drei Atome ist gegeben durch $OKO$ oder *b)* durch $KOO$, und in letzterem Falle kann wieder das Kalium eine Kante oder eine Fläche dem Sauerstoffe zuwenden.

Ist die Reihenfolge $OKO$ gegeben, so stehen zwei sich entgegengesetzte Kaliumkanten normal auf der Verbindungslinie und die dem Sauerstoffe zugewendete Kante ist gegen die Sauerstoffaxe gekreuzt. Es ergiebt sich nun die Gleichung:

$$19)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{4.16}{18,6}\,\frac{2R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\left(\frac{16.39+4.16}{18,6^2}\right)\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{4.2.R}{(4R^2+2r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0.$$

Dieser Gleichung genügt $R=1,1672$.

*b)* Wenn die Reihenfolge der Atome $KOO$ ist und das Kalium dem Sauerstoff eine Kante zuwendet, so ist die erste Sauerstoffaxe gegen diese Kante gekreuzt, die Axe des zweiten Sauerstoffes ist jedoch wieder gegen die des ersten um 90 Grade gedreht, läuft also mit der nächsten Kaliumkante parallel. Bezeichnet man die Entfernung $KO$ mit $R$, $OO$ mit $R_1$, so erhält man die Gleichungen:

$$20)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.39}{18,6}\,\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{16.39}{18,6^2}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{4(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{4.16.R_1}{18{,}6(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.39}{18{,}6}\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{2.16}{18{,}6}\frac{(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{2}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18{,}6}\frac{(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{39.16}{18{,}6^2}\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16^2}{18{,}6^2}\frac{1}{R_1^2}-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{4(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18{,}6}\right)R_1=0.$$

Diese zwei Gleichungen sind erfüllt, wenn $R=0{,}9640$, $R_1=1{,}0234$ ist.

Ist die Reihenfolge die nämliche, wie im vorigen Falle, ist aber das Kalium so gestellt, dass eine seiner Flächen senkrecht auf der Verbindungslinie steht, so befindet sich dieser gegenüber ein Sauerstoffatom, dessen Axe ebenfalls normal auf der Verbindungslinie steht und ausserdem noch rechtwinklig gegen eine Gerade, die man von dem Mittelpunkte der Kaliumfläche gegen eines der drei Ecke ziehen kann. Die Axe des zweiten Sauerstoffatoms ist gegen die des ersten wieder um 90 Grade gedreht. Unter diesen Umständen ergeben sich die Gleichungen:

$$21)\quad \frac{2.39}{18{,}6}\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.39}{18{,}6}\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3.16}{18{,}6}\frac{\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}$$
$$+\frac{3.16}{18{,}6}\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\left(\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{1}{(R+R_1+r)^2}\right)$$
$$-\frac{39.16}{18{,}6^2}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 30^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 30^{0\,2}\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 30^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 30^{0\,2}\right)^{3/2}}$$
$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\frac{8}{9})\right)^{3/2}}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}})^2\right)^{3/2}}-\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\frac{8}{9}})^2\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 60^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 60^{0\,2}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 60^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 60^{0\,2}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+R_1+r)}{((R+R_1+r)^2+r^2)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{4.16}{18,6}\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.39}{18,6}\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{3.16}{18,6}\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\frac{1}{(R+R_1+r)^2}$$

$$-\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}})^2\right)^{3/2}}-\frac{\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\frac{8}{9}})^2\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 60^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 60^{0\,2}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{8}{9}}\cos 60^0)^2+\frac{8}{9}r^2\sin 60^{0\,2}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+R_1+r)}{((R+R_1+r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16.39}{18,6^2}\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16^2}{18,6^2}\frac{1}{R_1^2}-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}$$

$$+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R_1=0.$$

Hier haben wir $R(KO)=1,0022$ und $R_1(OO)=1,0103$.

Das Minimum der Abstossung bei dem zweiten Kaliumsuperoxyd ist durch die Gleichungen 20) gegeben und es ist die ihnen zu Grunde liegende Stellung als die der Natur entsprechende anzunehmen. Die Verbindung entsteht, wenn Kalium bei genügender Quantität des Sauerstoffs in letzterem verbrennt, und der Vorgang ist der, dass bei den während

des Verbrennens stattfindenden Schwingungen je ein Kaliumatom sich einem Sauerstoffmolecul anschliesst.

Im Nachstehenden ist eine Zusammenstellung der drei Oxyde des Kaliums gegeben. Die zwischen den einzelnen Theilchen stehenden Zahlen geben die jeweilige Entfernung für den Stand der geringsten Abstossung.

Oxyd.

*K* *O* *K*

13) 1,0653 1,0653.

Erstes Hyperoxyd.

*K* *O* *A*

16) 0,9427 1,1206

oder auch

*K* *O* *O* *K*.

Zweites Hyperoxyd.

*K* *O* *O*

20) 0,9640 1,0234.

Die Vergleichung ergiebt, das die Entfernung *KO* unter allen drei Oxyden bei dem ersten den grössten Werth hat, und dadurch ist es erklärlich, dass bei gehöriger Quantität des anwesenden Sauerstoffes bei dem Verbrennen des Kaliums sich nicht Oxyd, sondern Superoxyd bildet. Soll Oxyd gebildet werden, so muss eine Trennung der Sauerstoffmolecule in Atome stattfinden, was wegen der geringen Entfernung der Atome im Sauerstoffmolecule (0,8930) seine Schwierigkeiten hat. Leichter geht die Verbindung bei den Superoxyden vor sich, weil hier nur der Anschluss eines oder zweier Kaliumatome an ein Sauerstoffmolecul stattfindet. Hat sich auf der einen Seite eines Sauerstoffatoms ein Kaliumatom angeschlossen, so rückt nach 20) auf der andern Seite das zweite Sauerstoffatom weiter weg (von 0,8930 auf 1,0234), und eine vollständige Abtrennung wird dadurch eingeleitet. Man stellt das Kaliumoxyd dar, indem man eines der Superoxyde mit soviel Kalium glüht, dass bei gleichmässiger Vertheilung des Sauerstoffs auf je zwei Kaliumatome ein Sauerstoffatom trifft. Das erste Superoxyd wird also mit soviel Kalium geschmolzen, als schon darin ist, das zweite Superoxyd mit der dreifachen Menge. Wird das zweite Superoxyd verwendet, so nimmt jedes Sauerstoffmolecul noch ein zweites Kaliumatom auf und es entsteht ein Doppelatom des ersten Superoxyds. Bei der Bildung des zweiten Superoxyds hat sich das erste Atom Kalium bis auf 0,9640 an seinen Sauerstoff angeschlossen; dafür aber ist das zweite Sauerstoffatom auf der andern Seite des ersten aus seiner ursprünglichen Entfernung 0,8930 bis 1,0234 weggerückt. Legt sich nun auch auf der Seite dieses zweiten Sauerstoffatoms nochmals ein Kaliumatom an, so muss dieses ein aber-

maliges Auseinanderrücken der Sauerstoffatome nach sich ziehen, und dieses braucht von 1,0234 gar nicht mehr weit zu gehen, um die Grenze 1,0653 zu überschreiten. Sowie nun in der Verbindung *KOOK* die Entfernung *OO* die Grenze 1,0653 überschritten hat, tritt die Verbindung *KOK* in ihr Recht ein und es schieben sich zwischen die beiden Sauerstoffatome zwei Atome Kalium ein, da dieselben eine geringere Distanz von dem Sauerstoff beanspruchen; es bilden sich zwei Molecule *KOK*. So geht die Zerlegung der Sauerstoffmolecule, die direct nicht möglich war, auf indirectem Wege vor sich.

## Kalium und Wasserstoff.

Ehe ich auf die Beziehungen zwischen Kalium und Wasserstoff eingehe, muss ich eine kleine Erörterung über den auf das Wasserstoffatom ausgeübten Aetherdruck vorausschicken. Dieser Druck ist bei einer gegebenen Kugel dem Radius proportional, und er sucht ein Aethertheilchen gegen den Mittelpunkt zu führen, während bei dem Massentheilchen das Entgegengesetzte stattfindet. Die kleinsten Theilchen der Körper, die man Atome zu nennen pflegt, sind mit mehr oder weniger Aethertheilchen verbundene Massenkugeln, und die Wirkung, die der äussere Aether auf ein Atom ausübt, ist daher eine gemischte. Ist die Zahl der Aethertheilchen eines Atoms grösser als 1, so gruppiren sie sich so, dass ihre Gesammtwirkung derart ist, als seien die Aethertheilchen alle in dem Mittelpunkte des Massentheilchens vereinigt, und es wurde darum im Vorstehenden der auf ein Kaliumatom ausgeübte äussere Druck durch $\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R$ bezeichnet, weil die Zahl der mit der Massenkugel verbundenen Aethertheilchen 4 ist und das Kaliummassentheilchen die Wirkung von $\frac{39}{18,6}$ Aethertheilchen neutralisirt, während die Entfernung von dem Mittelpunkte der um das mittlere Molecul gezogenen Kugel $R$ beträgt. Bei dem Wasserstoffe, der nur ein einziges Aethertheilchen hat, ist die Sache etwas anders, denn der Werth von $R$ ist verschieden, je nachdem man von dem Mittelpunkte der Kugel zum Mittelpunkte des Massentheilchens oder zu demjenigen des Aethertheilchens rechnet. In meiner vorigen Abhandlung habe ich analog dem Verfahren bei den anderen Elementen die Grösse $R$ bis zu dem Mittelpunkte der Massenkugel gemessen, doch sind mir gegen dieses Verfahren Bedenken gekommen. Das Aethertheilchen wirkt (allerdings im entgegengesetzten Sinne) 18,6 mal so stark als das Massentheilchen, und es dürfte daher vorzuziehen sein, die Grösse $R$ bis zu dem Aethertheilchen zu messen. Thut man dieses, so erhält $R$ einen um die Distanz der zwei Mittelpunkte, also um $r$ oder 0,37296 grössern Werth, und ist in der vorigen Abhandlung (Gleichg. 5)

bei dem Wasser $R = 0{,}6158$ gefunden worden, so ist $R$ für das Aethertheilchen $0{,}6158 + 0{,}3730 = 0{,}9888$. Es handelt sich hier nur darum, was man als den Repräsentanten des Atomes betrachtet. Ist $R = 0{,}9888$ angenommen, so kann dieser Annahme wieder der Vorwurf gemacht werden, dass, wenn auch das Massentheilchen weniger stark wirkt, als das Aethertheilchen, es doch nicht ganz vernachlässigt werden dürfe, und ich habe daher vorgezogen, das $R$ bis zu einem Punkte zu messen, der zwischen Aethertheilchen- und Massentheilchenmittelpunkt ist, und zwar um so näher an ersterem, je mehr dessen Wirkung überwiegt. Wird also die Distanz $r = 0{,}37296$ in 19,6 Theile getheilt, so ist die Entfernung des Mittelpunktes des Druckes von dem Aethermittelpunkte 1, von dem Massenmittelpunkte 18,6. Ich bestimme nun im Nachstehenden für die Wasserstoffatome die Grösse $R$ als die Entfernung des Aethertheilchens und ziehe dann $\frac{0{,}37296}{19{,}6} = 0{,}0190$ ab. Bei dem Wasser ist, wie oben erwähnt, die Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel bis zu demjenigen des Wasserstoffmassentheilchens 0,6158, bis zu dem Mittelpunkte des Aethertheilchens $0{,}6158 + 0{,}3730 = 0{,}9888$ und bis zum Mittelpunkte des Druckes $0{,}9888 - 0{,}0190 = 0{,}9698$. Ein analoges Verfahren ist nöthig, wenn man die Entfernungen der Wasserstoffatome, die in der vorigen Abhandlung bestimmt sind, mit den nachstehenden vergleichen will.

Verbindung von einem Atom Kalium mit einem Atom Wasserstoff. Wenn man die Reihe Wasserstoff, Kalium und Aether zusammenstellt, so richtet sich das Kalium so, dass es dem Wasserstoff eine Kante zuwendet; beide Theilchen des Wasserstoffes liegen in der Verbindungslinie, das Massentheilchen ist dem Kalium zugewendet. Ist $R$ die Entfernung $HK$, $R_1$ die Entfernung $KA$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$22)\quad \frac{39}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R^2} + \frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R - r(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}))}{[(R - r(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}))^2 + \tfrac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$
$$+ \frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R - r(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}))}{[(R - r(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}))^2 + \tfrac{2}{3}r^2]^{3/2}} + \frac{1}{18{,}6\,(R + R_1 - r)^2}$$
$$- \frac{2(R - r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R - r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 + \tfrac{2}{3}r)^{3/2}} - \frac{2(R + r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R + r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 + \tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R + R_1)^2}$$
$$- \frac{39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R - r)^2} + \frac{17{,}6}{18{,}6}R + \frac{r}{18{,}6} = 0$$

und

$$\frac{39}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{18{,}6\,(R + R_1 - r)^2} - \frac{2(R_1 - r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R_1 - r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 + \tfrac{2}{3}r^2)}$$
$$- \frac{2(R_1 + r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R_1 + r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 + \tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R + R_1)^2} + R_1 = 0.$$

Hieraus entziffert sich $R = 1{,}2521$, und ist $P$ die Entfernung des Mittelpunktes des Druckes von dem Kalium, so ist $P = 1{,}2521 - 0{,}0190 = 1{,}2331$. $R_1$ hat den Werth 1,2778.

Verbindung von einem Atom Kalium und zwei Atomen Wasserstoff. Hier ist gegen den vorigen Fall die Aenderung eingetreten, dass das Aethertheilchen durch ein Wasserstoffatom ersetzt wurde, so dass also die Reihe $HKH$ entstanden ist. Hier kommt die Gleichung:

$$23)\ \left(\frac{39}{18{,}6}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R-r(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}))}{[(R-r(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}))^2+\tfrac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$
$$+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R-r(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}))}{[(R-r(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}))^2+\tfrac{2}{3}r^2]^{3/2}}+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{1}{(2R-r)^2}-\left(\frac{39+\tfrac{1}{4}}{18{,}6^2}\right)\frac{1}{(R-r)^2}$$
$$-\frac{2(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R+\frac{r}{18{,}6}=0.$$

$R$ hat den Werth 1,2492, also ist $P = 1{,}2492 - 0{,}0190 = 1{,}2302$.

Man erkennt aus den Werthen von $P$ in den vorstehenden Gleichungen, dass die Verbindung von Kalium und Wassertoff jedenfalls nur eine sehr lockere sein kann, wenn überhaupt eine solche existirt, was durchaus nicht sicher ist. In dem Lehrbuche der Chemie von Graham-Otto, 4. Aufl., II, 2, S. 106, befindet sich hierüber nachstehende Angabe: „Wasserstoffkalium. Wird Kalium in Wasserstoff erhitzt, so mengt sich dem Gase Kaliumdampf bei; das Gas erhält die Eigenschaft, sich an der Luft zu entzünden und unter Bildung von alkalischen Nebeln zu verbrennen. Bei dem Erkalten setzt sich das Kalium aus dem Gase wieder ab. Sementini, welcher das Auftreten eines solchen selbstentzündlichen Wasserstoffgases bei der Darstellung des Kaliums (mit Hilfe von Kalihydrat und Eisen) beobachtete, hielt dasselbe für ein Kaliumwasserstoffgas.“ Dieses Kaliumwasserstoffgas zerlegt sich also bei dem Erkalten und da die vorstehenden Formeln für 0° absoluter Temperatur gelten, so ist der grosse Werth von $P$ dahin zu deuten, dass die fragliche Verbindung in diesem Falle nicht existirt.

### Kalium, Sauerstoff und Wasserstoff.

Sollen diese drei Körper sich verbinden, so giebt es verschiedene Zusammenstellungen. Die Reihe kann sein: $KOH$, wobei wieder das Kalium dem Sauerstoffe eine auf der Verbindungslinie normale Kante oder eine auf der Verbindungslinie normale Fläche zugewendet haben kann. Die Reihe $KOH$ kann jedoch auch durch $OKH$ ersetzt werden.

Bei der Reihe $KOH$ mit auf der Verbindungslinie rechtwinkligen Kanten des Kaliums ist die Axe des Sauerstoffes gegen die ihr zugewendete Kaliumkante gekreuzt. Das Massentheilchen des Wasserstoffes ist dem Sauerstoffe zugewendet. Man erhält nun als Gleichgewichtsbedingungen:

$$24)\quad \frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.16}{18,6}\,\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{39}{18,6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}$$

$$+\frac{2}{18,6}\,\frac{((R+R_1-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))}{[(R+R_1-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$

$$+\frac{2}{18,6}\,\frac{(R+R_1-r(1-\sqrt{\frac{1}{3}}))}{[(R+R_1-r(1-\sqrt{\frac{1}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$

$$-\frac{16.39}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{39}{18,6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2}{18,6}\,\frac{(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\,\frac{1}{R_1^2}+\frac{39}{18,6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}$$

$$+\frac{2}{18,6}\,\frac{(R+R_1-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))}{[(R+R_1-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$

$$+\frac{2(R+R_1-r(1-\sqrt{\frac{1}{3}}))}{18,6\,[(R+R_1-r(1-\sqrt{\frac{1}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$

$$-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16}{18,6^2}\,\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{2(R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+R_1+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{39}{18,6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}+\frac{17,6}{18,6}R_1+\frac{r}{18,6}=0.$$

Hier ist $R$ die Distanz $KO$ und berechnet sich zu 0,9339, während $R_1=1,0991$ ist. Die Entfernung des Mittelpunktes des Druckes des Wasserstoffes von dem Sauerstoffe ist $1,0991-0,0190=1,0801$.

Hat das Kalium dem Sauerstoffe eine Fläche zugewendet, so ergeben sich als Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$25)\quad \frac{3.16}{18,6}\,\frac{\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+\frac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\,\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{2.39}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{3}{18,6}\,\frac{(R+R_1-\frac{4}{3}r)}{((R+R_1-\frac{4}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}+\left(\frac{1+39}{18,6}\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.39}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\frac{8}{9})\right)^{3/2}}-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2+\frac{2}{9}r^2\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2\left(R-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{3}\right)^2+r^2(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2+\tfrac{2}{9}r^2\right)^{3/2}}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{3\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\tfrac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}-\frac{39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$

$$+\left(4-\frac{39}{18{,}6}\right)R=0$$

und

$$\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\left(\frac{1+39}{18{,}6}\right)\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{3}{18{,}6}\,\frac{(R+R_1-\frac{4}{3}r)}{((R+R_1-\frac{4}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}$$

$$-\frac{3\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)}{\left(\left(R+R_1-\frac{r}{3}\right)^2+\tfrac{8}{9}r^2\right)^{3/2}}-\frac{39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R_1+\frac{r}{18{,}6}=0.$$

Hier kommt man zu den Werthen $R(KO)=1{,}0020$ und $R_1=1{,}0860$ oder, nach Abzug von $0{,}0190$, $=1{,}0670$.

Bei Benützung der Reihenfolge $OKH$ ergeben sich die Gleichungen:

$$26)\quad \frac{2.16}{18{,}6}\,\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{2.16}{18{,}6}\,\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{2.39}{18{,}6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{16.39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{R^2}-\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{5}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1-\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+r^2(1+\sqrt{\frac{2}{3}})^2)^{3/2}}-\frac{16}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$

$$-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18{,}6}\right)R=0$$

und

$$\frac{39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))}{[(R-r(1+\sqrt{\frac{1}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}$$

$$+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R-r(1-\sqrt{\frac{2}{3}}))}{[(R-r(1-\sqrt{\frac{2}{3}}))^2+\frac{2}{3}r^2]^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\,\frac{1}{(R+R_1)^2}$$

$$+\frac{2}{18{,}6}\,\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{39}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{2(R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R_1-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{16}{18{,}6^2}\,\frac{1}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{17{,}6}{18{,}6}R_1+\frac{r}{18{,}6}=0.$$

Hier ist die Entfernung $R(OK)=1{,}1534$ und $R_1-0{,}0190=1{,}2435$.

Die Vergleichung der Werthe von $R$ und $R_1$ in 24), 25) und 26) ergiebt, dass die Stellung 24) ein Minimum der Abstossung bietet, und die beiden anderen Voraussetzungen können daher einstweilen ausser Berücksichtigung bleiben.

Bei 24) muss sofort die bedeutende Annäherung des Kaliums an den Sauerstoff auffallen, und es besteht demnach, um mich in der Sprache der Chemiker auszudrücken, zwischen Kalium und Sauerstoff eine sehr grosse Verwandtschaft. Weniger gross ist die Annäherung des Wasserstoffes an den Sauerstoff, sie ist sogar kleiner als bei dem Wasser. In der Verbindung $KOK$ ist nach 13) die Entfernung $KO = 1{,}0653$, sie ist also kleiner, als die Entfernung $HO$ in 24) $= 1{,}0801$, und durch Glühen von Kaliumoxydhydrat mit ebensoviel Kalium, als schon darin ist, wird unter Abscheidung von Wasserstoff aus $KOH$ die Verbindung $KOK$ hergestellt. In Graham-Otto* heisst es: „Auch durch Erhitzen von 1 Aeq. Kalihydrat mit 1 Aeq. Kalium lässt sich wasserfreies Kaliumoxyd erhalten, indem das Kalium durch den Sauerstoff des Hydratwassers oxydirt wird: $KO$ $(O = 8)$, $HO$ und $K$ geben $2KO$ und $H$. Dies dürfte noch der bequemste Weg zur Darstellung sein."

Bringt man Kalium und Wasser zusammen, so wird Wasserstoff ausgeschieden und Kalihydrat gebildet. Die Entfernung $OH$ im Wasser ist nach dem, was oben hierüber erwähnt wurde, $= 0{,}9698$. Kommt nun Kalium hinzu, so kann sich dieses näher an den Sauerstoff legen, als ein Wasserstofftheilchen es zu thun vermag, und letzteres muss weg. Sowie nun das Kalium an seine Stelle getreten ist, rückt das zweite Wasserstofftheilchen des früheren Wassers von dem Sauerstoffe weg, es entfernt sich nach 24) bis 1,0801 und darum wird es möglich, dass auch dieses zweite Wasserstoffatom abgeschieden wird; doch geht es jetzt weniger leicht, als bei dem ersten Atom, denn die hier ausschlaggebende Differenz 1,0801 (24) — 1,0653 (13) ist bedeutend kleiner, als im vorigen Falle 0,9689 — 0,9339.

* A. a. O. S. 93.

(Schluss folgt.)

# Kleinere Mittheilungen.

---

## XVI. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen.

Die um zwei Punkte als Brennpunkte beschriebenen Ellipsen sind die einzigen ebenen Curven von der Eigenschaft, dass jeder von dem einen Punkte ausgehende Lichtstrahl nach dem andern Punkte reflectirt wird.

Sind nun eine ebene Curve $c$ und zwei Punkte $A$ und $B$ in ihrer Ebene gegeben, so gelangt man zu jenen Punkten von $c$, an welchen ein von $A$ ausgehender Lichtstrahl reflectirt werden muss, damit er nach $B$ zurückgeworfen werde, auf folgende Weise. Man denke in der Ebene der $c$ um $A$ und $B$ als Brennpunkte die kleinste Ellipse beschrieben, welche mit der Strecke $AB$ doppelt zusammenfällt; denke sodann unter Beibehaltung dieser Brennpunkte die grosse Axe derselben stetig vergrössert, so dass die immer sich erweiternde Ellipse über die ganze Ebene der Curve fortschreitet. Diese Ellipse wird nach und nach $c$ in allen ihren Punkten schneiden, und zwar in den meisten Punkten $M_i$ einfach, in einigen besonderen Punkten $P_k$ in zwei oder mehr zusammenfallenden Punkten. Die Curve und die Ellipse werden sich in diesen letzteren Punkten berühren; von Doppel- und Rückkehrpunkten wird abgesehen. In den Punkten $P_k$ und $M_i$ haben $c$ und die Ellipse gemeinsame, beziehungsweise nicht gemeinsame Tangenten, ein von $A$ nach $P_k$ oder $M_i$ gelangender Strahl wird also von $c$ nach $B$ reflectirt oder nicht.

Diese Punkte haben aber noch eine andere interessante Eigenschaft. Denkt man nämlich die einen Punkt $P_k$ enthaltende Ellipse mit den Brennpunkten $A$ und $B$ beschrieben, so ist die Summe der Entfernungen eines ausserhalb oder innerhalb dieser Ellipse befindlichen Punktes von den Punkten $A$ und $B$ grösser oder kleiner als der gebrochene Weg $AP_kB$. Daraus folgt, dass der Weg $AP_kB$ kleiner oder grösser ist, als jeder benachbarte Weg von $A$ über einen $P_k$ benachbarten Punkt von $c$ nach $B$, je nachdem nämlich die $P_k$ benachbarten Punkte von $c$ ausserhalb oder innerhalb der $P_k$ enthaltenden Ellipse liegen. Nur wenn die $P_k$ benachbarten Punkte von $c$ einerseits dieses Punktes innerhalb, andererseits desselben ausserhalb jener Ellipse liegen, $c$ und die Ellipse also 3, 5, ... unendlich nahe Punkte gemein haben, ist der Weg $AP_kB$ weder ein Minimum, noch ein Maximum.

Tritt an Stelle der ebenen Curve $c$ in der vorhergehenden Untersuchung eine unebene Curve oder eine Fläche und an Stelle der veränderlichen Ellipse ein Rotationsellipsoid mit den Brennpunkten $A$ und $B$, so kann das oben abgeleitete Resultat verallgemeinert und folgender Satz ausgesprochen werden:

Die Zeit, welche ein von einem Punkte ausgehender Lichtstrahl bedarf, um nach der Reflexion an einer Curve oder Fläche nach einem zweiten Punkte zu gelangen, ist im Allgemeinen kleiner oder grösser, als jene Zeit, welche das Licht brauchen würde, wenn es vom ersten Punkte über irgend einen dem reflectirenden benachbarten Curven- oder Flächenpunkt zum zweiten Punkte ginge.

Zu diesem Satze kann leicht ein analoger für die Brechung des Lichtes an Curven oder Flächen auf folgendem Wege gefunden werden. In zwei Mitteln habe eine gewisse Lichtstrahlengattung die Geschwindigkeiten $nc$ und $c$, so dass der Brechungsexponent $n$ ist. Welches ist die ebene Trennungscurve dieser zwei Mittel, welche die Eigenschaft hat, dass ein sich im ersten Mittel bewegender, einen Punkt $A$ enthaltender Lichtstrahl an jener Curve so gebrochen wird, dass der gebrochene Strahl einen zweiten gegebenen Punkt $B$ enthalte? „Ein Lichtstrahl enthält einen Punkt" hat hier und im Folgenden die Bedeutung, dass der Lichtstrahl entweder von diesem Punkte herkomme oder sich gegen diesen Punkt bewege.

Die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten der Punkte $A$, $B$ irgend eines Punktes $M$ der gesuchten Curve und eines Punktes $T$ der Curventangente $MT$ seien: $0, a$; $0, b$; $x, y$; $\xi, \eta$. Dann sind die Gleichungen der Geraden $AM$, $BM$, $MT$ beziehungsweise

$$\eta x - \xi(y-a) - ax = 0,$$
$$\eta x - \xi(y-b) - bx = 0,$$
$$\eta \quad - \xi\, y' - y \; + xy' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\cos AMT = \frac{x+(y-a)y'}{\sqrt{(1+y'^2)[x^2+(y-a)^2]}},$$
$$\cos BMT = -\frac{x+(y-b)y'}{\sqrt{(1+y'^2)[x^2+(y-b)^2]}}.$$

Nach dem Brechungsgesetze ist

$$\cos AMT : \cos BMT = n$$

oder mit Hilfe der oben gefundenen Werthe nach Multiplication mit $\sqrt{1+y'^2}$

$$\frac{x+(y-a)y'}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + n \cdot \frac{x+(y-b)y'}{\sqrt{x^2+(b-y)^2}} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2} + n \cdot \sqrt{x^2+(y-b)^2} = const.$$

Die Curve von der geforderten Beschaffenheit ist hiernach ein Cartesisches Oval.

Zu dem eben gefundenen Oval führt aber auch die Frage nach der Trennungscurve obiger zwei Mittel, welche die Eigenschaft hat, dass die Zeit $t$, welche das Licht braucht, wenn es sich von $A$ bis zu irgend einem Curvenpunkte mit der Geschwindigkeit $nc$ und dann von diesem Curvenpunkte bis $B$ mit der Geschwindigkeit $c$ bewegt, constant sei.

Es ist für diesen Fall

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}{nc}+\frac{\sqrt{x^2+(y-b)^2}}{c}=t$$

oder

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2}+n\sqrt{x^2+(y-b)^2}=nct.$$

Diese Gleichung stimmt mit der oben gefundenen vollkommen überein, wenn man die Constante der obigen gleich $nct$ setzt.

Das jetzt auf zweifache Art bestimmte Cartesische Oval hat folgende Eigenschaften:

Jeder $A$ enthaltende, sich im ersten Mittel bewegende Lichtstrahl wird in irgend einem Ovalpunkte $Q_l$ so gebrochen, dass der gebrochene Strahl den Punkt $B$ enthält. Weiters ist die Zeit, welche das Licht zur Zurücklegung der Strecke $AQ_l$ mit der Geschwindigkeit $nc$ und der Strecke $Q_lB$ mit der Geschwindigkeit $c$ braucht, constant.

Es seien nun wieder jene Punkte einer gegebenen ebenen Curve, welche die Mittel mit den Lichtgeschwindigkeiten $nc$ und $c$ trennt, aufzusuchen, welche die Eigenschaft haben, dass ein $A$ enthaltender Lichtstrahl in einem solchen Punkte so gebrochen wird, dass der gebrochene Strahl $B$ enthält.

Man findet diese Punkte in ganz analoger Weise wie früher die reflectirenden Punkte $P_k$. An Stelle der sich dort stetig erweiternden Ellipse tritt hier das sich durch Vergrösserung von $t$ stetig erweiternde Oval. Und wenn man dann die Untersuchung auch auf unebene Gebilde erweitert, zu welchem Zwecke an Stelle des Ovals eine Rotationsfläche tritt, deren Rotationsaxe $AB$ und deren Meridian jenes Oval ist, so gelangt man zu folgendem Satze:

Wird ein den Punkt $A$ enthaltender, sich im ersten Mittel bewegender Lichtstrahl im Punkte $Q_l$ an der Trennungslinie oder Trennungsfläche zweier Mittel so gebrochen, dass der gebrochene Strahl den Punkt $B$ enthält, so ist die Zeit, welche der Lichtstrahl zur Zurücklegung der Strecke $AQ_l$ mit der Geschwindigkeit $nc$ und des Weges $Q_lB$ mit der Geschwindigkeit $c$ bedarf, im Allgemeinen kleiner oder grösser als jene Zeit, welche er zur Zurücklegung eines Weges von $A$ über irgend einen $Q_l$ benachbarten Curven- oder Flächenpunkt nach $B$ brauchen würde.

Nicht unwichtig scheint noch die Bemerkung, dass man vollkommen aplanatische Linsen construiren könnte, wenn an Stelle der gebräuch-

lichen sphärischen Begrenzung der Linsen jene durch Stücke der früher erwähnten, durch Rotation von Cartesischen Ovalen entstandenen Flächen gesetzt würden.

Travnik in Bosnien, 1. Mai 1882. JOHANN MORAWETZ.

---

## XVII. Zur Theorie der Punktmengen.

In der Abhandlung S. 193, sowie in der Mittheilung S. 176 dieses Jahrganges habe ich gezeigt, dass, wenn auf einer endlichen Linie unendlich viele Theilpunkte gegeben sind, die unendliche Reihe, deren Glieder die abnehmend oder wenigstens nie zunehmend geordneten Theilstrecken sind, zur Summe auch dann nicht nothwendig die ganze Linie hat, wenn keine noch so kleine Strecke durch die Theilpunkte in lauter unendlich kleine Theile zerlegt ist, während man bis dahin das Gegentheil annahm und, freilich vergeblich, zu beweisen suchte. Eben dasselbe hat Herr Harnack in einer vorigen Herbst veröffentlichten, mir erst jetzt zu Gesichte gekommenen, ebenfalls die Fourier'sche Reihe zum Gegenstande habenden Abhandlung dargethan. Dass auch für die Anordnung von Punkten auf einer Fläche Aehnliches gilt, ist weder in meiner oben genannten Abhandlung, noch in derjenigen Harnack's erwähnt und überhaupt diese Seite des Gegenstandes dort nicht berührt worden; in der Mittheilung S. 176 aber habe ich Andeutungen darüber gegeben, zu welchen ich hier Einiges hinzufügen will. Zunächst lasse ich ein einfaches Beispiel folgen für Punkte auf einer Linie; das in obiger Abhandlung gewählte ist weniger einfach, weil ich bei diesem noch einen Nebenzweck hatte.

Eine gerade Strecke werde durch zwei Theilpunkte in drei Theile, ein Mittelstück, zwei Endstücke, zerlegt, von welchen die beiden letzteren gleich sind. Jedes der beiden Endstücke werde auf gleiche Weise behandelt, jedes der dann erhaltenen vier Endstücke ebenso und so ins Unendliche fort. Die Zahl der Endstücke verdoppelt sich nach jeder Theilung, wird also nach der $m^{\text{ten}}$ Theilung $= 2^m$. Die Grösse derselben soll sich nach der Formel

$$E_m = a\, b^{-\frac{p}{2^m}} E_{m-1}$$

bestimmen, wo $E_m$ eines der Endstücke nach der $m^{\text{ten}}$ Theilung ist. Hiermit ist dann zugleich festgesetzt, dass nach jeder Theilung die Endstücke nicht blos paarweise, sondern sämmtlich einander gleich sind. Es ist $b > 1$, $p$ positiv, $\frac{1}{2} \geqq a > 0$. Nennt man die ganze Strecke $l$, so ist eines der Endstücke nach der $m^{\text{ten}}$ Theilung

$$E_m = a^m\, b^{-p\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2}\right)} l.$$

Da die Zahl derselben $= 2^m$, so ist also ihre Summe

$$\Sigma E_m = (2a)^m b^{-p\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2}\right)} l,$$

mithin die Summe der bis zur $m^{ten}$ Theilung inclusive erhaltenen Mittelstücke

$$= \left[1-(2a)^m b^{-p\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2}\right)}\right] l.$$

Für $m=\infty$ wird dies $=l$ oder $<l$, je nachdem $a<\frac{1}{2}$ oder $a=\frac{1}{2}$ ist. Dem geometrischen Charakter der Theilung nach aber ist kein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Fällen. Wenn ich **Häufungspunkt** einer Theilung jeden Punkt nenne, in dessen beliebiger Nähe unendlich viele Theilpunkte liegen, wenn ich ferner solche Punkte, welche irgend eine Strecke in lauter unendlich kleine Theile zerlegen, als **geschlossene Punktfolge** bezeichne, so hat obige Punktmenge in beiden Fällen die Eigenthümlichkeit, dass jeder Theilpunkt ein Häufungspunkt ist und dass dennoch gar keine geschlossenen Punktfolgen vorhanden sind.

Aus einem Quadrate $=Q$ werde ein Kreuz herausgeschnitten, so dass vier gleiche Quadrate übrig bleiben. Jedes dieser Quadrate werde auf gleiche Weise behandelt und so ins Unendliche fort. Die Zahl der Quadrate ist nach der $m^{ten}$ Theilung $=4^m$. Die Grösse derselben sei durch die Formel bestimmt

$$Q_m = a^m b^{-p\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2}\right)} Q.$$

Nach der $m^{ten}$ Theilung ist also die Summe derselben

$$= (4a)^m b^{-p\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2}\right)} Q,$$

mithin die aus sämmtlichen Kreuzen bestehende zusammenhängende und (geometrisch) das ganze Quadrat einnehmende Fläche

$$= \left[1-(4a)^m b^{-p\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2}\right)}\right] Q.$$

Für $m=\infty$ ist dies $=Q$ oder $<Q$, je nachdem $a<\frac{1}{4}$ oder $a=\frac{1}{4}$ ist. Betrachtet man die Ecken der aus den Kreuzen bestehenden Fläche als singuläre Punkte einer Function, so sind diese sämmtlich Häufungspunkte der Singularitäten und können, wenn $a=\frac{1}{4}$, nicht in Flächen eingeschlossen werden, welche zusammen beliebig klein sind. Man kann auf der genannten Fläche, wie auf jeder andern, eine Function durch den Randwerth ihres reellen Theiles bestimmen, wenigstens wenn an den Rändern der zur $m^{ten}$ Theilung gehörigen Kreuze jener Randwerth mit $\frac{1}{m}$ gegen Null convergirt. Wählt man nun diesen Randwerth so, dass derselbe in allen Eckpunkten endliche Unstetigkeiten hat, so erhält auch die Function ebensolche Unstetigkeiten.

Frankenthal i. d. Pfalz. W. VELTMANN.

## XVIII. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate.

1. Bekanntlich bietet die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht selten eine besondere Schwierigkeit, sobald die Function, von welcher eine Reihe beobachteter Werthe vorliegt, in Bezug auf die zu bestimmenden unbekannten Constanten nicht linear ist, also entweder eine höhere algebraische oder eine transcendente. Gauss giebt für Fälle dieser Art die Vorschrift, man solle zuerst aus soviel Beobachtungen, wie Constanten zu bestimmen sind, angenäherte Werthe dieser Constanten berechnen und sodann, indem man die Function nach Massgabe der noch fehlenden Correctionen in Reihen entwickelt und von diesen Reihen nur die ersten Potenzen dieser Correctionen beibehält, die so umgeformte Function der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen. Es ist augenscheinlich, dass man auf diese Weise eine Function erhält, welche in Beziehung auf die gesuchten Correctionen linear ist, und somit wäre scheinbar Alles in Ordnung. Aber Gauss selbst hat, unseres Wissens, seine Vorschrift niemals anders, als auf lineare Functionen selbst angewandt, wo die Anwendung derselben unmittelbar evident ist, und bezweckt damit im Grunde nur eine Erleichterung der Rechnung, welche dadurch eintritt, dass man mit kleineren Zahlen zu thun bekommt. Dagegen in Fällen, wo die Functionen nicht linear sind, hat man in der Regel im Voraus gar keine Garantie dafür, dass in den gedachten Reihenentwickelungen die zweiten und höheren Potenzen der Correctionen wirklich weggelassen werden dürfen und nicht vielmehr diese Weglassung einen so bedeutenden Einfluss ausübt, um die ganze Rechnung illusorisch zu machen. Uns ist mehr als ein Beispiel bekannt, wo man im vollen Vertrauen eine Rechnung in der vorbezeichneten Weise unternahm, jedoch für die gesuchten Correctionen so grosse Werthe fand, ja grösser als die zu corrigirenden Werthe selbst, dass das Resultat geradezu unmöglich war und die Rechnung aufgegeben werden musste.

2. Es ist kaum abzusehen, ob diese Schwierigkeit jemals allgemein beseitigt werden kann. Wohl aber sind wir dahin gelangt, zu entdecken, dass dies für eine gewisse Classe von Functionen allerdings möglich ist, nämlich wenn es gelingt, die gegebene Function durch die gewöhnlichen Operationen in eine andere umzuformen, welche linear ist, wie z. B.

$$y = e^{a+bx} \quad \text{in} \quad \log y = a \log e + bx \log e,$$
$$y = \sin(a+bx) \quad \text{in} \quad \arcsin y = a + bx$$

etc., wo die neuen Functionen linear in Bezug auf die unbekannten Constanten $a$ und $b$ geworden sind. In Fällen dieser Art ist es immer möglich, die Werthe dieser Constanten vollkommen genau aus den neuen Functionen zu bestimmen, sobald man dabei nur einen Satz beachtet, den wir hier geben, wie folgt.

3. **Lehrsatz.** Wenn von einer Function $y$ eine Reihe von beobachteten Werthen $M$ etc., mit den Gewichten $p$ etc. versehen, gegeben ist, so kann man zur Bestimmung der in der Function enthaltenen unbekannten Constanten, anstatt die Summe der Fehlerquadrate dieser Function zu einem Minimum zu machen, vollkommen correct auch so verfahren, dass man die Summe der Fehlerquadrate einer beliebigen Function von $y$, welche $f(y)$ sei, zu einem Minimum macht, dabei jedoch jeder Beobachtung ein Gewicht $p'$ beilegt, welches zu dem vorigen $p$ in der Beziehung steht

$$\frac{p}{p'} = k \cdot \left(\frac{d f(M)}{dM}\right)^2,$$

wo $k$ eine willkürliche und für alle Beobachtungen identische positive Constante bedeutet.

Der Beweis liegt einfach darin, dass, wenn für dieselben Werthe der in der Function $y$ enthaltenen Constanten gleichzeitig sowohl

$$\Sigma p (y - M)^2,$$

als auch

$$\Sigma p' [f(y) - f(M)]^2$$

ein Minimum werden soll, dieses nur so möglich ist, dass alle Theile der einen Summe, Glied für Glied, den entsprechenden Theilen der andern Summe entweder gleich oder von denselben um einen für alle Theile identischen positiven Factor verschieden sind. Nennt man $k$ diesen Factor, so muss man also haben

$$\frac{p(y-M)^2}{p'[f(y) - f(M)]^2} = k \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p'} = k \cdot \left(\frac{f(y) - f(M)}{y - M}\right)^2,$$

woraus, da man für das Verhältniss der kleinen Differenzen $f(y) - f(M)$ und $y - M$ ohne Fehler das Verhältniss der Differentiale setzen darf, unmittelbar der oben gegebene Ausdruck folgt.

4. In den Anwendungen verfügen wir zur Vereinfachung der Rechnung über die willkürliche Constante $k$ so, dass, wenn der Ausdruck

$$\left(\frac{d f(M)}{dM}\right)^2$$

einen constanten Factor liefert, d. h. welcher für alle Beobachtungen den nämlichen Werth hat, wir das Product aus $k$ mit diesem Factor $= 1$ setzen. Ist ein solcher Factor nicht vorhanden, so nehmen wir unmittelbar $k = 1$.

So, wenn in dem obigen Beispiel die Function

$$y = e^{a + bx}, \quad \text{Gewicht} = p,$$

umgeformt wird in

$$\log y = a \log e + bx \log e, \quad \text{Gewicht} = p',$$

erhalten wir

$$p' = p M^2,$$

mit welchem Gewicht die Constanten dieser letzten Function, $a \log e$ und $b \log e$, berechnet werden müssen.

Ebenso, wenn in dem zweiten obigen Beispiel die Function

$$y = \sin(a+bx), \quad \text{Gewicht} = p,$$

umgeformt wird in

$$\arcsin y = a + bx, \quad \text{Gewicht} = p',$$

erhalten wir

$$p' = p(1-M^2).$$

5. Wir setzen noch hinzu, dass nicht selten eine gegebene Function auf mehr als eine Art sich in eine lineare Function umformen lässt, so dass man auswählen kann. Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn man aus

1) $$y = a^x, \quad \text{Gewicht } 1$$

ableitet

2) $$\log y = x \log a, \quad \text{Gewicht } M^2,$$

3) $$\frac{\log y}{x} = \log a, \quad \text{„} \quad x^2 M^2,$$

4) $$y^{\frac{1}{x}} = a, \quad \text{„} \quad x^2 M^{2-\frac{2}{x}}.$$

Wir haben ein numerisches Beispiel zur Bestimmung der unbekannten Constante $a$ nach allen diesen vier Gleichungen, mit den hier beigesetzten Gewichten, durchgerechnet und die Arbeit in 2), 3) und 4) nahe gleich gross gefunden, während sie in 1), wo der Weg der successiven Annäherung eingeschlagen werden musste und, wie wir hinzusetzen, mit Erfolg eingeschlagen werden konnte, ohne Vergleich grösser war. Das Endresultat der vier Rechnungen war genau dasselbe.

Hannover, im Juni 1882. Prof. Dr. THEODOR WITTSTEIN.

---

## XIX. Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale.

Von O. SCHLÖMILCH.

Bekanntlich hat Legendre die vollständigen elliptischen Integrale $F^{I}(k)$ und $E^{I}(k)$ in Reihen entwickelt, die nach Potenzen des complementären Modulus $k'$ fortschreiten, also in dem Falle einen Vortheil gewähren, wo $k$ wenig kleiner als die Einheit ist. Die von Legendre gegebene Herleitung kommt darauf hinaus, die beiden Differentialgleichungen

$$(1-k^2)\frac{d^2 F^{I}}{dk^2} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{dF^{I}}{dk} - F^{I} = 0,$$

$$(1-k^2)\frac{d^2 E^{I}}{dk^2} + \frac{1-k^2}{k} \cdot \frac{dE^{I}}{dk} - E^{I} = 0$$

durch unendliche Reihen mit unbestimmten Coefficienten zu integriren; sie ist daher schon an sich nicht ganz einwurfsfrei und würde sich überdies auf andere als elliptische Integrale nicht ohne Weiteres anwenden lassen. Vielleicht erscheint deshalb der Nachweis nicht ganz überflüssig, dass das allgemeinere Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu (1-k^2x^2)^{1-\mu}}, \quad 0<\mu<1,$$

mit geringem Rechnungsaufwande nach Potenzen von $k'$ entwickelt werden kann.

Wenn in dem Doppelintegrale

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta\,.\,dx\,d\vartheta}{(1-x^2)\cos^2\vartheta+(1-k^2x^2)\sin^2\vartheta}$$

das eine Mal unter Anwendung der bekannten Formel

$$1)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\vartheta\,\sin^{2q-1}\vartheta}{(a\cos^2\vartheta+b\sin^2\vartheta)^{p+q}}\,d\vartheta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)}\cdot\frac{1}{a^pb^q}$$

nach $\vartheta$, das andere Mal nach $x$ integrirt wird, so entsteht die Gleichung

$$\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\,l\left(\frac{1+\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}{1-\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\right)d\vartheta;$$

die rechte Seite kann in der Form

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\left\{l\left(\frac{2}{k'}\right)+l\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right)-l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\right)\right\}d\vartheta$$

dargestellt werden, und somit ist

$$2)\qquad \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} = 2(P+Q-R),$$

wo $P$, $Q$, $R$ selbstverständliche Abkürzungen bedeuten.

Der Werth von $P$ findet sich durch Entwickelung von $(1-k'^2\sin^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}$ und Integration der einzelnen Terme nach Nr. 1; er ist

$$3)\qquad P = l\left(\frac{2}{k'}\right)\cdot\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n k'^{2n}.$$

Das Summenzeichen bezieht sich hier auf die Werthe $n = 0, 1, 2, 3$ etc.; $(n-\mu)_n$ bezeichnet den $n^{ten}$ Binomialcoefficienten für den Exponenten $n-\mu$.

Die zur analogen Entwickelung von $Q$ erforderliche Formel erhält man aus Nr. 1) für $a = b = 1$ und durch partielle Differentiation nach $q$, nämlich

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1}\vartheta \sin^{2q-1}\vartheta \, l \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)}\left\{\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)} - \frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}\right\}$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der Gammafunctionen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1}\vartheta \sin^{2q-1}\vartheta \, l\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{4\,\Gamma(p+q)}\int_0^1 \frac{1-z^p}{1-z} z^{q-1}\, dz.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4)\qquad t_n = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{-\mu}-1}{1-z} z^n\, dz,$$

so gelangt man zu dem Werthe

$$5)\qquad Q = \frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n t_n k'^{2n}.$$

Um drittens $R$ zu entwickeln, sei vorerst bemerkt, dass bei echt gebrochenen $\varrho$ der Ausdruck

$$l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^\varrho \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}-1\right)\frac{d\varrho}{\varrho}$$

in die Potenzenreihe $\frac{1}{4}\varrho + \frac{3}{32}\varrho^2 +$ etc. verwandelt werden kann, dass also auch eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right) = \alpha_1\varrho + \alpha_2\varrho^2 + \ldots$$

bestehen muss. Multiplicirt man mit $\sqrt{1-\varrho}$, differenzirt nach $\varrho$, multiplicirt mit $2\sqrt{1-\varrho}$, entwickelt linker Hand $\sqrt{1-\varrho}$ und vergleicht die beiderseitigen Coefficienten von $\varrho^{n-1}$, so erhält man die Recursionsformel

$$2n\alpha_n - (2n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)},$$

welche durch Substitution von

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\beta_n$$

übergeht in

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Zur Abkürzung sei noch

$$6)\qquad s_{2n} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n};$$

es ist dann $\beta_n = s_{2n}$; hieraus folgt $\alpha_n$ und

$$7)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right) = \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\, s_{2n}\varrho^n,$$

wobei $s_0 = 0$ zu nehmen ist, wenn die Summirung mit $n = 0$ beginnen soll. Als Werth von $R$ findet sich nun

$$8)\qquad R = \frac{\pi}{2\sin\mu\pi} \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,(n-\mu)_n\, s_{2n}\, k'^{2n},$$

und aus den Formeln 2), 3), 5), 8) zusammen

$$9)\qquad \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu\,(1-k^2x^2)^{1-\mu}}$$

$$= \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,(n-\mu)_n \left[l\left(\frac{2}{k'}\right) - s_{2n} + t_n\right] k'^{2n}.$$

Im speciellen Falle $\mu = \frac{1}{2}$ wird $t_n = l2 - s_{2n}$ und

$$F^{\mathrm{I}}(k) = \sum \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^2 \left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 2s_{2n}\right] k'^{2n},$$

was mit Legendre's Angabe übereinstimmt.

Bei sehr kleinen $k'$ reducirt sich die Reihe in Nr. 9) auf ihren Anfangsterm; es ist also näherungsweise

$$10)\qquad \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} = l\left(\frac{2}{k'}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1-z^\mu}{1-z}\cdot\frac{dz}{z^\mu}$$

und z. B. für $\mu = \frac{3}{4}$ und $\mu = \frac{1}{4}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3(1-k^2x^2)}} = l\left(\frac{1}{k'}\right) + \tfrac{5}{2}l2 + \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)^3}} = l\left(\frac{1}{k'}\right) + \tfrac{5}{2}l2 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Als beiläufige Folgerung aus Nr. 10) möge noch die Relation

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1-\mu}(1-k^2x^2)^\mu} - \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} = \tfrac{1}{2}\pi\cot\mu\pi$$

Erwähnung finden.

(Aus den Sitzungsberichten der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch.)

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Recensionen.

**Die Elemente der Differential- und Integralrechnung.** Zur Einführung in das Studium dargestellt von Axel Harnack, o. Professor der Mathematik am Polytechnikum zu Dresden. Leipzig, B. G. Teubner. 1881.

Bei der ersten Einführung in die Differential- und Integralrechnung wird die Fülle neuer Begriffe, die zu verarbeiten sind, dem Lehrer sowohl, wie dem Lernenden immer gewisse Schwierigkeiten bereiten. Will man den Versuch machen, gleich von Anfang an mit voller Allgemeinheit und Strenge zu Werke zu gehen, so dürfte ein solcher Versuch leicht an der Klippe scheitern, dass der Anfänger Manches zu bewältigen hätte, was über sein Fassungsvermögen hinausgeht, dessen Nothwendigkeit und Zweck er nicht einmal vollständig einzusehen im Stande ist. Man wird daher am Anfang stets eine bedeutende Beschränkung der Allgemeinheit eintreten lassen müssen, und die Anschauung wird stets das kräftigste Hilfsmittel bilden müssen, um den Lernenden in der neuen Welt heimisch und mit ihren Begriffen vertraut zu machen, ehe er an die volle Allgemeinheit und Schärfe derselben herantritt.

Es soll damit nicht gesagt sein, dass der erste Unterricht in der Differential- und Integralrechnung auf Strenge und Richtigkeit in der Beweisführung nothwendig verzichten müsse; aber gewisse beschränkende Voraussetzungen, die dem Anfänger selbstverständlich erscheinen und durch alle ihm bekannten Beispiele bestätigt werden, wird man stillschweigend oder ausgesprochenermassen zunächst machen müssen, und es dürfte nicht allzuschwer sein, auf Grund dieser ein consequentes und einwurfsfreies Lehrgebäude der Differential- und Integralrechnung aufzuführen.

Erst auf einer etwas höheren Stufe, auf der das Einfachste schon vorausgesetzt werden kann, wird es möglich sein, mit Erfolg die allgemeinen Begriffe der Function, der Stetigkeit, der Differentialquotienten u. s. f. in den Unterricht einzuführen. Dieser Ansicht ist auch der Verfasser des uns zur Besprechung vorliegenden Werkes, wie aus dem Eingange der Vorrede zu ersehen ist; sein Werk ist hiernach nicht, wie

man nach dem Titel anzunehmen geneigt sein könnte, für die erste Einführung in die höhere Analysis bestimmt, sondern dasselbe will als eine Ergänzung eines ersten elementaren Unterrichts betrachtet werden für Solche, welche wissenschaftliche Ziele verfolgen und nicht blos zu praktischen Zwecken mit diesen Dingen sich befassen.

Das Streben des Verfassers ist in erster Linie auf eine möglichst allgemeine und präcise Fassung der Grundbegriffe und Beweisführung gerichtet; die geometrischen und sonstigen Anwendungen, die in den meisten Lehrbüchern einen breiten Raum einnehmen und auf die der Unterricht auch nicht gern verzichten wird, treten infolge dessen in dem vorliegenden Werke naturgemäss zurück.

Mit der Art und Weise, wie der Verfasser sein Ziel zu erreichen sucht, können wir uns im Wesentlichen durchaus einverstanden erklären. Auch ist die Darstellung meist elegant und klar. Nur in einzelnen Punkten wäre vielleicht ein weiteres Eingehen und grössere Ausführlichkeit den Zwecken des Buches angemessen gewesen. So scheint uns z. B. der Beweis des Satzes S. 155, 156, dass eine durch eine Potenzreihe im Convergenzkreise definirte Function in der Umgebung eines jeden im Innern des Convergenzkreises gelegenen Punktes nach Potenzen entwickelbar ist, in dieser Fassung kaum verständlich. Auch die Definition des Doppelintegrals (S. 309 flg.) scheint uns durch die kurze Hinweisung auf die Analogie mit den einfachen Integralen nicht hinlänglich klar gelegt zu sein. Es müsste jedenfalls noch die Bedingung hinzugefügt und in ihren Folgen besprochen werden, dass auch die Schwankungen der Werthe der unabhängigen Variablen in den Elementen $\tau_1, \tau_2, \dots$ unendlich klein werden müssen, dass nicht z. B. diese Elemente unendlich schmale Streifen von endlicher Länge sein dürfen.

Auch der auf S. 157 bewiesene Satz, dass eine durch eine Potenzreihe dargestellte Function im Innern des Convergenzkreises nicht in unendlich vielen Punkten verschwinden kann, bedarf einer etwas genaueren Präcisirung. Zuerst wäre nämlich zu beweisen, dass, falls im Innern eines endlichen Gebietes unendlich viele Punkte irgend einer Art liegen, im Innern oder am Rande dieses Gebietes ein Punkt existirt, in dessen Umgebung sich diese Punkte unendlich nahe zusammendrängen, und sodann ist für die Giltigkeit des zu beweisenden Satzes noch die Beschränkung nöthig, dass dieser Punkt nicht auf der Peripherie des Convergenzkreises liegt. Ohne diese Beschränkung ist der Satz nicht allgemein richtig, wie das Beispiel der Function $\sin\frac{\pi}{z-c}$ zeigt, welche in einem Kreise mit dem Radius $c$ nach Potenzen von $z$ entwickelbar ist und doch für jedes $z$ von der Form $c-\frac{1}{n}$ für ein beliebiges ganzzahliges $n$ verschwindet.

Was Auswahl und Begrenzung des Stoffes anlangt, so sind dieselben mit Glück und Geschmack so getroffen, dass der Umfang des Werkes ein mässiger geworden ist, ohne dass ein wesentlicher Punkt vermisst würde. Aus dem Inhalt des Buches heben wir nur Einzelnes hervor.

Der Verfasser beginnt seine Auseinandersetzungen mit einem kurzen Ueberblick über die Operationen mit rationalen Zahlen und geht dann, veranlasst durch das Problem des Wurzelziehens, zur Einführung der irrationalen Zahlen über, welche er in der von Heine mitgetheilten, von Weierstrass herrührenden Art erklärt.

Statt nun, wie es in den elementaren Darstellungen gebräuchlich ist, von den durch Grössenoperationen definirten einfachen Functionen allmälig zu den zusammengesetzten fortzuschreiten und so den Functionsbegriff synthetisch aufzubauen, geht der Verfasser von dem allgemeinen Functionsbegriffe aus, erläutert die Begriffe der Stetigkeit, des Differentialquotienten, und giebt dann erst die Regeln für die Berechnung der Differentialquotienten der einfachen Functionen.

Es versteht sich von selbst, dass auch die complexen Grössen und die Functionen derselben eine eingehende Berücksichtigung finden Nachdem zuerst die fundamentalen Rechenoperationen mit solchen Grössen erklärt sind und damit zugleich der Begriff der elementaren Functionen derselben gewonnen ist, wird auch hier der Functionsbegriff zunächst allgemein gefasst und die analytische Function durch die Forderung der Existenz eines von der Richtung unabhängigen Differentialquotienten erklärt. Dies führt zur geometrischen Darstellung solcher Functionen durch die conforme Abbildung. Die allgemeinen Definitionen werden sodann angewandt auf die durch Potenzreihen dargestellten Functionen und insbesondere auf die impliciten algebraischen Functionen, welche zur Einführung der mehrblättrigen Flächen und der Verzweigungspunkte Anlass geben.

Ein analoger Gang ist für die Integralrechnung festgehalten. Auch hier wird zunächst der Integralbegriff für reelle Variable eingehend erörtert und zunächst die Aufgabe der Integralrechnung als die Umkehrung von der der Differentialrechnung gefasst und zunächst die Existenz des Integrals einer stetigen Function als Grenzwerth einer Summe nachgewiesen. In einem späteren Capitel kommt der Verfasser auf diesen Begriff in viel allgemeinerer Fassung zurück, in welchem das bestimmte Integral in der strengen und allgemeinen, zuerst von Riemann angegebenen Weise definirt und die Bedingungen seiner Existenz eingehend discutirt werden. Nachdem auch noch die mehrfachen und insbesondere die Doppelintegrale besprochen sind, schliessen sich naturgemäss die Integrale complexer Variablen an. Die auf diese Weise gewonnenen Grundlagen für eine allgemeine Theorie der analytischen Functionen complexer Variablen werden sodann in den beiden letzten Capiteln auf

die eindeutigen und schliesslich auf die mehrdeutigen, insbesondere die algebraischen Functionen und ihre Entwickelung angewandt; dass das weite Gebiet der algebraischen Integrale, welches sich hier naturgemäss anschliessen würde, nicht mehr betreten ist, können wir nur billigen.

Möge dieser flüchtige Ueberblick über den Inhalt genügen, zu zeigen, dass das Buch, dem wir den besten Erfolg wünschen, dem Lehrer sowohl, als Lernenden eine willkommene Gabe sei.

Königsberg, im März 1882. H. Weber.

---

**Zur Integration der linearen Differential-Gleichungen.** Festschrift zur dritten Säcularfeier der k. Julius-Maximilians-Universität verfasst von Dr. Aloys Mayr, öff. ord. Professor der Mathematik und Astronomie an genannter Universität. Würzburg, 1881. 4°. 28 S.

Der Herr Verfasser verfolgt in dieser Schrift den Zweck, angebliche Irrthümer in der bisherigen Behandlung linearer Differentialgleichungen aufzudecken und vor Verirrungen auf diesem Gebiete zu warnen. Im ersten Abschnitte, welcher überschrieben ist: „Die partikularen Integrale der linearen Differentialgleichungen von der Form $d^n y + X_0 d^{n-1} y + X_1 d^{n-2} y + \ldots + X^n y = 0$“, werden zwei Methoden zur Ermittelung solcher Integrale, die Construction und die Reihenentwickelung, besprochen und durch Beispiele erläutert, ohne dass, ausser einer weiter unten zur Sprache kommenden unrichtigen Behauptung, etwas Neues beigebracht würde. Der zweite Abschnitt behandelt: „Die Quellen der Irrthümer bei der Integration durch partikulare Integrale.“ Als vor einer ersten solchen Quelle wird davor gewarnt, verschiedene partikulare Integrale einander gleich zu setzen. An einer so augenfälligen Klippe, an welcher doch wohl nur Anfänger scheitern könnten, eine Warnungstafel aufzurichten, dürfte unseres Erachtens überflüssig sein. Als zweite Quelle von Irrthümern wird die Gleichsetzung eines singulären und eines partikularen Integrals bezeichnet. Dies soll nach der Meinung des Herrn Verfassers geschehen sein bei der binomischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - xy = 0,$$

welche bekanntlich durch bestimmte Integrale von der Form

$$\int_0^{\varrho\infty} e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du,$$

wo $\varrho$ eine der Wurzeln der Gleichung $\varrho^{n+1} - 1 = 0$ ist, integrirt wird. Indem der Herr Verfasser hier unter dem Integralzeichen, also vor Ausführung der Integration, statt $u$ den Grenzwerth $-\infty$ einsetzt, kommt er zu dem Fehlschlusse, dass dieses Integral Null sei, und äussert sich

nun über die Integrationsmethode, welche dazu geführt hat, wie folgt: „Dies heisst auf Umwegen das singuläre Integral $y=0$ suchen, das man schon *a priori* kennt.“ Mit welcher Naivetät der Herr Verfasser sowohl hier, als an anderen Stellen einerseits seinen Mangel an Sachkenntniss an den Tag legt und andererseits über anerkannte, von ihm aber nicht verstandene Resultate der Wissenschaft abspricht, mögen die Bemerkungen zeigen, welche er an die Bedingungsgleichung $A_1+A_2+\ldots+A_{n+1}=0$ für die $n+1$ Integrationsconstanten des vollständigen Integrals obiger Differentialgleichung anknüpft. „Diese Bedingung ist nothwendig“, heisst es S. 10, „da man merkwürdigerweise für eine Differentialgleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades $(n+1)$ partikulare Integrale mit $(n+1)$ Constanten findet, während die Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades nur $n$ partikulare Integrale und $n$ willkürliche Constanten haben kann. Uebrigens weiss man nicht, aus welcher Operation diese Bedingung abgeleitet wird. Denn die $(n+1)$ partikularen Integrale bleiben dennoch, während das totale Integral nur $n$ partikulare Integrale haben kann. Jedes dieser partikularen Integrale ist gleich Null, und $y=0$ bleibt Null, auch wenn man tausend Nullen mit willkürlichen Constanten zusammenfasst. Man kann nun wohl das gefundene Integral mit geistreichen Reflexionen erläutern; der Bodensatz bleibt aber immer, dass man ein singuläres Integral für ein totales genommen und ausgegeben hat.“ Auf der folgenden Seite (Zusatz 3) heisst es weiter: „Auch $dy-xy=0$ gehört unter $d^ny-xy=0$. Nun giebt $dy-xy=0$ das Integral $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ und die recensirte Methode ergäbe

$$y=A_1\left(\int_0^{\infty}e^{ux-\frac{1}{2}u^2}\,du-\int_0^{-\infty}e^{ux-\frac{1}{2}u^2}\,du\right).$$

Es gehört Muth dazu, diese beiden Integrale einander gleich zu setzen.“

Wohlan, wir besitzen diesen Muth, wir Anderen. Denn man hat

$$\int_0^{\infty}e^{ux-\frac{1}{2}u^2}\,du-\int_0^{-\infty}e^{ux-\frac{1}{2}u^2}\,du=\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}(e^{ux}+e^{-ux})\,du$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\left(1+\frac{u^2x^2}{1.2}+\frac{u^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)du;$$

und da

$$\int_0^{\infty}u^{2m}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du=1.3.5\ldots(2m-1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ist, so ergiebt sich

$$y=2A_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4.1.2}+\frac{x^6}{8.1.2.3}+\ldots\right)=Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Der dritte Abschnitt mit der Ueberschrift: „Die Bessel'sche Function und verwandte Functionen“ enthält nichts Neues ausser der irrigen

Behauptung, auf welche, da sie auch im ersten Abschnitte vorkommt, bereits oben angespielt wurde, dass nämlich der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\,\frac{\partial y}{\partial x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

neben dem bekannten partikularen Integral

$$y_1=\int x^\nu \cos ux(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

auch noch das andere

$$y_2=\int x^\nu \sin ux(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

welches bisher „übersehen" worden sein soll, entspreche. Dieses letztere Integral, welches der Herr Verfasser mit $Y_\nu$ bezeichnet und als Bessel'sche Function zweiter Art betrachtet wissen will, genügt nämlich der Bessel'schen Differentialgleichung gar nicht, ausser wenn seine Grenzen $-1$ und $+1$ sind; in diesem Falle aber ist es Null und stellt blos die allen linearen Differentialgleichungen gemeinsame singuläre Lösung $y=0$ dar. Denn substituirt man

$$y=\int_{u_1}^{u_2} x^\nu \sin ux(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

in obige Differentialgleichung, so findet man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=x^{\nu-1}\left(\cos u_1 x(1-u_1^2)^{\nu+\frac{1}{2}}-\cos u_2 x(1-u_2^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right),$$

wo die rechte Seite nur dann Null wird, wenn man $u_1=-1$, $u_2=+1$ (oder umgekehrt) nimmt; in diesem Falle aber ist jenes Integral, wie man mit einem Blicke erkennt, identisch Null. Für alle anderen Werthe der Grenzen verschwindet die rechte Seite der Gleichung nicht; nimmt man z. B. $u_1=0$, $u_2=1$, so genügt

$$y=\int_0^1 x^\nu \sin ux(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

wohl der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=x^{\nu-1},$$

nicht aber der Bessel'schen.

Wenn der Herr Verfasser in dem auf S. 16 gegebenen Beispiel ($\nu=\frac{1}{2}$) gleichwohl das zweite partikulare Integral richtig angiebt, so ist dies die Folge eines groben Versehens, indem er aus der Gleichung

$$\int\limits_0^1 x^{5/2} \sin ux (1-u^2)^2 \, du$$
$$= 8x^{-1/2} \cos x - 24x^{-3/2} \sin x - 24x^{-5/2} \cos x + x^{3/2} + 4x^{-1/2} + 24x^{-5/2}$$

die drei letzten Glieder der rechten Seite einfach weglässt.

Das Integral
$$y = \int x^{\nu} \sin ux (1-u^2)^{\nu - 1/2} \, du$$
genügt also der Bessel'schen Differentialgleichung nur dann, wenn es gleich Null ist. Indem somit der Herr Verfasser die singuläre Lösung $y=0$ für ein partikulares Integral ausgiebt, verfällt er gerade in den Irrthum, welchen er (bei der obigen binomischen Gleichung) fälschlich Anderen zur Last legt, und liefert, ohne es zu wollen, das einzige uns bekannte Beispiel für eine derartige Verirrung. Seine Träume von einer Fülle neuer und schöner Lehrsätze über Bessel'sche Functionen, welche aus der Combination der beiden partikularen Integrale $y_1$ und $y_2$ hervorgehen sollen, zerrinnen hiermit ebenfalls in Nichts, da das eine dieser Integrale beharrlich gleich Null ist.

Das zweite partikulare Integral der Bessel'schen Differentialgleichung wird, wie Referent seinerzeit gezeigt hat,* in einer namentlich auch für die numerische Berechnung unmittelbar bereiten Form dadurch gefunden, dass man den Begriff der Bessel'schen Function auch auf solche mit negativem Index ausdehnt. Dies geschieht mit Hilfe der endlichen Reihe

$$J^{\nu}_{(z)} = (-1)^n \Big\{ J^{2n+\nu}_{(z)} - 2 \, . \, \frac{n(n+\nu)}{z} J^{2n+\nu-1} + 2^2 \, . \, \frac{n(n-1)(n+\nu)(n+\nu-1)}{1\,.\,2\,.\,z^2} J^{2n+\nu-2}_{(z)} - + \ldots \Big\},$$

welche, so lange $\nu > -\frac{1}{2}$ ist, mit der ursprünglich durch ein bestimmtes Integral oder durch eine convergente unendliche Reihe definirten Bessel-schen Function sich vollkommen deckt. Setzt man darin $-\nu$ statt $\nu$ und wählt das positiv ganze $n$ so, dass $n > \nu - \frac{1}{2}$ ist, so kommen in der Reihe zur Rechten nur solche Bessel'sche Functionen vor, deren Index $> -\frac{1}{2}$ ist, und welche demnach durch bestimmte Integrale oder durch convergente unendliche Reihen ohne Anstand darstellbar sind. Die Gleichung

$$J^{-\nu}_{(z)} = (-1)^n \Big\{ J^{2n-\nu}_{(z)} - 2 \, . \, \frac{n(n-\nu)}{z} J^{2n-\nu-1}_{(z)} + 2^2 \, . \, \frac{n(n-1)(n-\nu)(n-\nu-1)}{1\,.\,2\,.\,z^2} J^{(2n-\nu-2)}_{(z)} - + \ldots \ldots + (-2)^n \, . \, \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)\ldots(2-\nu)(1-\nu)}{z^n} J^{n-\nu}_{(z)} \Big\}$$

* Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868.

mit der Bedingung $n > \nu - \frac{1}{2}$ wurde daher als Definition der Bessel'schen Function mit negativem Index aufgestellt. Hiermit ist eine Function gegeben, welche die nämlichen Gesetze befolgt, wie die ursprünglich definirte Bessel'sche Function $J^\nu$, und insbesondere, obgleich im Allgemeinen wesentlich von dieser verschieden, die Bessel'sche Differentialgleichung befriedigt und sonach das zweite partikulare Integral derselben darstellt. In dem oben erwähnten Beispiel ($\nu = \frac{5}{2}$) findet man auf diese Weise zu dem ersten partikularen Integral

$$A_1 J^{5/2} = C_1(-x^{-1/2} \sin x - 3x^{-3/2} \cos x + 3x^{-5/2} \sin x)$$

sofort das richtige zweite partikulare Integral

$$A_2 J^{-5/2} = C_2(x^{-1/2} \cos x - 3x^{-3/2} \sin x - 3x^{-5/2} \cos x).$$

Aus der obigen allgemeinen Definitionsgleichung ergiebt sich nun für ein ganzes $\nu$ $(= n)$ die speciellere

$$J^{-n} = (-1)^n J^n$$

als Definition, welche festsetzt, was (den Anschauungen des Referenten gemäss) unter der Bessel'schen Function mit negativ ganzem Index zu verstehen sei. Diese Definition ist, wenn man, wie Referent es gethan hat, die Bessel'sche Function als eine Function zweier Veränderlichen, des Arguments $z$ und des Index $\nu$, auffasst, geradezu logisch nothwendig. Herr Mayr dagegen hält, indem er die Begriffe „*definitio*" und „*propositio*" verwechselt, diese Definition für einen Lehrsatz, der auch für seinen beschränkteren Begriff der Bessel'schen Function gelten soll, also etwa für die bestimmten Integrale oder für die Reihenentwickelungen, welche statt $J^n$ bei positivem Index gesetzt werden können, für ein negatives $n$ dagegen alle Bedeutung verlieren. Gerade dieser letztere Umstand machte ja eine erweiterte Definition der Bessel'schen Function nöthig, die von den speciellen Formen, unter welchen die Function in besonderen Fällen auftreten kann, völlig absieht und nur noch auf die durch die Differentialgleichung geforderten wesentlichen Eigenschaften derselben Gewicht legt. Das Missverständniss, welchem Herr Mayr hinsichtlich dieser Definition zum Opfer fiel, verleitet ihn zu dem unberechtigten Ausspruche: „Dass $J_{-\mu} = (-1)^\mu J_\mu$, ist in jeder Hinsicht falsch."

Ebenso unbegründet sind die Bemerkungen, welche der Herr Verfasser, gestützt auf sein falsches Resultat, dass das von ihm mit $Y_\nu$ bezeichnete Sinusintegral eine partikulare Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung sei, gegen die Betrachtung richtet, durch welche Referent gezeigt hat, dass es eine Bessel'sche Function zweiter Art mit gebrochenem Index nicht giebt (unter Bessel'scher Function immer eine Function verstanden, welche der Bessel'schen Differentialgleichung genügt).

Von den angeblichen „Irrthümern und Verwirrungen", die nach der Ansicht des Herrn Verfassers bisher in der Theorie der Bessel'schen Functionen stattgefunden haben sollen und welchen er durch seine Auseinandersetzung „ein Ende zu machen" hofft, hat derselbe in der That keine aufzuweisen vermocht, diejenigen ausgenommen, welche er selbst durch die vorliegende Schrift anzurichten sich vergeblich bemüht.

Im vierten Abschnitt: „Integration durch bestimmte Differentiale" (als „bestimmte Differentiale" werden Ausdrücke bezeichnet, „die nach $u$ als einer von $x$ und $y$ unabhängigen Grösse differenzirt werden") entwickelt der Herr Verfasser einige von den unendlich vielen partikularen Integralen, deren eine lineare Partialgleichung fähig ist, jedoch ohne den Versuch zur Auffindung des vollständigen Integrals zu machen; er bricht vielmehr „hier, an der Schwelle neuer Untersuchungen", ab.

Hiermit schliesst diese unüberlegte Publication, welche ausser selbstverständlichen, jedem Anfänger geläufigen Wahrheiten nur Irrthümer und Fehler enthält. Für etwaige „neue Untersuchungen" möchten wir dem Herrn Verfasser seine eigenen Worte, welche er Anderen warnend glaubt entgegenhalten zu müssen (S. 9), zur Beherzigung empfehlen: „Ist schon bei so einfachen Functionen, deren Relationen man vollständig kennt, Vorsicht geboten, so ist dies in erhöhtem Maasse der Fall bei Functionen, deren Relationen man nur unvollständig kennt."

E. Lommel.

---

**Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel.** Nouvelle édition, publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. Christiania 1881. (In Commissionsverlag von B. G. Teubner, Leipzig.) Tome premier, contenant les mémoires publiées par Abel (VIII und 621 S.). Tome second, contenant les mémoires posthumes d'Abel (341 S.).

Die Akademien oder Regierungen der verschiedenen Länder erfüllen wetteifernd die Ehrenpflicht, die Werke ihrer grossen Meister der mathematischen Wissenschaft in würdigen Gesammtausgaben zu publiciren. In Deutschland bezeichnen die Namen Gauss, Jacobi, Steiner, denen Dirichlet folgen wird, diese Thätigkeit, in Frankreich die Namen Lagrange, Laplace, endlich Cauchy, als das umfassendste, gerade erst begonnene Unternehmen dieser Art. Die neue Abel-Ausgabe, aus Mitteln des norwegischen Staates unternommen, reiht sich ebenbürtig an.

Die erste, 1839 von Holmboe veranstaltete Ausgabe von Abel's Werken war nach und nach so selten und schwer zugänglich geworden, dass das Bedürfniss nach einer neuen Ausgabe sich immer mehr geltend machte. Durch die vorliegende vollständige Ausgabe, die durch die

Herren Sylow und Lie, zwei in der Wissenschaft hochangesehene Compatrioten Abel's, auf Grund aller noch vorhandenen Manuscripte und Veröffentlichungen kritisch durchgeführt ist, werden nun die weitestgehenden Wünsche befriedigt. Es sei nur kurz auf die gegen die frühere Ausgabe entstandenen Veränderungen hingewiesen.

Diese selbst besass schon einen hohen Grad von Vollständigkeit; und insbesondere waren im zweiten Bande die noch nicht veröffentlichten Manuscripte fast vollständig verwerthet. Wenn auch die letzteren sich, ausser der später so einflussreich gewordenen, leider Fragment gebliebenen Arbeit „Sur la résolution algébrique des équations", grösstentheils auf Arbeiten Abel's beziehen, die aus der Zeit vor dem Antritte seiner Reise, Sommer 1825, also vor Entwickelung seines „kritischen" Bewusstseins, stammen, so ist es doch interessant, in diesen früheren Schriften schon die meisten der späteren Ideen Abel's vorzufinden, zum Theil sogar, wie das Abel'sche Theorem, in allgemeinster Auffassung. Da gerade die hierauf bezüglichen Manuscripte, die vermuthlich bei einem Brande zu Grunde gegangen sind, nicht mehr vorhanden waren, auch kein neues ungedrucktes Material, das Holmboe nicht zu Gebote gestanden, hinzukam, so haben sich die jetzigen Herausgeber wesentlich auf Holmboe selbst stützen müssen und auch die chronologische Anordnung seiner Ausgabe im Ganzen beibehalten.

Trotzdem sind wichtige Bereicherungen oder Veränderungen eingetreten. Die wichtigste derselben besteht in der jetzt ermöglichten Aufnahme des von Abel 1826 der Pariser Akademie eingereichten, von derselben aber erst 1841 publicirten grossen „Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes", in welchem Abel seine früh gefasste Idee der Zurückführung einer beliebigen Anzahl von gleichartigen Integralen algebraischer Differentiale auf eine feste Zahl solcher in allgemeinster Weise entwickelt, also aus dem Abel'schen Theorem den heutigen „Geschlechts"-Begriff ableitet. Diese seine bedeutendste und fruchtbarste Idee sollte auch, wie die vorliegende Ausgabe, Bd. II S. 319, bestätigt, der Gegenstand der letzten von ihm redigirten Note werden.

Eine weitere Bereicherung des ersten Bandes ist die Aufnahme einer kleinen, früher übersehenen Note über die Bestimmung einer zweien algebraischen Gleichungen gemeinsamen Wurzel, aus Gergonne's Annalen. Dazu kommt, dass die dem vierten Bande von Crelle's Journal entnommenen Aufsätze, ausser dem Précis, in mannigfach verbesserter Gestalt geboten werden konnten; denn der Druck im Journal war nach von Crelle's Hand vielfach corrigirten Copien der Originale Abel's geschehen, und diese Copien, mit den noch leicht erkennbaren, nicht immer richtigen Correcturen, waren aus dem Besitze der Berliner Akademie den Herausgebern zur Benutzung gestellt worden. Endlich

konnten auch dem „Précis“ aus den noch erhaltenen Papieren einige Seiten, die sich auf die Transformation der Integrale zweiter und dritter Gattung beziehen, hinzugefügt werden.

Für den zweiten Band sind aus den Manuscripten noch zwei interessante Bereicherungen gezogen worden: die eine giebt successive Convergenzkriterien, die seit Abel freilich wiedergefunden worden sind, die andere den Beweis eines seiner Theoreme über die Beziehungen zwischen Integralen algebraischer Differentiale. — Am Schlusse sind, an Stelle der erklärenden Noten von Holmboe, Noten angefügt, die ausführliche Mittheilungen über die noch existirenden Manuscripte und über die von den Herausgebern in Einzelheiten vorgenommenen Aenderungen enthalten.

In der von den Herausgebern geübten gewissenhaften Kritik haben dieselben nur ein Erbe Abel's verwaltet. Denn das sind ja die beiden Merkmale seines Geistes, mit dem er, an der Seite von Gauss und Cauchy, zuerst das ihn umgebende Dunkel der Analysis erleuchtet hat: die Kraft, mit der er in den Mittelpunkt seines Gegenstandes vordringt, um von dort aus mit umfassendster Idee nach allen Seiten die Wissenschaft zu gestalten, und die Schärfe seiner Kritik. Beides hat sich in den wenigen Jahren, die Abel vergönnt waren, so weit entwickeln können, dass sich vier grosse Gebiete an ihn anschliessen konnten: das der Convergenzuntersuchungen an seine Arbeit über die binomische Reihe, Theile der Theorie der elliptischen Functionen, die Theorie der algebraischen Gleichungen, die Theorie der Integrale algebraischer Ausdrücke, die in die Theorie der „Abel'schen Functionen“ münden sollte. Diese neue Ausgabe, die jedem Mathematiker ermöglicht, mit dem Geiste Abel's in Contact zu bleiben, wird immer durch Vorführung seines Beispiels wirken und, wie Jacobi an Legendre schreibt (Brief vom 14. Juni 1829): „*il a laissé un grand exemple*“.

Hoffen wir noch mit den Herausgebern, dass die von ihnen erwähnte ausführliche Biographie Abel's, die Herrn Bjerknes zum Verfasser hat, durch eine Uebersetzung bald allgemeiner zugänglich gemacht werde.

Erlangen, März 1882. M. Noether.

---

**Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes.** Von Dr. G. v. Escherich, Professor an der Universität Czernowitz. Leipzig, B. G. Teubner. 1881. VIII u. 282 S.

Der Verfasser macht hier zuerst den Versuch, einen Standpunkt, der in der neueren Geometrie wissenschaftlich und auch bei Universitätsvorlesungen immer mehr zur Geltung kommt, auch in einem Lehrbuche zum Ausdruck zu bringen. Er stellt sich die Aufgabe, in analytischem Gewande eine Einleitung sowohl in die analytische, als in die synthe-

tische Geometrie des Raumes zu geben, um den Leser mit den Anschauungen und Methoden der beiden Disciplinen und den daraus folgenden einfachen Behandlungsweisen der geometrischen Probleme vertraut zu machen.

Indem Rec. diese Aufgabe als eine durchaus zeitgemässe anerkennt, wendet er sich zu einer näheren Besprechung der Ausführung dieser Aufgabe, mit der er sich nicht ebenso einverstanden erklären kann.

Der Verf. sucht seinen Zweck dadurch zu erreichen, dass er in einem ersten Theile die einfachsten Begriffe der analytischen Geometrie, in einem zweiten Theile in analytischer Form die Grundbegriffe der synthetischen Geometrie des Raumes entwickeln will. Dabei giebt er im ersten Theile der Reihe nach die Punkt-, Ebenen-, Liniencoordinaten und discutirt in jeder der Arten von Coordinaten die linearen Gleichungen, in nicht homogener und in homogener Form. Im zweiten Theile schliesst er sich möglichst eng an den gewöhnlichen Gang der Geometrie der Lage an, indem er die projectivischen Verwandtschaften bei Grundgebilden der drei Stufen und deren Erzeugnisse der Reihe nach in analytische Form umsetzt. Ein kurzes Schlusscapitel über lineare Transformation im Raume soll den Uebergang zu den algebraischen Methoden vermitteln, die selbst einer etwaigen Fortführung des Lehrbuchs vorbehalten bleiben.

Ueber die dem Buche zu Grunde liegenden Voraussetzungen spricht sich der Verf. nicht näher aus; aus den an verschiedenen Stellen ohne Ableitung benutzten Sätzen geht aber hervor, dass die analytische und synthetische Geometrie der Ebene, sowie Sätze der Elimination aus höheren Gleichungen gefordert werden.

Bei solchen Voraussetzungen wären nun auch eigentlich manche der im Buche gegebenen Entwickelungen, wie die über die Grundgebilde erster Stufe, schon als bekannt anzunehmen. Jedenfalls aber muss der Leser schon so weit gedacht werden, dass ihm nach dem im ersten Theile gewonnenen analytischen Standpunkte unmittelbar die lineare Transformation der Coordinaten oder der Parameter, durch welche die einzelnen Gebilde ausgedrückt werden können, allgemein vorgeführt werden könnte. Die analytische Grundlage macht eben das successive Verfolgen der einzelnen geometrischen Verwandtschaften und ihrer Erzeugnisse überflüssig, lässt vielmehr mit einem Schlage die projectivischen Begriffe und die ganze Reihe der geometrischen Anwendungen übersehen. Erst auf diesem Wege wird das eigentliche Ziel erreicht, zu zeigen: dass sich die in der neueren projectivischen, analytischen und synthetischen, Geometrie benutzten Begriffe decken, dass die zweite ein Gegenbild der ersten ist und dass ebenso jede rein geometrische Operation unmittelbar auch analytisch gedeutet werden kann; erst dieses Verständniss macht die Handhabung der entsprechenden Methoden leicht.

Indessen ist dieses allgemeine Bedenken nicht so gewichtig, da der Verf. sich die Entwickelung dieses Gesichtspunktes wohl für einen späteren algebraischen Theil des Lehrbuches vorbehalten hat. Erheblichere Bedenken machen sich gegen die im Einzelnen befolgten Methoden geltend.

Vor Allem in Bezug auf die Behandlung des Imaginären. Nach den analytischen Grundlagen wäre zu erwarten, dass dasselbe direct explicite eingeführt und überall gleichmässig mit dem Reellen behandelt würde. Statt dessen spricht der Verf. S. 88 zuerst glattweg von der Existenz zweier imaginärer Geraden, erwähnt alsdann bei der Aufgabe zweiten Grades auf S. 99 die Realitätsverhältnisse gar nicht, gebraucht in den folgenden Capiteln den Ausdruck: „im Allgemeinen“ oder „höchstens“ zwei Elemente, und erst S. 170 wird der Ausdruck: „zwei reelle oder imaginäre Elemente“ eingeführt. Aber schon S. 172 werden dem Parameter der Paare einer Involution nur reelle Werthe beigelegt und doch auf S. 173 allgemein von dem Paare der Doppelelemente gesprochen. — Dazu kommt, dass die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen und der imaginäre Kugelkreis, ausser in einem Beispiel auf der letzten Seite des Buches, überhaupt nicht eingeführt werden; dass also auch das Mittel, das dem Standpunkte des Buches so völlig entsprechen würde, die projectivische Auffassung des Metrischen mit den darauf beruhenden Methoden, nirgends behandelt oder angedeutet wird.

Ebenso wenig wird von den imaginären Geraden der elliptischen Flächen zweiter Ordnung und von der entsprechenden Erzeugung dieser Flächen gesprochen.

Einen weiteren methodischen Mangel erblickt Rec. darin, dass von der Darstellung der Coordinaten einer Geraden durch einen Parameter beim Schnitt der Geraden durch eine Fläche zweiter Ordnung kein Gebrauch gemacht, vielmehr statt dessen an mehreren Stellen durch unsymmetrische Coordinatenannahme vorgegangen wird.

Die frühe Behandlung der linearen Linien-Complexe und -Congruenzen hält Rec. für mehr formell als sachlich berechtigt, da dieselben eigentlich Gebilde zweiter Ordnung sind.

Die den einzelnen Capiteln angefügten Uebungen sind reichhaltig. Theilweise bringen sie Gegenstände — wie die Frage nach der analytischen Behandlung des Hauptaxenproblems bei den Flächen zweiter Ordnung —, die mit den gegebenen Mitteln und den spärlichen Andeutungen nicht zu bewältigen sind.

Endlich ist Rec. genöthigt, eine in Einzelheiten sich zeigende Flüchtigkeit, auch abgesehen von Mängeln der Correctur, zu rügen. Es seien nur erwähnt: S. 130, wo für die Existenz der Tangentialebene einer Fläche ein durchaus verfehlter Beweis gegeben ist; der letzte Satz des § 87, der auszuschliessen scheint, dass der Kegel auch als Abart des

zweifachen Hyperboloids betrachtet werden kann; S. 186, wo aus der eindeutigen Beziehung zwischen zwei Systemen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ auf den linearen Charakter der Beziehungsgleichungen geschlossen wird; etc.

Rec. kann hiernach dem vorliegenden Buche nur dem Zwecke, nicht der Ausführung nach, zustimmen und möchte dasselbe nur unter zuverlässiger Controle gebraucht sehen. Vielleicht vermag auch eine Fortführung des Buches manchem der gerügten Mängel nachträglich abzuhelfen.

Erlangen. M. Noether.

---

H. Wiener, **Ueber Involutionen auf ebenen Curven.** Inauguraldissertation. München 1881. 37 S. und 10 Tafeln.

Erst in neuerer Zeit ist die Geometrie der Schaaren von Punktgruppen auf algebraischen Curven ausgebildet und zur Grundlage der Theorie dieser Curven gemacht worden. Wenn so Resultate von sehr allgemeinem und umfassendem Charakter erzielt worden sind, so handelt es sich jetzt darum, speciellere Untersuchungen, zunächst an den einfacheren Schaaren von Punktgruppen, anzustellen, hauptsächlich um zu Constructionen und Eintheilungen der verschiedenartigen algebraischen Curven zu gelangen. Zu dieser Classe von Untersuchungen gehört die vorliegende, von Herrn Professor Brill angeregte Arbeit.

Der Verf. betrachtet auf synthetischem Wege Involutionen, d. h. einfach-unendliche Schaaren von Gruppen von je $n$ Punkten, und zwar im ersten Theile, in mannigfacher Berührung mit Arbeiten von Herrn Emil Weyr, solche auf rationalen Curven. Zunächst wird vermittelst Curven $n^{ter}$ Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte die allgemeine, alsdann ebenso die von Herrn Lüroth (Math. Ann. XI) sogenannte „cyklische" Involution, bei der in zwei Gruppen die $n$ Elemente in je eines zusammenrücken, construirt; durch die letztere Construction ist hiermit auch, durch Uebertragen auf den Kreis, eine solche der Kreistheilung geliefert. Ferner wird die „Involutionscurve", d. h. die durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer Involution eingehüllte Curve, betrachtet; dieselbe wird einmal vermöge ihres Geschlechts, neben der Anordnung der Doppelelemente, zur Eintheilung der Involutionen, besonders für $n=3$ und 4, benutzt, sodann auch zur Ableitung von Sätzen über die rationalen Curven dritter und vierter Ordnung verwerthet.

Der zweite Theil, auf Curven von einem Geschlecht $p>0$ bezüglich, behandelt Curven, welche eine Involution von Gruppen von je $n$ Punkten besitzen, die von einem Strahlbüschel ausgeschnitten werden kann und bei der zugleich jede Gruppe in durch quadratische Gleichungen zu

bestimmende Punkte zerfällt. Insbesondere werden die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten construirt und in Bezug auf die Realitäts- und Lagenverhältnisse ihrer Doppeltangenten eingetheilt.

Rec. begrüsst diese Arbeit in der Erwartung, das oben angedeutete Gebiet specieller Untersuchungen, das reiche Resultate für Curven von höherem Geschlecht verspricht, weiter verfolgt zu sehen.

Erlangen. M. Noether.

---

**Die Arithmetik der Lage.** Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre mit Berücksichtigung ebener geometrischer Gebilde erster und zweiter Ordnung, dargestellt von Dr. Hermann Noth, Oberlehrer am Gymnasium zu Freiberg in Sachsen. Leipzig, J. A. Barth. 1882. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Auf 89 Seiten bietet Herr Noth in klarer Sprache und eleganter, durchweg dualistischer Darstellung ungefähr folgende Principien.

Man denke sich in der Ebene vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ gegeben, von denen nicht drei in gerader Linie liegen. Alsdann bezeichnen wir den Punkt $D$ durch $A+B+C$, indem wir ihn als geometrische Summe der drei Punkte $A$, $B$, $C$ ansehen.

Die Berechtigung dieser Bezeichnung wird, wie dies anderswo schon oft geschehen ist, dadurch nachgewiesen, dass diesem Punkte in der That in Bezug auf die drei Summanden die wesentlichen Eigenschaften der Summe zukommen. Jeder Punkt der Geraden $AB$ wird nun durch $\lambda A+\mu B$, wo $\lambda$ und $\mu$ gewisse Zahlwerthe bedeuten, zu bezeichnen sein. So ist der Schnittpunkt $(AD, BC)$ offenbar $B+C$, und es ist ebenso lockend, wie leicht, die aus dem Vierecke $ABCD$ entspringenden Punkte — die Diagonalpunkte, die Schnittpunkte der Diagonalen mit den Seiten u. s. w. — zu bestimmen, und umgekehrt, die Punkte $2A+3B+4C$ u. s. w. geometrisch aufzusuchen. Die Gesammtheit aller Punkte $\alpha A+\beta B+\gamma C$, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zunächst rationale und dann in selbstverständlicher Beschränkung ganze Zahlen bedeuten, stellt dann das geometrische Netz dar. Mag hier vorwegnehmend bemerkt werden, dass das Hineinspielen eines zahlentheoretischen Begriffes sich später durch das ungesuchte Auftreten des Kettenbruchalgorithmus dankbar erweist. Der Verfasser bezeichnet nun den Punkt $\alpha A+\beta B+\gamma C$ durch das Symbol $|\alpha\beta\gamma|$, wobei noch die Kleinigkeit erwähnt sein mag, dass ich mir gestatte, seine deutschen Buchstaben durch griechische zu ersetzen.

In derselben Weise, wie die Addition, wird nun die Multiplication benutzt. Da erscheint (S. 23) die Verbindungslinie der Punkte $B$ und $C$ als $BC$, als projectivisch-geometrisches Product, als die Gerade $a$. Da für diese Art „Multiplication" nicht alle Gesetze der echten

Multiplication gelten, so befindet sich der mit dem Quaternionencalcul vertraute Leser hier auf anheimelndem, wenn nicht auf heimischem Boden. Nachdem S. 24 flgg. die Bezeichnung der Punkte und Geraden, welche hieraus entstehen, als identisch mit der aus der Addition hervorgehenden nachgewiesen ist, kann S. 27 die interessante Aufgabe gelöst werden:

„Es sind im geometrischen Netze die vier Punkte gegeben:

$P_1 = A + 2B + C,\quad P_2 = 2A - C,\quad P_3 = 3A + B + 2C,\quad P_4 = 5A - B + C.$

Man berechne die Bezeichnung des Punktes $P$, in welchem die Gerade $P_1 P_2$ von der Geraden $P_3 P_4$ geschnitten wird."

Der Verfasser giebt zwei Auflösungen, von denen ich die letztere hier mittheile.

$$P = (P_1 P_2)(P_3 P_4)$$

und

$$P_1 P_2 = (A + 2B + C)(2A - C) = 4BA + 2CA - AC - 2BC$$
$$= -2BC + 3CA - 4AB = -2a + 3b + 4c,$$

ferner

$$P_3 P_4 = 3a + 7b - 8c.$$

Daher

$$P = (-2a + 3b - 4c)(3a + 7b - 8c)$$
$$= 9ba - 12ca - 14ab - 28cb + 16ac - 24bc$$
$$= 4bc - 2ca - 23ab = 4A - 28B - 23C$$

($PP = 0$, $pp = 0$, wie S. 20 bewiesen).

Man kann diesem Verfahren Eleganz und Einfachheit nicht absprechen. Doch gelingt die Lösung der Aufgabe, wenn man $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ als die Gleichungen der drei Grundpunkte eines Liniencoordinatensystems ansieht, wo dann der Punkt $|\alpha\beta\gamma|$ die Gleichung $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ hat, eben auch sehr leicht und es ist immerhin noch fraglich, ob das Ueberwiegen des Rechnungsmechanismus nicht eine Verflachung des geometrischen Gedankens zur Folge hat.

Auf S. 28 führt der Verfasser einige im Folgenden sehr oft verwendete Bezeichnungen ein. Der Punkt $\alpha A + \beta B + \gamma C$ und die Gerade $\alpha a + \beta b + \gamma c$ erhalten die gemeinsame symbolische Bezeichnung $|\alpha\beta\gamma|$. Hieraus ergeben sich mehrere Consequenzen, die für kurze Bezeichnung und Rechnung im Folgenden sich als fruchtbar erweisen. Verfasser mag mit der Bemerkung im Rechte sein, dass diese Bezeichnung nicht leicht zu einem Irrthum führen kann; allein ich erlaube mir doch, den Leser auf diese Bezeichnung besonders aufmerksam zu machen, da mir selbst ein solches Missverstehen passirt ist. Die Discussion S. 30 und 31 konnte dagegen bedeutend kürzer gefasst werden, während die wichtige Beziehung S. 35 Z. 2 v. o. wohl eine schärfere äussere Hervorhebung verdient hätte.

Auf S. 53 bewirkt der Verfasser den Uebergang zu den Gebilden zweiter Ordnung. Bedeuten $P_1 = |\alpha_1 \beta_1 \gamma_1|$, $P_2 = |\alpha_2 \beta_2 \gamma_2|$ zwei Punkte der Ebene, so soll der Punkt $P_1 . P_2 = |\alpha_1 \alpha_2\ \beta_1 \beta_2\ \gamma_1 \gamma_2|$ das projectivisch-

arithmetische Product genannt werden. Hieraus ergiebt sich von selbst, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ das projectivisch-arithmetische Quadrat, $P^2$ und ebenso $P^n$. Der Verfasser liefert eine hübsche Zeichnung, welche die Punkte $P$, $P^2$, $P^3$, $P^5$, $P^{-1}, \ldots P^{-5}$ zur Anschauung bringt. Ich habe nicht unterlassen können, die Gleichung der Curve, auf der die Punkte $P^n$ liegen, aufzustellen.

Die weitere Discussion der neu eingeführten „Multiplication" leitet nun S. 62 zu einem System von dreizehn Punkteinheiten, denen ebensoviele Linieneinheiten gegenüberstehen. Die geometrische Anschaulichkeit dieser „complexen Einheiten" wird vielleicht auch im Kreise derjenigen Mathematiker Freunde finden, die den verwandten Bestrebungen moderner Algebraiker ohne sonderliche Begeisterung zuzusehen gewöhnt sind.

Den Schluss bilden Betrachtungen aus der Theorie der Kegelschnitte, die eine praktische Verwerthung des neuen Verfahrens darbieten sollen. Dieselben gipfeln im Pascal'schen Sechseck und dem Steiner'schen Punkte und schliessen mit einem hübschen Zahlenbeispiel ab.

Coesfeld, im Januar 1882. K. Schwering.

---

**Die Rückläufigkeit des Raumes ein Irrthum und Ursache weiterer Irrthümer.** Von Rudolf Otto Consentius. Karlsruhe und Leipzig, Verlag von H. Reuther. 1881.

Der Verfasser des vorliegenden Werkchens theilt uns in der Vorrede mit, dass man ihm als „vermeintlichem Poeten und Schauspieler" wohl nicht den Muth zutrauen werde, in der Mathematik die Rolle des Correctors spielen zu wollen. Dass die Abhandlung nicht in einer Fachzeitschrift, sondern als Anhang zu den „Dichtungen" des Verfassers erschienen ist, hat darin seinen Grund, dass der Redacteur einer solchen Zeitschrift, welche bereits einige synthetische Aufsätze des Verfassers aufgenommen hat, nach verschiedenen Correspondenzen hin und her dem Verfasser abbrechend schrieb: die Ausführungen desselben gäben ihm zu einer solchen Unzahl von Zweifeln Anlass, dass er Bedenken trage, sie abzudrucken.

So erzählt die Vorrede.

Wer ist der Redacteur?

In seiner Ars poetica erzählt Horaz von einem weisen Kritiker Quintilius. Obschon mir dieser Quintilius lebhaft einfiel, habe ich mir doch die geringe Mühe genommen, den fraglichen Redacteur zu ermitteln; und da Jahrg. XXV Heft 2 S. 119 flgg. dieser Zeitschrift sich zwei kleinere Mittheilungen synthetischen Inhalts, „R. O. Consentius" unterzeichnet, finden, so kann nicht zweifelhaft sein, Wer gemeint ist.

Nun möchte ich gern beiden Theilen gerecht werden.

Es würde mich freuen, Herrn Consentius den Beweis zu liefern, dass seine Ausführungen von den Männern der Wissenschaft nicht als Umwälzung kündende Sturmvögel gefürchtet werden.

Ich würde andererseits mich glücklich schätzen, dem mathematischen Publicum — auf dieses allein, nicht auf die Leser von Dichtungen, selbst nicht auf die gefühlvollen Leserinnen kommt es an — den Beweis zu liefern, wie sehr der Redacteur des dogmatischen Theiles dieser Zeitschrift im Rechte war, dem Vorbilde des weisen Quintilius zu folgen.

Beides kann aber erreicht werden, wenn der Redacteur des literarisch-kritischen Theiles gestatten will, dass der erste Hauptsatz unseres Verfassers, mit welchem nach seiner Ueberzeugung Alles steht und fällt, nebst seinem Beweise hier abgedruckt werde.

„Hauptsatz.

Die beiden, in entgegengesetzter Richtung liegenden unendlich fernen Punkte einer Geraden fallen nicht zusammen.

Erster Beweis. Diese beiden Punkte seien $Q_{+\infty}$ und $Q_{-\infty}$. Sind ein Doppelverhältniss von vier reellen Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ einer Geraden und drei dieser Punkte gegeben, so ist die Lage des vierten, nicht gegebenen Punktes bestimmt. Hieraus und weil die Doppelverhältnisse ($A$, $B$, $C$, $Q_{+\infty}$) und ($A$, $B$, $C$, $Q_{-\infty}$) gleich sind, zieht man den Schluss, dass $Q_{+\infty}$ und $Q_{-\infty}$ zusammenfallen. Dieser Schluss hört aber auf, richtig zu sein, wenn die vierten Punkte unendlich fern sind. Fielen dieselben zusammen, so wäre die Gerade, in welcher diese Punkte liegen, nothwendigerweise eine geschlossene Figur. Legen wir nun durch diese Gerade eine Ebene, so fragt es sich, welche Seite der Geraden die äussere oder innere Seite der geschlossenen Figur sei. Da kein Grund vorhanden ist, eine Seite zu bevorzugen, so müssen wir uns darein fügen, dass diese Eine Gerade zwei geschlossene Figuren sind. Da man aber auch die gegebene Gerade als Axe eines Ebenenbüschels betrachten kann und die Gerade in jeder seiner Ebenen liegt, und da wiederum kein Grund vorhanden ist, eine dieser Ebenen zu bevorzugen, so muss man sich nochmals darein fügen, dass in jeder derselben ein Paar die Gerade darstellender geschlossener Figuren liege. Es giebt demnach auf der unendlich fernen Kugelfläche keinen Punkt, durch welchen nicht irgend eine dieser geschlossenen Figuren, d. h. die gegebene Gerade hindurchginge. Nennen wir nun einen beliebigen dieser Punkte $X$, so sind für beide $Q$ die Doppelverhältnisse ($ABCQ$) und ($ABCX$) gleich. Da nun aber $X$ ein beliebig unendlich ferner Punkt ist, so fallen nach jenem Schlusse alle Punkte der unendlich fernen Kugelfläche, d. h. die Kugelfläche selbst mit Allem, was sie umschliesst, also dem ganzen unendlichen Raume in einen einzigen Punkt zusammen, woraus man sieht, dass jener Schluss *ad absurdum* führt."

So der Herr R. O. Consentius.

Dem habe ich nichts weiter hinzuzufügen, als die oben bereits erwähnten Horazischen Verse von Quintilius:

*„Quintilio si quid recitares, Corrige sodes*
*Hoc ajebat et hoc...*
*Si defendere delictum quam vertere malles,*
*Nullum ultra verbum aut operam insumebat inanem,*
*Quin sine rivali ... tua solus amares."*

Coesfeld, im März 1882. K. Schwering.

---

**Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen.** Inaugural-Dissertation von L. Goldschmidt.

Dieselbe löst einige von Liouville gestellte zahlentheoretische Aufgaben, welche sorgfältig behandelt und zum Theil erweitert werden. Die von Eisenstein eingeführten „Gitterpunkte" namentlich sind vom Verfasser mit Sachkenntniss und Geschick verwandt worden.

Der erste der behandelten Liouville'schen Sätze ist der folgende: „Bezeichnet $n$ irgend eine ganze Zahl und nimmt $s$ nacheinander die ungeraden Werthe

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

an, ohne $n$ zu übersteigen, während andererseits dem Zeichen $\vartheta$ die Werthe

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

in der Weise zuertheilt werden, dass der höchste, zum Quadrat erhoben, $n$ nicht übertrifft, so findet die Gleichung statt:

$$\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} . E\left(\frac{n}{s}\right) = \Sigma E(\sqrt{n-\vartheta^2});$$

z. B. $n = 10$:

$$10-3+2-1+1 = 3+3+2+1."$$

Coesfeld, im März 1882. K. Schwering.

---

**Einige geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.** Von Dr. Victor Schlegel, Oberlehrer am Gymnasium in Waren. Waren, Druck von C. Quandt. 1882. 31 S.

Man kennt in weiten Kreisen Herrn Schlegel als den thatkräftigen Schüler Hermann Grassmann's, der es sich als Lebensaufgabe vorgesetzt hat, für die weitere Verbreitung und Vertiefung der zu des Meisters Lebzeiten so wenig gewürdigten „Ausdehnungslehre" zu wirken. Dieser Tendenz entsprechen einerseits die treffliche Biographie Grassmann's und das zweibändige bei Teubner erschienene Lehrbuch, welches den Gegenstand in einer mehr der gebräuchlichen mathematischen Darstellung sich annähernden Form behandelt, andererseits zahlreiche Abhandlungen rein wissenschaftlichen Inhalts, grossentheils in dieser

Zeitschrift erschienen. Hierher gehört denn auch das vorliegende Programm, von welchem jeder Freund Grassmann'scher Methoden mit Interesse Einsicht nehmen wird. Im Wesentlichen handelt es sich darin um mannichfaltige geometrische Anwendungen jener Methoden, doch sind auch noch einige anderweite Bemerkungen in Form von Anhängen angefügt worden.

Wir erhalten zunächst zwei einfache Beweise des Satzes von Stewart (nicht Steward) über Punkte, welche auf Einer Geraden liegen, sodann einen Beweis des Satzes von Pappus und alsdann die Zurückführung gewisser dem Ausdehnungscalcul eigenthümlicher Algorithmen zur Darstellung von Drehungen auf Kreis- und Hyperbelfunctionen. Es folgen weiter einige Sätze über die Addition von Strecken und ein Beweis des Pascal'schen Theorems, der sich zur Veranschaulichung der grossen von der Ausdehnungslehre gebotenen Vortheile vielleicht noch besser eignet, als jenes Verfahren der linealen Erzeugung eines Kegelschnittes, welches Herr Grassmann in seiner bekannten Selbstanzeige des Werkes von 1844 (Grunert's Archiv, VI. Theil S. 340) als schlagendes Beispiel gewählt hatte. Herr Schlegel beweist dann weiter eine Reihe von Sätzen über Kreise an sich oder in Verbindung mit dem Dreieck, sowie über merkwürdige Punkte und Linien im ebenen Dreieck. Allgemeinerer Natur sind die Untersuchungen über „disharmonische" Punktepaare einer Involution, welche Bezeichnung diejenige von L. Schendel („anharmonisch conjugirt") zu ersetzen bestimmt ist, und über die Realität eines Doppelverhältnisses von vier Punkten in der Ebene, wobei der Verf. Berührungspunkte mit den bekannten Arbeiten von Bjoerling und Lie über die geometrische Darstellung des Imaginären gewinnt. Wir würden Herrn Schlegel empfehlen, diese Betrachtungen auch auf andere Flächen, insbesondere auf die Kugel, auszudehnen, wie dies unter ganz anderen Gesichtspunkten in der Schrift von Wedekind (Studien im binären Werthgebiet, Carlsruhe 1876) geschehen ist. Zum Schluss wird der Zusammenhang zwischen Pascal'schen Sechsseiten und Brianchon-schen Sechsecken in dem Sinne festgestellt, dass gewisse Punkte und Linien des einen gewissen Linien und Punkten des andern dual entsprechen.

Der erste Anhang rechtfertigt die vom Verf. für die Determinantenform

$$|a_{i,k}, \; -a_{i,k}|$$

gebrauchte Benennung „congruente Determinante" gegen einen Einwurf des Unterzeichneten. Man wird Herrn Schlegel's Gründen, die sich auf den geometrischen Unterschied zwischen symmetrischen und congruenten Figuren stützen, die Berechtigung nicht abstreiten können; allein da offenbar angesichts der mancherlei für diese „*Déterminants gauches symétriques*" in Deutschland gebrauchten Namen (schief, sym-

metral" u. s. w.) gerade kein Bedürfniss zur Erweiterung der Nomenclatur vorliegt, so scheint uns die Einführung eines neuen Kunstausdruckes an sich nicht wünschenswerth.

Im zweiten Anhang ist von einem Algorithmus die Rede, welchen R. Lipschitz im 91. Bande der „Comptes rendus" entwickelt hat, um aus ihm gleichmässig die Quaternionenrechnung und die Theorie der complexen Zahlen abzuleiten. Es werden Beziehungen zwischen Lipschitz' „Primitivzeichen" und Grassmann's allgemeinen Einheiten und Einheitsproducten ermittelt.

An dritter Stelle begegnen wir einer interessanten Erörterung der bislang recht unklaren Angelegenheit Cauchy-St. Venant-Grassmann. An dem Andenken des Ersteren war stets der schlimme Verdacht haften geblieben, eine Sendung des deutschen Mathematikers todtgeschwiegen und gleichwohl aus derselben den Stoff zu seinen „Clefs algébriques" entnommen zu haben. Nach neueren Forschungen, wozu einige erst kürzlich neu aufgefundene und hier abgedruckte Originalbriefe den Anstoss gegeben haben, glaubt der Verf. obigen Verdacht jedoch nicht mehr aufrecht erhalten zu dürfen, vielmehr erscheint ihm die Annahme am nächsten zu liegen, dass wirklich die französischen Forscher *optima fide* in einzelnen Punkten mit Grassmann's Ideen sich begegneten. Steht es doch fest, dass St. Venant Begriffe und Bezeichnungen benützte, die von Grassmann bereits im Jahre 1840 verwendet, durch den Druck aber erst volle 37 Jahre später bekannt gemacht worden sind, so dass also hier eine zweimalige Erfindung mit Nothwendigkeit angenommen werden muss.

Endlich giebt uns Herr Schlegel noch ein sehr dankenswerthes „Verzeichniss von Arbeiten, in welchen Methoden der Ausdehnungslehre benützt oder erörtert sind". Dasselbe umfasst von Kysaeus (1850) bis zu Lueroth's Mechanik (1881) 20 Nummern. Beigefügt muss demselben noch werden der im 92. Bande des Borchardt'schen Journals publicirte Aufsatz von Caspary über gewisse in der Kegelschnittslehre vorkommende Determinanten. In demselben wird eine Reihe von Sätzen von Hunyady, Mertens und Pasch überraschend einfach aus den Grundlehren Grassmann's bewiesen, so dass diese Abhandlung sich als eine werthvolle Ergänzung der Schlegel'schen darstellt. Beide mögen allseitiger Beachtung anempfohlen sein.

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

**Die theoretische Hydrodynamik**, nach dem Gange ihrer Entwickelung in der neuesten Zeit in Kürze dargestellt von Dr. Felix Auerbach, Privatdocent an der Universität zu Breslau. Von dem k. venetianischen Institut der Wissenschaften gekrönte Preisschrift. 1881.

Es ist dem Verfasser gelungen, in diesem nur 150 Seiten starken Werke die Entwickelung der Hydrodynamik in den letzten 30—40 Jahren zwar in gedrängter, nur das wirklich Bedeutungsvolle ins Auge fassender Kürze, aber mit grosser Klarheit und Schärfe der Darstellung zu beschreiben. Ausführlichere Behandlung kann natürlich nur dem principiell Hervorragendsten zu Theil werden, aber durch kürzere Notizen und hauptsächlich durch zahlreiche Literaturangaben findet auch das minder Wichtige Berücksichtigung. Das Buch muss als höchst geeignet zur Orientirung über den heutigen Stand der Wissenschaft bezeichnet werden und dürfte insbesondere Studirenden die besten Dienste leisten.

Der Verfasser zerlegt seinen Stoff in drei Haupttheile. Der erste ist den Grundgleichungen für die Bewegung idealer Flüssigkeiten gewidmet. Der Aufstellung der Grundgleichungen in der Euler'schen und der Lagrange'schen Form und dem Hinweis auf die von der letzteren gebotenen Vortheile folgt eingehende Besprechung der Transformationen, welche diese Grundgleichungen erfahren haben. Hieran schliesst sich die fundamentale Frage der Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung und ihre Lösung durch Helmholtz und durch Beltrami, sowie Bemerkungen über die Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials, dessen Existenz vorausgesetzt wird für die drei ersten Probleme, welche im zweiten Theile zur Behandlung kommen. Dieselben sind: 1. Strömung und Wellenbewegung (unter Voraussetzung stationärer Bewegung); 2. Ausfluss und Strahlbildung; 3. Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper. Den vierten Abschnitt des zweiten Theiles bildet die Theorie der Wirbelbewegungen. Dieser zweite Theil ist der Natur der Sache nach der umfangreichste des Buches, insbesondere im dritten und vierten Abschnitte; wir müssen darauf verzichten, Details zu geben, und beschränken uns, auszugsweise anzuführen, dass bei Besprechung der Contraction von Flüssigkeitsstrahlen die von Helmholtz und Kirchhoff angewandte Methode der ähnlichen Abbildung ausführlich dargestellt wird; ebenso im dritten Abschnitt die relative Bewegung einer Flüssigkeit und eines Rotationskörpers, dessen Axe stets in derselben Ebene ist (Lösung von Kirchhoff mit Zugrundelegung des Hamilton'schen Princips); ferner finden wir hier die interessanten Forschungen von Kirchhoff und Bjerknes über zwei Körper, bez. viele Kugeln, die sich in einer Flüssigkeit bewegen, und im vierten Abschnitte die Arbeiten von Helmholtz, Kirchhoff, Beltrami u. s. w., sowie interessante Specialfälle der Bewegung von Wirbelfäden nach Gröbli und Kirchhoff.

Der Unterschied der theoretischen Ergebnisse des zweiten Theiles und der Erfahrung giebt dem Verfasser den Uebergang zum dritten Haupttheile: Theorie der Reibung der Flüssigkeiten. Nach theoretischen Vorbereitungen, die Aufstellung der Bewegungsgleichungen

durch Navier, Poisson, de St. Venant, Stokes, O. E. Meyer, Stefan und Kirchhoff betreffend, werden einige bis jetzt gelöste specielle Probleme ziemlich ausführlich behandelt (Pendelschwingungen einer Kugel und einer kreisförmigen Scheibe in einer Flüssigkeit, Letzteres insbesondere mit Rücksicht auf die Bestimmung der Reibungsconstanten; Bewegung eines Ellipsoids; Pendelschwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel; Strömung reibender Flüssigkeiten durch cylindrische Röhren).

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass der Verfasser stets die sich öfters bietende Gelegenheit benützt, um auf den innigen Zusammenhang hydrodynamischer und elektrodynamischer Probleme hinzuweisen. Ebenso ist die fortwährende Betonung principieller Fortschritte der Wissenschaft und ihre scharfe Trennung vom Nebensächlichen sehr zu rühmen.

Dietrich.

---

**Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie.** Eine vergleichende Untersuchung von Dr. Siegmund Günther, Professor am K. Gymnasium zu Ausbach in Bayern. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1882.

Im XXVI. Bande dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abthlg. S. 98 bis 104, haben wir Herrn Günther's „Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen" besprochen. Das 5. Capitel jenes Buches: „Anwendung der Hyperbelfunctionen auf Fragen der Geometrie und mathematischen Physik", stellte auf 106 Seiten fast den vierten Theil des ganzen Bandes dar. Die weitere, sechs Druckbogen starke Abhandlung, welche uns heute vorliegt, ist etwa als Anhang zu jenem 5. Capitel zu betrachten. Wer jenes Werk besitzt, wird vermuthlich auch die neue Schrift sich anschaffen; wer diese lesen will, muss Vorkenntnisse sich erwerben, welche in dem älteren Bande vereinigt sind, welche aber allerdings auch der neuen Schrift und zwar in neuer Entwickelungsweise zu entnehmen sind.

Die Hauptquelle, aus welcher Herr Günther den Keim seines Stoffes entnahm, bilden nunmehr bereits an 30 Jahre alte, aber in Deutschland fast unbekannt gebliebene Aufsätze des Engländers James Booth. Die geschichtlichen Neigungen des Verfassers führen ihn naturgemäss dazu, derartige Gegenstände, wir wollen nicht sagen aufzusuchen, aber aufzufinden, und es bildet dann ein weiteres kennzeichnendes Merkmal seiner Forschungsweise, den Gegenstand dadurch abzurunden und ihm eine mehr als nur scheinbar neue Gestalt zu geben, dass er verwandten Bestrebungen in den von einander entlegensten Zeiten nachspürt und das unbewusst oder bewusst Gemeinsame in den Arbeiten verschiedener, einander gegenseitig oft unbekannter Schriftsteller hervorzuheben weiss.

Heute nimmt er seinen Ausgangspunkt von dem, was er Curven-Analogie nennt, d. h. Vergleichungen von Raumgebilden, deren Ausdehnungen in gegenseitiger Beziehung stehen. Wenn er zuerst Nikon, einen Pergamenier von durchaus unbekannter Lebenszeit, uns nennt, der in einer Inschrift den Satz rühmt, dass ein Würfel und dessen Innenkugel Oberflächen und Volumina proportional besitzen, so hätte er auch des Hypsikles gedenken können, der im 4. und 6. Satze seines Buches von den regelmässigen Körpern Gleiches von dem Dodekaeder und dem Isokaeder aussagt, welche der gleichen Kugel einbeschrieben sind. Er hätte auch die Gedanken seiner Leser auf die Sätze hinlenken können, welche selbst durch mehrere Jahrhunderte sich entwickelnd Umfang und Inhalt eines regelmässigen Sehnen- wie Tangenten-$2n$-Ecks zu den gleichen an den $n$-Ecken gemessenen Grössen in Beziehung setzen. Doch diese Sätze mögen zu denen zählen, an welchen der Verfasser absichtlich mit den Worten vorübergeht: mit Leichtigkeit liessen sich noch zahlreiche andere Belege für die Existenz einer solchen vergleichenden Geometrie beibringen; ein wirkliches höheres Interesse gewinne dieselbe jedoch erst dann, wo sie die Curvenlehre erreiche. Mit Recht wird hier die sogenannte *symbolizatio spiralis et parabolae* an die Spitze gestellt, welche Gregorius a St. Vincentio erdachte und in seinen in Rom gehaltenen Vorlesungen zuerst bekannt machte, worauf Cavalieri den gleichen Gegenstand mittels seiner Indivisibilien bearbeitete. Es handelt sich dabei um die Flächenräume, welche durch eine Parabel und gerade Linien, sowie durch eine Archimedische Spirale und eine Gerade begrenzt sind, und welche unter gewissen Voraussetzungen für die Constanten der beiden Curven einander gleich sind. Roberval und Pascal verglichen alsdann, wie Herr Günther weiter berichtet, Bogenlängen eben jener beiden Curven. Unter den Schülern des Gregorius a St. Vincentio in der Aufsuchung gleicher Quadraturen verschiedener Curven oder vielmehr — denn darin liegt der praktische Werth dieser Methode — in der Aufsuchung neuer Curven von gleicher Quadratur mit einer gegebenen, aber unmittelbar nicht leicht quadrirbaren Curve vermissen wir Leibnitz. In den Acta eruditorum von 1691 pag. 438 (abgedruckt in der durch C. J. Gerhardt auf Kosten der Berliner Akademie veranstalteten Ausgabe der mathematischen Schriften Leibnitzens, Bd. V S. 257, aber irrig als aus den Acta Erudit. von 1692 bezeichnet) sagt Leibnitz, er habe 1672, fast ein Fremder auf dem Gebiete der feineren Geometrie, in Paris Christian Huygens kennen gelernt, einen Gelehrten, welchem nächst Galilei und Descartes sowohl die Wissenschaft, als er persönlich am meisten verdanke. Leibnitz fährt fort: „*Huius cum legerem librum de Horologio Oscillatorio, adiungeremque Dettonvillaei (i. e. Pascalii) Epistolas, et Gregorii a S. Vincentio opus, subito lucem hausi et mihi et aliis quoque qui me in his novum norant inexpectatam*,

*quod mox speciminibus datis ostendi.*“ Allerdings hat er in einem andern Aufsatze von 1683 (Gerhardt'sche Ausgabe V, 232) auch gesagt: „*Comminiscebae triangulum, quod in omni curva vocavi characteristica cujus latus essent ... quantitates differentiales; unde statim innumera theoremata nullo negotio condebam, quorum partem postea apud Gregorios et Barrovium deprehendi.*“ Diese Stelle hatte wohl Chasles im Auge, als er in seiner Geschichte der Geometrie (deutsche Ausgabe S. 87) bemerkte, Leibnitz möge durch die Betrachtung der Figuren in dem Werke des Gregorius auf sein aus unendlich kleinen Linienelementen gebildetes *triangulum characteristicum* geführt worden sein. Wir sind nicht ganz dieser Meinung. Ohne das Gewicht der Stelle von 1683 zu verkennen, legen wir doch auch einigen Nachdruck auf die in den siebziger Jahren durch Leibnitz verfassten Abhandlungen, um die Stelle von 1691 richtig zu verstehen. Dann erkennen wir aber, dass es mindestens auch die Curven-Analogie ist, um dieses von Herrn Günther eingeführten nicht ungeeigneten Wortes uns zu bedienen, welche Leibnitz zu Anfang der siebziger Jahre in dem Werke des Gregorius kennen lernte und welche er sofort in wirksamster Weise verwerthete. In Paris schrieb bekanntlich Leibnitz die Abhandlung Quadratura Arithmetica, welche 1675 vollendet in dieser ersten Gestalt nie veröffentlicht worden ist. Ein Auszug aus derselben, Compendium Quadraturae Arithmeticae, vielleicht um 1678 oder 1679 angefertigt, fand sich unter den Leibnitz'schen Handschriften in Hannover vor. Er ist in der schon erwähnten Gerhardt'schen Ausgabe abgedruckt Bd. V S. 99—112, und auf ihn verweisen wir unsere Leser, insbesondere auf Propositio 7, S. 100—101, wo klar und deutlich ein Sector, welcher durch eine Curve und zwei von einem Punkte ausgehende Leitstrahlen begrenzt ist, seiner Fläche nach mit einem gemischtlinigen Paralleltrapeze, dessen eine Seite eine neue Curve (*figura resectarum* oder *curva nova*) ist, verglichen wird. Andere Stellen aus Veröffentlichungen der Jahre 1684, 1686, 1693 vergl. in eben jenem Bd. V S. 123, 228, 299. Wir unterlassen es, Herrn Günther auf seinen weiteren Streifzügen durch das Zeitalter der sich ausbildenden Infinitesimalrechnung zu begleiten, verweilen auch nicht mit ihm bei den ideenreichen, aber unrichtigen Arbeiten von Brendel, sondern kommen sofort zu James Booth.

Dieser Schriftsteller beschäftigte sich vielfach mit einer Curve dritten Grades, welcher er den von Herrn Günther übernommenen Namen der logocyklischen Curve gab, während französische Gelehrte die gleiche Curve als Strophoide zu behandeln gewohnt waren. Ihre Gleichung ist $(x^2+y^2)(2a-x)=a^2x$ oder in Polarcoordinaten $\varrho=\frac{a.\cos 2\theta}{\cos\theta}$. Sie besitzt eine Schleife, an welcher ein Doppelpunkt, von dem aus zwei symmetrische Zweige ins Unendliche sich erstrecken, und ein Scheitel-

punkt von selbst erkennbar sind. Für die angegebenen Gleichungen dient der Doppelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten. Verlegt man dagegen den Anfangspunkt nach dem Scheitelpunkte der Curve und führt die Hilfsgrösse $u$ durch die Kennern der Lehre von den Hyperbelfunctionen geläufige Gleichung $\tan\frac{u}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$ ein, so wird die Polargleichung $r = a(\cos u \pm \sin u)$. Jeder vom Scheitelpunkt ausgehende Leitstrahl schneidet die Curve in zwei zusammengehörigen Punkten. Die Normalen an zusammengehörige Punkte schneiden sich auf einer Parabel, der sogenannten adjungirten Parabel, deren Beziehungen zu der logocyklischen Curve selbst mit Hilfe der Hyperbelfunctionen enthaltenden Gleichung entwickelt werden. Diese Bemerkung soll nur in aller Kürze verständlich machen, was die Einleitung über Curvenanalogie und die in einem 2. Capitel zusammengefassten Haupteigenschaften der Hyperbelfunctionen bezweckt. Auf die angedeuteten Beziehungen näher einzugehen unterlassen wir, indem wir ausdrücklich auf die Günther'sche Schrift hinweisen. Die Leser derselben werden sich überzeugen, dass die hier vollzogene Einführung von Hyperbelfunctionen mehr als ein blosser Rechnungsbehelf ist und dass es Herrn Günther mittels ihrer gelungen ist, symbolische Formeln von Booth in wahre Gleichungen umzusetzen.

CANTOR.

---

Dr. KURD LASSWITZ, **Die Lehre von den Elementen während des Ueberganges von der scholastischen Physik zur Corpusculartheorie.** Programm des herzogl. Gymnasium Ernestinum zu Gotha auf Ostern 1882 (Progr. Nr. 679). 4°. 21 S.

Die physikalischen Grundanschauungen von dem Wesen der Materie und deren Zusammensetzung hat im Laufe der Zeiten vielfach gewechselt. Alle diese in einer Zeitepoche vorgekommenen Wandlungen aufzeichnen, hiesse eine Geschichte der Physik und der Chemie in den beiden gemeinsamen Theilen während der betreffenden Periode niederschreiben, und mit einem solchen weit ausgreifenden Plane scheint Herr Lasswitz etwa für die Jahrhunderte von Lionardo da Vinci bis Leibnitz sich zu tragen. Eine erste Probe, zugleich einen ersten Beweis seiner Befähigung zu derartigen Forschungen hat der Verfasser in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie III, 408 – 434, in der Abhandlung „Die Erneuerung der Atomistik in Deutschland durch Daniel Sennert" niedergelegt, und was er jetzt als ungemein interessante Programmbeilage veröffentlicht, ist ein zweites Musterstück, gleich geeignet, die Begierde nach dem Genusse des Ganzen zu reizen, welches Herr Lasswitz uns nicht länger vorenthalten sollte. Wir sind überzeugt, dass es ihm nicht schwer fallen kann, einen Verleger für die grössere

Arbeit zu finden, und würden uns ungemein freuen, wenn etwa unsere hier ausgesprochene Anerkennung des bis jetzt Gebotenen ihm das Suchen noch erleichtern könnte. Die heute uns vorliegende Programmabhandlung bezeichnet durch ihre Ueberschrift den darin behandelten Gegenstand mit hinreichender Schärfe, die es überflüssig macht, ihn hier noch zu erläutern. Nur die Persönlichkeiten nennen wir, deren Ansichten über die Elemente der Körper quellenmässige Darstellung finden. Agrippa von Nettesheim, Paracelsus, William Gilbert, endlich van Helmont sind es neben anderen weniger ausführlich behandelten Gelehrten, von deren Ansichten ein klares Bild gewonnen wird, Männer von bahnbrechender Wirksamkeit auf verschiedenen Wissensgebieten, von der praktischen Arzneikunde bis zur speculativen Philosophie, so dass auch ein Interesse an Herrn Lasswitz' Forschungen bei Lesern der verschiedensten Berufszweige ein durchaus gerechtfertigtes sein wird. Ist es uns gestattet, unserer Anzeige noch eine leise Mahnung an den Verfasser beizufügen, so besteht diese darin: er möge sich mit den Untersuchungen bekannt machen, welche Herr Kopp in dem 3. Stücke seiner Beiträge zur Geschichte der Chemie (Braunschweig 1875) unter dem Titel: „Ansichten über die Aufgabe der Chemie und über die Grundbestandtheile der Körper bei den bedeutenderen Chemikern von Geber bis G. E. Stahl" veröffentlicht hat.

Cantor.

---

**Arithmetik und Algebra nebst einer Geschichte dieser Disciplinen,** für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von E. Bergold, Professor am Gymnasium in Freiburg i. B. Karlsruhe, Verlag von H. Reuther. 1881. XXII, 200 S.

„Die nächste Veranlassung zur Herausgabe dieses Buches" — mit diesen Worten beginnt die Vorrede — „war die Absicht, den Schülern einen kurzen Abriss der Geschichte der behandelten Disciplinen zu geben, wie er in unserer Zeit auch für mathematische Lehrfächer nicht mehr fehlen sollte." Referent braucht nicht erst zu sagen, wie sehr diese Ansicht von ihm getheilt wird. Nur Eines ist allerdings nothwendig: dass der Abriss der Geschichte aus guten zweiten Quellen geschöpft sei, vorausgesetzt, dass der Verfasser nicht bis zu den ersten Quellen selbst aufsteigen konnte oder wollte, was in der That, um von anderen Gründen abzusehen, schon als viel zu zeitraubend nicht jedermanns Sache sein kann. Nun erklärt aber Herr Bergold am Schlusse der Vorrede: „Für den Geschichtsabriss wurden folgende Werke benutzt: Kästner, Geschichte der Mathematik (1796); Klügel, Mathematisches Wörterbuch (1803 flgg.); Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften (1873). Auch hat eine schätzenswerthe Programmarbeit, Treutlein, Die Ge-

schichte unserer Zahlenzeichen u. s. w. (1875), wesentliche Dienste geleistet." Im August 1881 kennt und benützt der Verfasser weder Treutlein's spätere Abhandlungen Ueber das Rechnen im XVI. Jahrhundert (1877) und Ueber die deutsche Coss (1879), noch irgend eine der nicht ganz seltenen geschichtlich-mathematischen Schriften von Curtze, Friedlein, Günther, Hankel, Matthiessen oder dem Referenten, um nur einige deutsche Namen von selbstständigen Forschern zu nennen! Er hat die mannigfachen Unterlassungssünden durch eine einzige Unterlassungstugend zu mildern gewusst. Herr Bergold hat wenigstens Höfer, Histoire des mathématiques (1874), nicht benützt, sich also die in diesem Buche enthaltenen Fehler nicht angeeignet.

CANTOR.

---

**Lehrbuch der Planimetrie**, mit Rücksicht auf Wöckel's Sammlung geometrischer Aufgaben neu bearbeitet von TH. E. SCHROEDER, Professor der Mathematik und Physik am königl. Gymnasium zu Nürnberg. III. Aufl. der Planimetrie von FISCHER. Mit 6 Figurentafeln. Nürnberg 1882, Verlag der Friedrich Korn'schen Buchhandlung. VIII, 288 S.

Das uns unterbreitete Buch ist ein Schulbuch, d. h. für den unmittelbaren Gebrauch des Schülers bestimmt, wenn auch die Leitung des Lehrers, wie immer, vorbehalten und ihr ein gewisser Spielraum überlassen bleibt. Das Buch setzt, wie der Titel es auch ausspricht, die Mitbenutzung eines andern Buches voraus, der gleichfalls durch Herrn Schroeder herausgegebenen, ursprünglich Wöckel'schen Geometrie der Alten, in einer Sammlung von 850 Aufgaben. Mit diesen beiden Bemerkungen ist der Maassstab gegeben, welcher anzulegen ist. Wir haben zu fragen, ob dem Schüler nicht zuviel zugetraut werde, und haben, denken wir, diese Frage mit Nein zu beantworten. Herr Schroeder setzt allerdings denkfaule Schüler nicht voraus, aber das soll der Mathematiker auch nicht; und wenn er ebensowenig auf einen faulen Lehrer rechnet, so stimmen wir erst recht damit überein. Wir selbst möchten, wenn wir Knaben zu unterrichten hätten, keines Buches uns bedienen, welches uns überflüssig machte. Der Weg, auf welchem die Planimetrie hier entwickelt ist, stimmt soviel als möglich mit dem der Alten überein. Beweise, deren Erfinder Jahrtausende vor uns lebten, werden häufig theils vollständig angegeben, theils angedeutet. Dass wir auch damit uns einverstanden erklären werden, bedarf kaum der Erwähnung. Ist doch jedes geschichtliche Datum ein Ruhepunkt für den Geist und eine Anregung für das Interesse, und insbesondere der Grieche ist dem mit klassischer Speise genährten Gymnasialschüler ein heimathlich bekannter Entdecker. Wenn wir an der Art, wie Herr Schröder seine geschicht-

lichen Bemerkungen einflicht, eine leise Ausstellung uns gestatten möchten, so bezieht sich dieselbe, so wunderbar eine solche Bemängelung klingen mag, auf die ängstliche Gewissenhaftigkeit im Anführen jüngster Quellen. Was geht es den Schüler an, ob die Bemerkung, dieser oder jener Satz rühre von diesem oder jenem Entdecker her, von Bretschneider, Friedlein, Günther, dem Referenten u. A. gemacht worden ist? Vor ihm will doch Herr Schroeder sich weder rechtfertigen, noch der Verantwortlichkeit für die geschichtlichen Behauptungen entladen. Lehrern gegenüber konnte aber eine solche entlastende Berufung füglich in der Vorrede ausgesprochen werden. Im Körper des Buches, wo uns S. 29, 41, 54, 56, 65, 80, 97, 131, 137, 149, 171, 180, 237 solche Verweisungen aufgefallen sind, können sie nach unserem Dafürhalten pädagogisch nur schädlich wirken, im günstigsten Falle überflüssig sein.

Cantor.

---

**Illustrirtes Hand- und Hilfsbuch der Flächen- und Körperberechnung.** Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von H. Schuberth, Lehrer an der städt Gewerk- und Sonntagsschule in Siegen. Mit 150 vollständig berechneten, der Praxis entnommenen Aufgaben und 177 Figuren auf 9 lithographirten Tafeln. Berlin 1881, Verlag von J. Horrwitz. 163 S.

Der Verfasser steht mit den Worten seiner Vorrede in einigem Gegensatze zu dem Titel des Buches. Dort meint er, die vorliegende Arbeit könne mit grösstem Vortheile dem Unterrichte in der berechnenden Geometrie als Grundlage und dem Lehrer zur Vorbereitung für seine Unterrichtsstunden dienen, hier nennt sich das Buch für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet. Wir glauben, dass das Vorwort die Absicht mit grösserer Treue ausspricht. Herr Schuberth hat für den Lehrer geschrieben, und zwar für den Lehrer an einer Gewerbeschule, der Schüler zu unterrichten hat, welchen die Sprache der Baugewerbe und der praktischen Maschinenlehre geläufig ist, und welchen Aufgaben von mitunter nicht sofort einleuchtender Auflösung im Leben schon vorgekommen sein mögen, ihnen so das Interesse an einer Wissenschaft eröffnend, welche vom einzig theoretischen Gesichtspunkte aus kaum vermöchte, ihre Aufmerksamkeit zu fesseln. Der Lehrer einer solchen Anstalt wird aus dem Gange des Schuberth'schen Buches Mancherlei für seine Zwecke sich aneignen können, Manches wird er auch nachsichtslos beseitigen müssen. So z. B. wird er nicht Hypothenuse, sondern richtig Hypotenuse schreiben lassen, so oft das Wort vorkommt; er wird S. 43 nicht $1+\cos A = 2\cos^2\frac{1}{2}B$ setzen und dann $B$ fortwährend gebrauchen, sondern von $1+\cos A = 2\cos^2\frac{1}{2}A$ die nöthige Anwendung machen; er wird nicht mit S. 48 sagen, ein Antiparallelogramm sei dasjenige Paral-

lelogramm, bei welchem die Seitenlinien von gleicher Länge und unter gleichen Winkeln nach entgegengesetzter Richtung geneigt sind; ebensowenig wird er mit S. 88 von doppelt gekrümmten Flächen reden und die Kugelfläche als solche bezeichnen, weil sich auf derselben in keiner Richtung eine gerade Linie ziehen lasse; kurzum, er wird bei der Benutzung des Buches fortwährend mit Vorsicht verfahren, um sich der nicht seltenen Druckfehler und stylistischen Ungenauigkeiten zu erwehren. Wohl aber wird er bald bemerken, dass diese Mängel nur verhältnissmässig geringe sind gegenüber von den vortrefflich gewählten Beispielen und den meistens sehr deutlichen und lehrreichen Zeichnungen. Er wird also das Buch, wie uns scheint, im Ganzen gern benutzen und auch keinen Anstoss daran nehmen, dass manche Regeln der Längen-, Flächen-, Körperausmessung nur angegeben und nicht abgeleitet sind.

Cantor.

---

**Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung, insbesondere die Militärdienstversicherung,** von Dr. August Amthor. Separatabdruck aus dem Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden. Ostern 1882. 4°. 46 S.

Wenn Herr Amthor durch seine im Jahrg. 1880 dieser Zeitschrift abgedruckte Abhandlung über das Rinderproblem des Archimedes sich als unerschrockener Rechner zu erkennen gegeben hat, so hat er in der uns vorliegenden Programmbeilage die gleiche Eigenschaft in erhöhtem Maasse bewährt. Der mathematische Gedanke, welcher allem mit der Lebensdauer zusammenhängenden Versicherungswesen zu Grunde liegt, ist gewiss ein ungemein einfacher, aber der Weg von diesem Gedanken gleicher Leistung und Gegenleistung für alle einer Versicherungsclasse angehörigen Individuen unter Reduction aller Summen auf einen und denselben Zeitpunkt und unter Miteinrechnung der erwachsenden Betriebskosten bis zur Ableitung der ihm entsprechenden Buchstabenformeln ist schon ein recht mühseliger, und nun gar erst die Einsetzung der durch die Statistik gelieferten bestimmten Zahlenwerthe erfordert eine Sicherheit im Rechnen, welche der Unfehlbarkeit nahestehen muss. Grund genug für viele Mathematiker, den Fragen praktischer Wahrscheinlichkeitsrechnung fern zu bleiben, und da andererseits zur Prüfung derartiger Rechnungen immerhin etwas Mathematik erforderlich ist, die den Berufsrechnern meistens fehlt, so ist es doppelt dankenswerth, wenn Persönlichkeiten, die in beiden Sätteln gerecht sind, sich zum allgemeinen Wohle opfern. Fehlt es doch neben Versicherungsanstalten auf richtiger Grundlage auch nicht an solchen, welche die Leichtgläubigkeit und Unwissenheit zu missbrauchen gegründet scheinen und deren Schäd-

lichkeit das Publicum, auf dessen absichtliche oder unabsichtliche Ausbeutung es hinausläuft, nur dem Mathematiker allenfalls glaubt, wenn es auch ein leichtes Kriterium zur ersten eigenen Prüfung an der Hand hätte, darin bestehend, dass alle wie immer gearteten Lebensversicherungssatzungen falsch sind, welche die Leistungen für eine Versicherungsclasse durch eine andere mit aufbringen lassen, ohne dass Gegenseitigkeit darin stattfände; vergl. z. B. die Satzungen der sogenannten Reichsversicherungsbank in Bremen.

Dass Herr Amthor diesem einfachsten Gedanken unentwegt treu bleibt, brauchen wir nicht erst zu sagen; wohl aber dürfte es nicht unangemessen sein, auf eine kleine absichtliche Ungenauigkeit hinzuweisen, welche den Gegenstand einer brieflichen Unterredung zwischen dem Verfasser und uns gebildet hat.

Die Zahl der gleichzeitig Geborenen, welche zur Militärdienstversicherung sich melden, betrage $a_0$, und von diesen erreichen $a_n$ das $n^{te}$, beispielsweise $a_{20}$ das 20. Lebensjahr, mithin das Alter, in welchem erstmalig die Frage nach Einstellung in das stehende Heer oder nach Befreiung, beziehungsweise Ueberweisung zur Ersatzreserve, oder auch nach vorläufiger Zurückstellung zur Entscheidung kommt, eine Frage, die für die Zurückgestellten bei Erreichung des 21. Lebensjahres in allen drei Unterabtheilungen, bei Erreichung des 22. Lebensjahres mit den beiden ersten Möglichkeiten sich erneuert. Die seltenen Fälle noch späterer Entscheidung sind bei der Berechnung ausgeschlossen. Die Bedingungen der Versicherung sind in dem Normalfalle folgende: die Prämienzahlung des Versicherten erfolgt jährlich bis zum 31. December des Jahres, in welchem der Versicherte das 20. Lebensjahr vollendete. Stirbt der Versicherte vor Erreichung der Militärzeit, so verfallen die gezahlten Prämien der Anstalt. Die versicherte Summe wird in vier Jahresraten zahlbar mit dem Augenblicke der Einstellung des Versicherten in das Heer oder die Flotte; sollte der Versicherte innerhalb der gesetzlichen dreijährigen Dienstzeit sterben, so ist damit die Zahlungspflicht der Anstalt für keinen Theil der versicherten Summe aufgehoben. Wird der Versicherte von der Dienstpflicht befreit oder der Ersatzreserve überwiesen, so werden drei Viertel der gezahlten Prämien ohne Zinsen zurückvergütet. Nimmt man nun an, es werden $d_1$, $d_2$, $d_3$ Versicherte im 20., 21., 22. Lebensjahre eingestellt und $f_1$, $f_2$, $f_3$ in eben diesen Jahren frei oder der Ersatzreserve überwiesen, so baut sich aus diesen Jahren die Summe der Leistungen auf, zu welchen die Versicherungsgesellschaft verpflichtet ist. Zwischen den Zahlen $a$, $d$, $f$ findet dabei folgender Zusammenhang statt. Im 20. Lebensjahre wird über $d_1$ und $f_1$ endgiltig bestimmt. Zurückgestellt werden $a_{20}-d_1-f_1$, von welchen $\frac{a_{21}}{a_{20}}(a_{20}-d_1-f_1)$ das nächste Lebensjahr erreichen. Aus diesem trifft die Entscheidung $d_2$ und $f_2$, zu-

rückgestellt werden $\frac{a_{21}}{a_{20}}(a_{20}-d_1-f_1)-d_2-f_2$ und von diesen erreichen $\frac{a_{22}}{a_{21}}\left[\frac{a_{21}}{a_{20}}(a_{20}-d_1-f_1)-d_2-f_2\right]$ das folgende Lebensjahr, in welchem über sie, d. h. über $d_3$ und $f_3$ entschieden wird. Mithin ist

$$d_3+f_3=\frac{a_{22}}{a_{21}}\left[\frac{a_{21}}{a_{20}}(a_{20}-d_1-f_1)-d_2-f_2\right]=a_{22}-\frac{a_{22}}{a_{20}}(d_1+f_1)-\frac{a_{22}}{a_{21}}(d_2+f_2),$$

beziehungsweise

$$\frac{d_1+f_1}{a_{20}}+\frac{d_2+f_2}{a_{21}}+\frac{d_3+f_3}{a_{22}}=1$$

oder auch

$$a_{20}=(d_1+f_1)+\frac{a_{20}}{a_{21}}(d_2+f_2)+\frac{a_{20}}{a_{22}}(d_3+f_3).$$

Die hier auftretenden Brüche sind nahezu $\frac{a_{20}}{a_{21}}=1{,}01$ und $\frac{a_{20}}{a_{22}}=1{,}02$, so dass sich ergiebt

$$a_{20}=d_1+f_1+d_2+f_2+d_3+f_3+\frac{d_2+f_2}{100}+\frac{d_3+f_3}{50}.$$

Statt dieser richtigen Werthe hat Herr Amthor solche $d$ und $f$ angenommen, welche $a_{20}=d_1+f_1+d_2+f_2+d_3+f_3$ entsprechen, hat also absichtlich die $d$ und $f$ vergrössert. Mit dieser Vergrösserung wächst nämlich ersichtlich die Summe der der Gesellschaft zugemutheten Leistungen, wachsen folglich auch die Versicherungsprämien, wächst endlich die Solidität der Versicherungsgesellschaft, das Haupterforderniss, auf welches zu sehen ist.

Cantor.

---

**Aufgaben zum Rechnen mit Systemzahlen** von Oberlehrer Karl Hunrath. Programm des Gymnasiums zu Hadersleben für das Schuljahr 1881–1882. 4°. 20 S.

Der Verfasser hat gewiss Recht, wenn er dem vortrefflichen Joh. Heinr. Traug. Müller darin beipflichtet, es sei im Rechenunterrichte darauf zu achten, dass nicht das Gedächtniss dem Verstande vorauseile, und dieses werde am besten dadurch erreicht, dass man den Schüler die an dekadischen Zahlen erlernten Operationen an einem andern Zahlensystem auszuführen nöthige. Herr Hunrath ist noch ziemlich weit darüber hinausgegangen, indem er bestimmte Beispiele an Zahlen sehr verschiedener, nicht blos eines Systems zu rechnen giebt und auch das allgemeine System mit der Grundzahl $a$ in Betracht zieht, also eigentlich schon algebraische Analysis mit seinen Schülern treibt. In welcher Classe er die Zeit zu solcher umfassenden und an sich vortrefflichen Geistesübung findet, beziehungsweise wie reif die Schüler bereits sind, mit welchen er sie vornimmt, hat er leider nicht bemerkt. Jedenfalls scheint

s der Versuch interessant, und mancher Lehrer, der ihn, wenn auch ·hl in etwas bescheideneren Grenzen, nachzumachen wünschen möchte, :d sich freuen, in diesem Programm Material zum Voraus gesammelt finden.

CANTOR.

---

**bungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra.** Nach der Aufgabensammlung von HEIS für höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen, Progymnasien und Realschulen II. Ordnung bearbeitet von Dr. LUDWIG MATTHIESSEN, o. ö. Professor der Physik an der Universität zu Rostock, früher Professor und Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. preuss. Gymnasium in Husum. Köln 1882, bei M. Du Mont-Schauberg. VI, 252 S.

Wenn eine Aufgabensammlung gleich der von Heis bereits in Auflagen Verbreitung gefunden hat, so verstummt dieser allseitigen ıerkennung gegenüber jedes Einzellob, wie jeder Einzeltadel. Nur eine ımängelung scheint aus dem Kreise der Lehrer an den Schulen etwas ədrigerer Rangstufe laut geworden zu sein, dass nämlich für die Schüler, ılche sie zu unterrichten haben, die Heis'sche Sammlung doch einigerıssen schwierig erscheine, dass es wünschenswerth sei, die leichteren ıfgaben zu vermehren ohne die Weglassung jener höheren Partien, zu ılchen nur eine stufenmässigere Einführung hinleiten solle. Die Verȝshandlung hat zur Erfüllung dieses Wunsches sich an Prof. Matiessen gewandt, sicherlich an die richtige Persönlichkeit. Sein 1881 3. Auflage erschienener Commentar zur Heis'schen Sammlung verrgt die genaueste Kenntniss des zu überarbeitenden Werkes; seine lhere Thätigkeit an Mittelschulen liess ihn die Bedürfnisse derselben s eigener Anschauung erkennen; seine eigenen Leistungen auf dem ·biete der reinen, wie der angewandten Mathematik können als Geıhrleistung dafür dienen, dass er nicht leichter mit seichter zu verıchseln der Mann ist. Und somit können wir getrost die Hoffnung ssprechen, es werde die umgearbeitete Sammlung ihren Zweck nicht nder erfüllen, als dieses seit Jahren für die ursprüngliche Sammlung ·h bewahrheitet hat.

CANTOR.

---

**ıfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene** für die oberste Stufe der höheren Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. WILLIAM ABENDROTH, Professor am Gymnasium zum heil. Kreuz in Dresden. Mit 68 Holzschnitten. 134 S. Leipzig 1882, Verlag von S. Hirzel.

Etwa das zehnte Lehrbuch über die gleichen Gebiete, welches innerlb der letzten drei Jahre in dieser Zeitschrift zur Besprechung gelangt

ist! Sind die Herren Verfasser nicht der Meinung, das sei etwas zu viel? Wir zweifeln kaum, dass wir eine meistens zustimmende Antwort auf unsere Frage erhalten werden; nur sind wir ebenso wenig im Zweifel, ein Jeder werde das Zuviel auf „die Anderen“ beziehen! Das hat ja bis zu einem gewissen Grade seine Berechtigung. Wer immer beim Unterrichte das Lehrbuch eines Andern zu benutzen hat, findet zuverlässig Mängel darin, welche er vermieden wünscht; schreibt er dann selbst ein Lehrbuch, so wird er, wenn er objectiv genug denkt, schon bei der zweiten, vielleicht bereits bei der erstmaligen Benutzung erkennen, dass er, jene früheren Mängel vermeidend, andere sich zu Schulden kommen liess. Und die Moral davon? Die lautet nach unserem Dafürhalten also: Es giebt kein absolut gutes Lehrbuch; es giebt heutzutage wenige absolut schlechte; darum vermeide man die letzteren und halte sich an irgend ein beliebiges mittelgutes Buch, am liebsten an ein und dasselbe in möglich vielen Unterrichtsanstalten, denn je mehr ein Buch benutzt wird, desto häufiger folgen sich die Auflagen, desto genauer kann es sich den in Zeitschriften u. s. w. laut gewordenen Wünschen entsprechend auf der Höhe des Zeitbedürfnisses halten.

Wenn wir diesen Mahnruf gegen den Schulpartikularismus, der uns schon einige Zeit auf dem Herzen lag, ganz zufälligerweise gerade bei Gelegenheit der Abendroth'schen Analytischen Geometrie ausstossen, so mag der Herr Verfasser uns denselben nicht verübeln. Nicht gegen ihn besonders ist er gerichtet. Wir geben sogar gern zu, dass wir sein Buch mit einigem Vergnügen durchlesen haben, dass wir es in seiner Klarheit, welche wissenschaftlicher Auffassung nicht im Wege steht, für brauchbarer halten, als manche der wenige Jahre älteren Vetter und Basen; aber bis zur Anerkennung der Nothwendigkeit, dass es geschrieben werden musste, können wir uns nicht versteigen.

CANTOR.

---

**A Treatise on the theory of determinants** with graduated sets of exercises for use in colleges and schools by THOMAS MUIR, *M. A. F. R. S. E.*, mathematical master in the high school of Glasgow. London 1882. Macmillan and Co. 240 pag.

Dieses Buch, welches die Vorrede als sogen. *text-book* bezeichnet, welches also die Bestimmung hat, den Schülern statt schriftlicher Aufzeichnungen zu dienen, zerfällt in fünf Abtheilungen: eine Einleitung (S. 5—23), ein Capitel über Determinanten im Allgemeinen (S. 24—148), ein solches über Determinanten besonderer Art (S. 149—227), eine gedrängte geschichtliche Uebersicht (S. 228—234), endlich eine Zusammenstellung der Auflösungen zu den an den verschiedensten Stellen eingestreuten Uebungsaufgaben (S. 235—240).

Die Einleitung geht von der Definition aus: man nenne $aek + dhc + gbf - gec - dbk - ahf$ eine Determinante und schreibe dafür $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$. Dann wird rückwärts gezeigt, wie von dem Symbole ausgehend die Determinante sich herstellen lasse, indem man die positiven Glieder von der Diagonale $aek$ aus erhält, wozu die Verbindung von je einer nächsten und entfernteren Parallelen auf beiden Seiten dieser Diagonale, also $dh$ verbunden mit $c$ und $bf$ verbunden mit $g$, hinzutritt, während die negativen Glieder in ähnlicher Weise aus der zweiten Diagonale $ceg$ und deren Parallelen sich ableiten. Aus dieser rein empirischen Definition und mechanischen Bildungsweise werden nicht weniger empirisch und mechanisch eine Anzahl von Determinantensätzen gefolgert; so der Satz von der Vervielfachung einer Determinante mit einer Zahl durch Vervielfachung einer Zeile oder einer Columne, so die Vertauschbarkeit von Zeilen und Columnen, so das Verschwinden der Determinante bei Gleichheit zweier Reihen, so die Zerlegung der Determinante in Producte der Elemente einer Reihe in je eine Unterdeterminante und die Anwendung auf die Auflösung linearer Gleichungen. Schliesslich wird der Schüler mit dem Begriffe der Inversionen bekannt gemacht und wird wieder empirisch gezeigt, dass eine von der Inversionszahl Gebrauch machende Zeichenregel dieselben Vorzeichen für die Glieder der Determinante liefere, wie vorher.

Das Capitel über Determinanten im Allgemeinen findet somit den Schüler bereits im Besitz einer gewissen Summe von Kenntnissen, was angenehm ist; zugleich aber auch — und das ist die grosse Schattenseite der Einleitung — verwöhnt durch leichte, um nicht zu sagen leichtfertige Inductionen, und deshalb vielleicht weniger geneigt, die Nothwendigkeit einer strengeren Darstellung einzusehen, wie dieselbe ihm jetzt geboten wird. Dieses Capitel bringt nämlich die in allen Lehrbüchern enthaltenen Sätze streng bewiesen, auch solche, welche in der Einleitung zu vorläufiger Kenntniss gebracht waren. Die Reihenfolge der Sätze ist von der anderer Lehrbücher mitunter verschieden, und es erscheint didaktisch sehr gerechtfertigt, dass Herr Muir (S. 147) in einem besondern Paragraphen darauf aufmerksam macht, dass die Umkehrbarkeit der meisten Sätze der Determinantenlehre so weit gehe, dass, was dem einen Schriftsteller Definition sei, von dem andern als Lehrsatz bewiesen werde und umgekehrt. Beispielsweise bringt Herr Muir das Laplace'sche Theorem von den Determinanten mit Rechtecke bildenden Nullelementen erst nach der Multiplication der Determinanten mit einander, und die Grassmann'schen alternirenden Einheiten, auf welche Herr Scott sein ganzes Lehrbuch ähnlichen Inhalts gegründet hat, erscheinen ganz vorübergehend S. 146. Dabei ist der sehr sinnentstellende

Druckfehler $\iota_r \iota_s = \iota_s \iota_r$ statt $\iota_r \iota_s = -\iota_s \iota_r$ leider übersehen worden. Vielleicht als nicht ganz consequent möchte bezeichnet werden, dass in diesem Capitel schon gelegentlich Determinanten besonderer Art auftreten, z. B. S. 88 solche, deren in der Hauptdiagonale befindlichen Elemente sämmtlich $= 0$ sind; sie beantworten die Frage nach denjenigen Permutationsformen aus $n$ Elementen, in welchen kein Element an seiner Normalstelle sich befindet, eine Frage, die vermuthlich zuerst von dem Referenten Bd. II S. 410 dieser Zeitschrift (1857) aufgeworfen wurde. Für diese Determinanten hat Herr Sylvester den Namen der Nullaxialen oder wirbellosen Determinanten in Vorschlag gebracht.

Mit sonstigen Determinanten besonderer Art beschäftigt sich der folgende Abschnitt des Buches. Unter Namen und mit Bezeichnungen, welche in England allerdings üblich sind, in Deutschland aber nur zum geringsten Theile sich einzubürgern vermochten, erscheinen hier verschiedene Gattungen. Zuerst die Continuants (Kettenbruchdeterminanten). Wenn dabei S. 151 von der Umformung von
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$
in
$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1c_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_2 & -b_2c_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_3 & -b_3c_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$
die Rede ist, welche gelinge, indem man die erste Columne mit $-\frac{1}{c_1}$ und die erste Zeile mit $-c_1$, die zweite Columne mit $-\frac{1}{c_2}$ und die zweite Zeile mit $-c_2$ u. s. w. vervielfache, so beruht diese Angabe auf einem unbegreiflichen Irrthum. Die Verwandlung erfolgt vielmehr, indem man die zweite Columne mit $-c_1$ und die zweite Zeile mit $-\frac{1}{c_1}$, die dritte Columne mit $c_1c_2$ und die dritte Zeile mit $\frac{1}{c_1c_2}$, die vierte Columne mit $-c_1c_2c_3$ und die vierte Zeile mit $-\frac{1}{c_1c_2c_3}$ u. s. w. vervielfacht. Alternants werden Determinanten
$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & \dots \\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) & \dots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$
genannt, die durch Vertauschung zweier Variabeln, etwa $x$ und $y$, den entgegengesetzten Werth annehmen und sich dadurch als alternirende Functionen kundgeben. Es folgen die symmetrischen Determinanten und die *skew determinants* (symmetrale Deter-

minanten), letztere mit ihren Beziehungen zu den Pfaffians. Die als cyclosymmetrische Determinante besonders interessante Untergattung der symmetrischen Determinante tritt als Circulant auf. Die Jacobians (Jacobi's Functionaldeterminante) findet Beachtung, und ebenso auch Hesse's Inflexionsdeterminante, der die Engländer den Namen Hessian beizulegen pflegen. Ja, um noch einen weiteren Namen hat Herr Muir diese Patronymika vermehrt. Er nennt Wronskian die Determinante, deren Zeilen aus Functionen einer Variabeln und deren aufeinanderfolgende Ableitungen gebildet sind, also $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \frac{dy_3}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} & \frac{d^2y_3}{dx^2} \end{vmatrix} = W_x(y_1, y_2, y_3)$. Wir könnten uns in diesem, wie in den anderen Fällen immer noch leichter mit den Namen, als mit den Bezeichnungen befreunden, welche einen, wie uns scheint, höchst überflüssigen Ballast an Gedächtnissstoff dem Schüler aufladen.

Ueber die geschichtliche Darstellung der Entwickelung der Determinantenlehre können wir rasch hinweggehen. Herr Muir selbst betrachtet dieselbe keineswegs als eine erschöpfende und verweist dafür auf seine ausführliche Abhandlung, welche im Octoberheft 1881 des Quarterly Journal of Mathematics zum Abdruck gekommen ist.

Die sehr zahlreichen Uebungsaufgaben tragen zur Brauchbarkeit des Werkes bei.

Cantor.

# Bibliographie

vom 1. Juli bis 15. August 1882.

---

### Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Aus dem Jahre 1881. Berlin, Dümmler. 8 Mk.

Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. Tome 28, Nr. 1. Leipzig, Voss. pro compl. 9 Mk.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. 7. Série. Tome 30, Nr. 3—5. Leipzig, Voss. 9 Mk. 20 Pf.

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. 4. Jahrg., 1. Heft, herausgegeben von W. v. Bezold und C. Lang. München, Ackermann. pro compl. 18 Mk.

Jahresbericht der grossherzogl. badischen meteorologischen Centralstation. Nr. 13, f. d. J. 1882. Karlsruhe, Braun. 1 Mk. 50 Pf.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, herausgegeben v. C. L. Kronecker und W. Weierstrass. 93. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 12. Bd. Jahrg. 1880, 1. Heft, herausgegeben von Ohrtmann. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1877. 33. Jahrg., redig. v. B. Schwalbe. 3. Abth.: Physik der Erde. Berlin, H. Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

—— im Jahre 1880. 36. Jahrg., redig. v. Neesen. 1. Abth.: Allgem. Physik und Akustik. Ebendas. 7 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. F. Frenkel. 31. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1881. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Heller, A., Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 1. Bd.: Von Aristoteles bis Galilei. Stuttgart, Enke. 9 Mk.

### Reine Mathematik.

Krazer, A., Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Prym, F., Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und Charakteristikentheorie. Ebendas. 6 Mk.

NETTO, E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

HEUN, K., Die Kugelfunctionen und Lamé'schen Functionen als Determinanten. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

HOČEVAR, F., Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung $L\,dx + M\,dy + N(x\,dy - y\,dx) = 0$. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

PICK, A., Ueber die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen. Ebendas. 40 Pf.

GEGENBAUER, L., Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwickelung von $e^{xi}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

KLIMPERT, R., Kurzgefasstes Handbuch der Arithmetik und Algebra. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.

WALLENTIN, F., Lehrbuch der Arithmetik für die Obercl. d. Gymn. u. Realsch. Wien, Klinkhardt. 3 Mk.

SIMONY, O., Ueber eine neue Reihe mathematischer Erfahrungssätze. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

NEHLS, CH., Ueber graphische Rectification von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Hamburg, Jenichen. 1 Mk. 50 Pf.

FIEDLER, W., Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

REIDT, F., Die trigonometrische Analysis planimetrischer Constructionsaufgaben. Ebendas. 1 Mk. 20. Pf.

ZEUTHEN, H., Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Ebendas. 2 Mk.

DZIOBEK, O., Neue Beiträge zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 20 Pf.

ZIMMERMANN, O., Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über Kegelschnitte und Curven III. O. mit 1 Doppelpunkt. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk.

DRASCH, H., Beitrag zur synthet. Theorie der Curven III. O. mit 1 Doppelpunkt. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

LE PAIGE, C., Ueber conjugirte Involutionen. Ebendas. 15 Pf.

SCHMIDT, E., Handbuch zur Discussion von Curven und Oberflächen. Hamburg, Behre. 3 Mk.

ALLÉ, M., Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und der Raumcollineation. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

ESCHERICH, G. v., Die Construction algebraischer Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. Ebendas. 20 Pf.

WEYR, E., Ueber gemeinschaftliche Bisecanten algebraischer Raumcurven. Ebendas. 15 Pf.

## Angewandte Mathematik.

Petersen, J., Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausgabe von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen, Höst & S. 3 Mk. 60 Pf.

Mach, E., Ueber Guebhard's Darstellung der Aequipotentialcurven. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Stefan, J., Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. Ebendas. 30 Pf.

Hohmann, F., Beschreibung, Theorie und Gebrauch des Präcisions-Polarplanimeters. Erlangen, Deichert. 2 Mk.

Klauser, H., Die Vermessungskunde. Reichenberg, Schöpfer. 2 Mk. 40 Pf.

Beer, A., Einleitung in die höhere Optik. 2. Aufl., bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Bečka, G., Ueber d. Bahn des Planeten Ino (173). (Ak.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Gruss, G., Ueber die Bahn der Loreley (165). Ebendas. 25 Pf.

## Physik und Meteorologie.

Lecher, E., Ueber Ausstrahlung und Absorption. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

Obermayer, A. v., Versuche über die Diffusion von Gasen. II. Abth. Ebendas. 30 Pf.

Wesendonck, H., Untersuchungen über die Spectra der Kohlenstoffverbindungen. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 80 Pf.

Clausius, R., Ueber die verschiedenen Maasssysteme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. Leipzig, Barth. 60 Pf.

Wiedemann, G., Die Lehre von der Elektricität. Zugleich 3. Aufl. der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

Wild, H., Das magnetische Ungewitter vom 30. Jan. bis 1. Febr. 1881. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 2 Mk.

Stefan, J., Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Wächter, F., Ueber die materiellen Theile im elektrischen Funken. Ebendas. 50 Pf.

Wassmuth, A., Ueber die specifische Wärme stark magnetisirten Eisens und das mechanische Aequivalent einer Verminderung des Magnetismus durch Wärme. Ebendas. 20 Pf.

Lippich, F., Ueber polaristrobometrische Methoden. Ebendas. 1 Mk. 40 Pf.

Lindemann, E., Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 50 Pf.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Bd.: Allgemeine Physik und Akustik. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

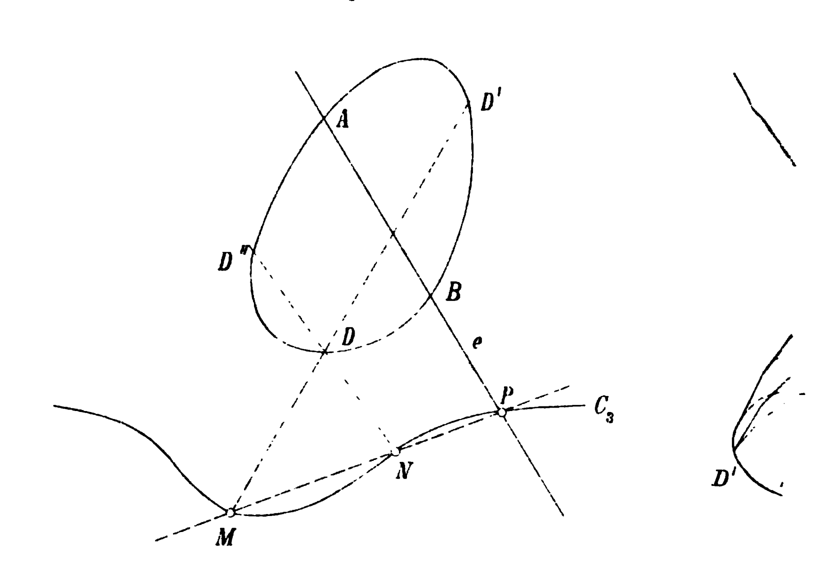



Fig. 1.

[(11) 1111]

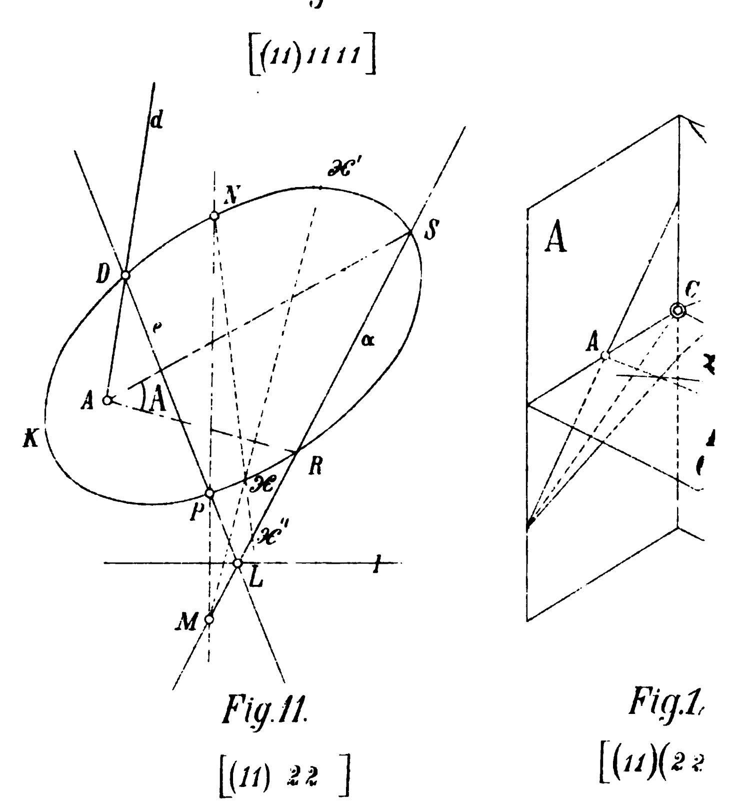



Fig. 11.

[(11) 22 ]

Fig. 1

[(11)(22

## Verlag von Louis Nebert in Halle a. S.

**nneper,** Prof. Dr. **A., Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge.** Lex. 8°. br. 16 Mk.

**homae,** Hofrath Prof. Dr., **Elementare Theorie d. analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen.** gr. 4°. br. 7 Mk. 50 Pf.

**homae,** Prof. Dr. **J., Abriss einer Theorie der complexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen.** 2. vermehrte Auflage. gr. 8°. br. 5 Mk. 25 Pf.

**homae,** Prof. Dr. **J., Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4°. br. 3 Mk.

**Thomae,** Prof. Dr. **J., Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Thle. gr. 4°. br. 9 Mk.

**Thomae,** Prof. Dr. **J., Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4°. br. 2 Mk. 80 Pf.

**Thomae,** Prof. Dr. **J., Ebene geometrische Gebilde I. und II. Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet.** gr. 4°. br. 2 Mk. 25 Pf.

**epetitorium der analytischen Geometrie.** gr. 8°. br. 1 Mk. 20 Pf.

**Günther,** Prof. Dr. **S., Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8°. br. 12 Mk.

**Günther,** Prof. Dr. **S., Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. br. 12 Mk.

**adicke, A., Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.** gr. 8°. br. 1 Mk. 20 Pf.

**dstreil,** Prof. Dr. **J., Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamiltonschen) Quaternionen.** gr. 8°. br. 2 Mk. 25 Pf.

**Hochheim,** Prof. Dr. **A., Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein **Alkarkhi.** 3 Hefte. gr. 4°. br. 3 Mk. 90 Pf.

**Hochheim,** Prof. Dr. **A., Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8°. br. 3 Mk.

**Dronke,** Dr. **A., Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8°. br. 4 Mk. 50 Pf.

**Langer,** Dr. **P., Die Grundprobleme der Mechanik.** gr. 8°. br. 1 Mk. 80 Pf.

**Frege,** Dr. **G., Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8°. br. 3 Mk.

---

*Das diesem Hefte beigegebene:*

Verzeichnis des Verlags

von

# B. G. Teubner in Leipzig

auf dem Gebiete der

# Mathematik

## der technischen und Naturwissenschaften

*empfehle ich den Herren Mathematikern zur freundlichen Beachtung mit dem Bemerken, dass von den eigentlichen Schulbüchern gern ein Freiexemplar übersandt wird, wenn Aussicht auf Einführung vorhanden ist.*

*Leipzig, September 1882.* **B. G. Teubner.**

# INHALT.

Seite

XI. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Von Dr. A. Weiler in Hottingen (Taf. IV Fig. 1—20) 257
XII. Grundzüge der mathematischen Chemie. Von Prof. Dr. W. C. Wittwer 289

## Kleinere Mittheilungen.

XVI. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen. Von Johann Morawetz in Travnik in Bosnien . . . . . . . 310
XVII. Zur Theorie d. Punktmengen. Von W. Veltmann i. Frankenthal i. d. Pfalz 315
XVIII. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Von Prof. Dr. Theodor Wittstein in Hannover . . . . . . . . . . . 316
XIX. Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Von O. Schlömilch (a. d. Sitzungsber. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch.) 317

## Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

**Recensionen:**

Harnack, Prof. Axel, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Von H. Weber in Königsberg . . . . . . 161
Mayr, Prof. Dr. Alois, Zur Integration der linearen Differential-Gleichungen. Von E. Lommel . . . . . . . . 164
Sylow, L. et Lie, S., Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel. Von M. Noether in Erlangen . . . . . . . . . . 169
v. Escherich, Prof. Dr. G., Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. Von M. Noether in Erlangen . . . . . . 171
Wiener, H., Ueber Involutionen auf ebenen Curven. Von M. Noether 174
Noth, Oberlehrer Dr. Hermann, Die Arithmetik der Lage. Von K. Schwering in Coesfeld . . . . . . . . . . 175
Consentius, Rudolf Otto, Die Rückläufigkeit des Raumes ein Irrthum u. Ursache weiterer Irrthümer. Von K. Schwering i. Coesfeld 177
Goldschmidt, L., Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen. Von K. Schwering in Coesfeld . . . . . . . . . 178
Schlegel, Oberlehrer Dr. Victor, Einige geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Von Dr. S. Günther in Ansbach . . . . . . . . . . . . . 179
Auerbach, Privatdocent Dr. Felix, Die theoretische Hydrodynamik. Von Dietrich . . . . . . . . . . . . . . 181
Günther, Prof. Dr. Siegmund, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Von Cantor . . . . . . . . 183
Lasswitz, Dr. Kurd, Die Lehre von den Elementen während des Ueberganges von der scholastischen Physik zur Corpusculartheorie. Von Cantor . . . . . . . . . . . 186
Bergold, Prof. E., Arithmetik und Algebra nebst einer Geschichte dieser Disciplinen. Von Cantor . . . . . . . . . 187
Schroeder, Prof. Th. E., Lehrbuch der Planimetrie. Von Cantor . 188
Schubert, H., Illustrirtes Hand- und Hilfsbuch der Flächen- und Körperberechnung. Von Cantor . . . . . . . . . 189
Amthor, Dr. August, Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung, insbesondere die Militärdienstversicherung. Von Cantor 190
Hunrath, Karl, Aufgaben zum Rechnen mit Systemzahlen. Von Cantor . . . . . . . . . . . . . . . . 192
Matthiessen, Prof. Dr. Ludwig, Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Von Cantor . . . . . . 192
Arendroth, Prof. Dr. William, Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene. Von Cantor . . . . . . . 193
Muir, Thomas, A Treatise on the theory of determinants. Von Cantor 194

**Bibliographie** vom 1. Juli bis 15. August 1882:

Periodische Schriften . . . . . . . . . . . . . . . 196
Geschichte der Mathematik und Physik . . . . . . . . 197
Reine Mathematik . . . . . . . . . . . . . . . 198
Angewandte Mathematik . . . . . . . . . . . . . 200
Physik und Meteorologie . . . . . . . . . . . . 200

---

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

DEC 22 1882



# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**27. Jahrgang. 6. Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 30. November 1882.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1882.

Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung in Stuttgart.

## Elemente der projectivischen Geometrie

von

Prof. L. Cremona,

Director der Ingenieurschule in Rom.

Unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von

Fr. K. Trautvetter,

Lehrer der Mathematik in Winterthur.

8°. 311 Seiten mit 214 Figuren im Text. M. 5. —

---

In meinem Verlage ist soeben erschienen:

C. G. J. Jacobi's

## gesammelte Werke.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften.

**Zweiter Band.**

Herausgegeben

von

K. Weierstrass.

broch. 17 Mark.

Berlin, den 15. November 1882. **G. Reimer.**

---

## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

**Schröter, Dr. Heinrich,** Professor der Mathematik an der Universität Breslau, **Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung** als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Prinzipien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XV u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. 1880. geh. n. ℳ 16. —.

Den von Jacob Steiner entworfenen Plan „einer ausführlichen und umfassenden Behandlung der Kurven und Flächen zweiten Grades durch Konstruktion und gestützt auf projektivische Eigenschaften" (siehe Vorwort zu J. Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte. 2. Aufl., Leipzig 1876), hat der Verfasser vorliegenden Buches weiter auszuführen gesucht, indem er, gestützt auf die „Theorie der Kegelschnitte", die einfachsten Erzeugnisse projektivischer Gebilde im Raume, d. i. die Oberfläche zweiter Ordnung und die Raumkurve dritter Ordnung eingehend untersucht. Der Betrachtung der letzteren, die erst durch die Arbeiten von Moebius, Chasles und Seidewitz den Geometern näher bekannt wurde, geht naturgemäß die synthetische Behandlung der geradlinigen Flächen 2. O. (Kegel, einfaches Hyperboloid) voraus und bildet den größeren Teil des ersten Abschnittes. Der Verfasser beschränkt sich hierbei nicht blos auf die reellen Flächen, sondern gelangt von den Polareigenschaften derselben zu den erweiterten Begriffen des „Polarbündels" und des „räumlichen Polarsystems", welche auch die imaginären Flächen einschließen und deren Kenntnis wir den Arbeiten K. G. C. v. Staudts (Geom. d. Lage. Nürnberg 1847 u. Beiträge zur Geometrie der Lage 1856—60) verdanken. Die Raumkurve 3. O. wird sodann als Erzeugnis dreier projektivischer Ebenenbüschel eingeführt, und aus dieser Erzeugung werden ihre hauptsächlichsten Eigenschaften, die von Moebius, Chasles, Cremona, v. Staudt u. a. entdeckt sind, zusammenhängend abgeleitet.

Im zweiten Abschnitte werden die vier Grundgebilde zweiter Stufe (das Strahlen- und Ebenen-Bündel, das Punkt- und Strahlen-Feld) eingeführt, die in doppelter Art auftretende projektivische Beziehung derselben (Kollinearität und Reziprocität) durch Konstruktion festgestellt, wie es die Arbeiten von Magnus, Moebius und Seidewitz gelehrt haben und als Erzeugnisse dieser Gebilde nach der sich wiederum darbietenden Raumkurve 3. O. vorzugsweise die allgemeine Fläche 2. O. einer ausführlichen Betrachtung unterzogen. Hier tritt nun die Fläche 2. O. (auch die nicht geradlinige), als Erzeugnis zweier reziproken Bündel, die Raumkurve 3. O. als Erzeugnis zweier kollinearen Bündel auf. Die Konstruktion selbst führt aufs neue zum räumlichen Polarsystem, aus dem die Eigenschaft der konjugierten Durchmesser und der Fokalkegelschnitte mit ihren metrischen, wie deskriptiven Beziehungen in allgemeinster Weise hervorgehen. Den Schluß des Buches bildet eine kurze Betrachtung des Flächenbüschels und Flächenbündels 2. O., deren erschöpfende Untersuchung späterer Zeit vorbehalten bleibt. Die vorstehende kurze Inhaltsangabe wird die Stellung des Buches charakterisieren zu den bekannten Werken von Moebius, Chasles, Steiner, von Staudt, Cremona und Reye. Die Darstellung ist durchweg so elementar wie möglich gehalten und setzt nur die Bekanntschaft mit der „Theorie der Kegelschnitte" voraus, auf welche in dem Buche vielfach verwiesen wird. Dasselbe wird demnach vorzugsweise den Studierenden an den Universitäten und technischen Hochschulen zur Einführung in die synthetische Geometrie des Raumes empfohlen.

## XIII.

# Ueber den Mittelpunkt der Raumcurve dritter Ordnung.

Von

Dr. L. Geisenheimer
in Tarnowitz (Schlesien).

Hierzu Taf. V Fig. 1.

Unter den neuen Entwickelungen, durch welche Professor Schröter's vorzügliches Werk „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde" die mathematische Literatur bereichert, findet sich auch der Satz, dass der geometrische Ort für den Mittelpunkt des in einer Schmiegungsebene enthaltenen Kegelschnittes, dessen Tangenten die Schnittlinien dieser mit allen übrigen Schmiegungsebenen der cubischen Raumcurve bilden, selbst ein ebener Kegelschnitt sei. (A. a. O. S. 320.) Dieser Kegelschnitt ist mit $\mu^{(2)}$, seine Ebene mit $\mu$ bezeichnet. Es werde vorausgesetzt, dass die Raumcurve $C^{(3)}$ drei reelle unendlich ferne Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ habe, sich also durch dieselbe drei (hyperbolische) Cylinder legen lassen, deren bezügliche Axen $a$, $b$, $c$ seien und auf welchen die Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ verlaufen; alsdann ist leicht nachzuweisen, dass der Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ die Cylinderaxen und Asymptoten trifft. Die Schnittpunkte mit den Axen $a$, $b$, $c$ seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, die Schnittpunkte mit den Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$. Die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{n}|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{o}|$ treffen den zugehörigen Cylinder zum zweiten Male in Punkten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, welche auf der Raumcurve $C^{(3)}$ liegen, also die Schnittpunkte dieser mit der Mittelpunktsebene $\mu$ darstellen. Diese letzten Geraden $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1|$ nennt Schröter Durchmesser der Raumcurve, da dieselben die aus ihren Punkten an die Raumcurve gelegten Secanten halbiren. Die Secanten selbst bilden für jeden der erwähnten drei Durchmesser diejenige Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids, deren Leitebene zur Asymptotenebene des bezüglichen unendlich fernen Punktes parallel läuft.

Ausser dem System dieser drei Durchmesser werden auch die Cylinderaxen $a$, $b$, $c$ als solche bezeichnet, da sie ebenfalls die Mitte für jede

sie schneidende Secante der $C^{(3)}$ enthalten. Zwei paarweise zusammengehörige Durchmesser, wie $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ und $\alpha$, schneiden sich im Punkte $\mathfrak{m}$, bezüglich $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{o}$; „will man“, schliesst der betreffende Abschnitt des angeführten Werkes, „einen solchen Punkt einen Mittelpunkt der cubischen Raumcurve nennen, weil sich in ihm zwei Durchmesser der Raumcurve treffen, so hat die cubische Ellipse nur einen, die cubische Hyperbel drei reelle Mittelpunkte“.

Es erregt Bedenken, einen Punkt als Mittelpunkt zu bezeichnen, welcher sich in dreifacher Weise ergiebt; mir ist kein Analogon für eine derartige Bezeichnungsweise bekannt. Dieselbe kann aber auch im vorliegenden Falle um so eher entbehrt werden, als sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, aus den Schröter'schen Entwickelungen die Bestimmung eines Punktes ergiebt, dessen zahlreiche Eigenschaften eine hohe Uebereinstimmung mit denen, welche man vom Mittelpunkte einer Figur erwartet, zeigen und welchem daher in der That die Bezeichnung als Mittelpunkt der cubischen Raumcurve beigelegt werden kann.

Der Durchmesser $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ enthält zwei Punkte der Schmiegungsebene $\alpha_0$ in $\mathfrak{a}_0$, nämlich $\mathfrak{a}_0$ selbst und den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ des in $\alpha_0$ enthaltenen Kegelschnittes $\alpha_0^{(2)}$, welchen die Schnittlinien der übrigen Schmiegungsebenen mit $\alpha_0$ umhüllen. Demnach ist $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ die Schnittlinie der Mittelpunktsebene $\mu$ mit der Schmiegungsebene $\alpha_0$ des $\mu$ und $C^{(3)}$ gemeinschaftlichen Punktes $\mathfrak{a}_0$. Der Durchmesser $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ geht also durch den Pol $\mathfrak{u}$ der Ebene $\mu$; ebenso laufen die Durchmesser $|\mathfrak{b}_0 \mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}_1|$ durch diesen Punkt. Da die unendlich ferne Gerade der Ebene $\mu$ als die Schnittlinie zweier (parallelen) Schmiegungsebenen $\pi_\infty$ und $\pi'_\infty$ betrachtet werden muss (a. a. O. § 38), fällt dieser Punkt $\mathfrak{u}$ mit dem harmonischen Pol dieser unendlich fernen Geraden $g_1^\infty$ in Bezug auf $\Delta(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 \mathfrak{c}_0)$, also mit dem Schwerpunkte dieses Dreiecks zusammen.

In Fig. 1 sind die gesammten, in die Mittelpunktsebene $\mu$ fallenden Punkte dargestellt, wobei zunächst die drei sich in $\mathfrak{u}$ schneidenden Durchmesser und auf diesen die Schnittpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ mit den Asymptoten der Raumcurve als gegeben angesehen wurden. Da die Asymptotenebenen des zu $\mathfrak{a}_\infty$ gehörigen, durch die $C^{(3)}$ gelegten Cylinders $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$ die Asymptote $t_\mathfrak{b}$ und $t_\mathfrak{c}$ und entsprechend die Asymptotenebenen der anderen Cylinder $\mathfrak{b}_\infty^{(2)}$ und $\mathfrak{c}_\infty^{(2)}$ je eine Asymptote enthalten, bilden die Schnittlinien der sämmtlichen an diese drei Cylinder gelegten Asymptotenebenen ein Sechseck $\mathfrak{m}\mathfrak{b}_1\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}\mathfrak{c}_1$, dessen Gegenseiten als Schnittlinien paralleler Ebenen parallel laufen und dessen Hauptdiagonalen sich in einem Punkte treffen. Hieraus folgt sofort, dass sich diese Diagonalen auch halbiren, also $\mathfrak{m}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{n}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\mathfrak{c}_1$ ist. Da ferner der Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ diesem Sechseck umschrieben ist, fällt der Mittelpunkt von $\mu^{(2)}$ mit $\mathfrak{u}$ zusammen.

Wenn man durch jeden Punkt in der Schnittlinie zweier festen Schmiegungsebenen die dritte Schmiegungsebene der Raumcurve legt und in Bezug auf den in dieser variablen Schmiegungsebene enthaltenen, von der Gesammtheit der übrigen Schmiegungsebenen umhüllten Kegelschnitt die Polare des gewählten Punktes construirt, so bilden diese Polaren die Regelschaar eines Hyperboloids, welches die beiden festen Schmiegungsebenen berührt. Wird dieser Satz auf die Gerade $g_1^\infty$ angewendet, so treten an Stelle der festen Schmiegungsebenen die für die cubische Hyperbel allerdings imaginären Parallelebenen $\pi_\infty$ und $\pi'_\infty$, und $\mathfrak{u}$ fällt mit dem Mittelpunkte dieses Hyperboloids zusammen.

Punkt $\mathfrak{u}$ kann ferner als der Schnittpunkt der drei Durchmesserebenen in den drei hyperbolischen Cylindern bestimmt werden, welche sich durch je eine Cylinderaxe und die hierzu parallele Asymptote legen lassen, ist also der Mittelpunkt des durch die drei Asymptoten gelegten Hyperboloids.

Die drei Asymptotenebenen $\tau_\mathfrak{a}$, $\tau_\mathfrak{b}$, $\tau_\mathfrak{c}$, welche die Leitebenen zu der Schaar der durch die Durchmesser $|\mathfrak{u}\mathfrak{a}_0|$, $|\mathfrak{u}\mathfrak{b}_0|$, $|\mathfrak{u}\mathfrak{c}_0|$ halbirten Secanten bilden, schneiden sich im unendlich fernen Pole der unendlich fernen Ebene $\varepsilon_\infty$, sind also der nach diesem Punkte $\mathfrak{e}_\infty$ gerichteten Geraden parallel. Die durch den Punkt $\mathfrak{u}$ gelegte Secante $g$, welche den drei Asymptotenebenen parallel läuft, ist also nach $\mathfrak{e}_\infty$ gerichtet. Diese Secante $g$, welche also die Pole der Ebenen $\mu$ und $\varepsilon_\infty$ verbindet, ist im Nullsystem der $C^{(3)}$ zur Schnittlinie $g_1^\infty$ dieser Ebenen conjugirt und enthält daher die Berührungspunkte der parallelen Schmiegungsebenen $\pi_\infty$ und $\pi'_\infty$. Da die Asymptotenebenen der drei Cylinder $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$, $\mathfrak{b}_\infty^{(2)}$, $\mathfrak{c}_\infty^{(2)}$ die Richtungen $|\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty|$, $|\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{c}_\infty|$, $|\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty|$ bestimmen, folgt nach einer bekannten Eigenschaft der Secante, dass $\mathfrak{e}_\infty$ in der harmonischen Polaren der Ebene $\mu$ in Bezug auf drei nicht parallele Asymptotenebenen dieser Cylinder liegt. Wird $\mu$ parallel zu sich selbst unendlich weit verschoben, so bilden die Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ in der so erhaltenen Ebene $\varepsilon_\infty$ ein Dreieck, welchem die Schnittlinien der Durchmesserebenen $[a t_\mathfrak{a}]$, $[b t_\mathfrak{b}]$, $[c t_\mathfrak{c}]$ mit $\varepsilon_\infty$ umschrieben sind. Letztere Schnittlinien sind, wie aus Fig. 1 folgt, den Gegenseiten des eingeschriebenen Dreiecks parallel, weshalb auch der Schwerpunkt des aus den Schnittlinien der Durchmesserebenen gebildeten Dreiecks in $\mathfrak{e}_\infty$ fällt.

Die durch den Pol $\mathfrak{u}$ der Mittelpunktsebene $\mu$ gelegte Secante $g$ ist die harmonische Polare dieser Ebene $\mu$ sowohl in Bezug auf das Dreikant der aus $\mathfrak{u}$ nach den unendlich fernen Secanten der Raumcurve gelegten Ebenen, wie in Bezug auf das Dreikant der Durchmesserebenen $[a t_\mathfrak{a}]$, $[b t_\mathfrak{b}]$, $[c t_\mathfrak{c}]$.

Die Secante $g$ kann im Allgemeinen in keine Durchmesserebene fallen; auf besondere Ausnahmefälle kommen wir später zurück. Diese Durchmesserebenen können auch nicht alle drei einer Richtung parallel

laufen, sich also nicht in einem einzigen Strahle schneiden, da ihre Pole das Dreieck $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ bilden, in dessen Ecken sich je zwei selbstconjugirte Strahlen der Ebenen schneiden.

Aus vorstehender Entwickelung folgt, dass die Secante $g$ in Bezug auf das durch die Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ gelegte Hyperboloid zur Geraden $g_1^\infty$ conjugirt ist. Die Geraden $at_\mathfrak{a}$, $bt_\mathfrak{b}$, $ct_\mathfrak{c}$ bilden ein auf diesem Hyperboloid verlaufendes windschiefes Sechsseit, welches den halben Umlauf eines Parallelopipedons darstellt. Man findet elementar sehr leicht, dass die Schnittpunkte derjenigen Ebene, welche alle Seiten dieses Sechsseits halbirt, das einzige ebene Sechsseit liefern, dessen Hauptdiagonalen den Gegenseiten parallel laufen. Die Ebene dieses Sechsecks ist also $\mu$.

Die Mittelpunktsebene $\mu$ halbirt die Seiten des abwechselnd aus den Axen $a$, $b$, $c$ der durch die Raumcurve (cubische Hyperbel) möglichen Cylinderflächen und den Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ gebildeten windschiefen Sechsseits.

Die durch collineare Umbildung erhaltene Verallgemeinerung dieses Satzes lautet:

Die Tangenten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ dreier beliebigen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Raumcurve dritter Ordnung und die Polaren $a$, $b$, $c$ der Ebene $[\mathfrak{abc}]$ in Bezug auf die durch die Curve gelegten Kegelflächen $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, $\mathfrak{c}^{(2)}$ bilden ein windschiefes Sechsseit $at_\mathfrak{c}bt_\mathfrak{a}ct_\mathfrak{b}$, welches auf dem durch die Tangenten gelegten Hyperboloid verläuft. Wird zu den beiden sich in der Ebene $[\mathfrak{abc}]$ schneidenden (reellen oder imaginären) Schmiegungsebenen $\pi$ und $\pi'$ die zur erstgenannten Ebene $[\mathfrak{abc}]$ conjugirte vierte harmonische Ebene $\mu'$ gelegt, so wird diese von den Seiten des windschiefen Sechsseits in den Eckpunkten eines ebenen Sechsecks geschnitten, dessen Gegenseiten sich in der Schnittlinie $g_1 = |\pi\pi'|$ der vier harmonischen Ebenen, und dessen Hauptdiagonalen sich im Pol $\mathfrak{u}'$ seiner Ebene in Bezug auf das Nullsystem der $C^{(3)}$ treffen. Der diesem Sechseck umschriebene Kegelschnitt ist der Ort aller Pole, welche der Schnittlinie der Ebene $[\mathfrak{abc}]$ mit einer Schmiegungsebene in Bezug auf den in dieser Schmiegungsebene enthaltenen Kegelschnitt entsprechen.

Das durch die Tangenten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ gelegte Hyperboloid kann übrigens mit dem Hyperboloid der Polaren, welche den Punkten von $g_1$ in Bezug auf die Kegelschnitte der durch diese Punkte gehenden dritten Schmiegungsebenen entsprechen, nicht zusammenfallen. Denn da das letztere Hyperboloid die Schmiegungsebenen $\pi$ und $\pi'$ in den Curvenpunkten berührt, würde bei einer Coincidenz beider Flächen dasselbe acht Punkte der $C^{(3)}$, also diese selbst, enthalten. Letzteres ist unmöglich, da ein durch die Raumcurve gelegtes Hyperboloid nur durch zwei

ihrer Tangenten gehen kann. Da die Ebene $\mu'$ für beide Hyperboloide denselben Pol besitzt, berühren sich diese Hyperboloide längs des ihnen gemeinschaftlichen, in der Ebene $\mu'$ liegenden Kegelschnittes.

Wir legen zwei zur Mittelpunktsebene $\mu$ parallele Ebenen in gleichem, aber entgegengesetzt gerichtetem Abstande von $\mu$. Da diese Parallelebenen durch die unendlich fernen Linien $g_1^{\infty}$ von $\mu$ gehen und letztere — stets eine cubische Hyperbel vorausgesetzt — eine uneigentliche Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen ist, so schneidet jede Parallelebene die $C^{(3)}$ wieder in drei reellen Punkten, und zwar wird die Verbindungslinie irgend eines Schnittpunktes der einen Ebene mit einem beliebigen der drei Schnittpunkte der andern parallelen Ebene durch einen bestimmten Durchmesser der Ebene $\mu$ halbirt, läuft also auch der entsprechenden Asymptotenebene der Curve parallel. Projicirt man die beiden Schnittdreiecke aus $\mathfrak{e}_{\infty}$ auf $\mu$, so erkennt man, dass die Projectionen dieser Dreiecke (also auch die zu $\mu$ parallelen Dreiecke selbst) affin-gleich sind und die Affinitätsaxe in einem beliebigen Durchmesser angenommen werden kann; die zugehörigen Affinitätsstrahlen laufen alsdann derjenigen Seite des Dreiecks $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ parallel, welche von dem zur Affinitätsaxe gewählten Durchmesser halbirt wird. Da die Secante $g$ oder $|\mathfrak{u}\mathfrak{e}_{\infty}|$ zu $g_1^{\infty}$ conjugirt ist, enthält $g$ die Pole der Parallelebenen, also die Schwerpunkte der Schnittdreiecke. In elementarer Weise lässt sich ferner nachweisen, dass auch die Schwerpunkte derjenigen Dreiecke, deren Ecken die Durchbohrungspunkte der drei Asymptoten $t_{\mathfrak{a}}, t_{\mathfrak{b}}, t_{\mathfrak{c}}$ mit einer zu $\mu$ parallel gelegten Ebene sind, in eine Gerade fallen. Die Schwerlinie dieser, mit den Ecken in die Asymptoten fallenden Dreiecke fällt für die unendlich ferne Ebene $\varepsilon_{\infty}$ und, wie Fig. 1 lehrt, für die Mittelpunktsebene $\mu$ und daher überhaupt mit der Schwerlinie der erstgenannten Schnittdreiecke zusammen.

Zwei von der Mittelpunktsebene $\mu$ gleichweit abstehende, zu dieser parallele Ebenen schneiden die cubische Hyperbel in Punkten, welche einander gleiche Dreiecke bilden. Der Mittelpunkt (Schwerpunkt) eines solchen Dreiecks fällt mit dem Schwerpunkte des durch die Durchbohrungspunkte der Asymptoten mit seiner Ebene bestimmten Dreiecks und mit dem Pol seiner Ebene zusammen. Die Gerade $g$ bildet daher die Schwerlinie aller dieser parallelen Dreiecke.

Denkt man sich diese, mit ihren Ecken auf der Raumcurve liegenden parallelen Dreiecke mit homogener Masse ausgefüllt, so entsteht ein Körper, für den der Schwerpunkt eines jeden Theiles, welcher durch zwei zu $\mu$ parallele und hiervon gleichweit entfernte Ebenen begrenzt wird, in $\mathfrak{u}$ fällt. Hierauf und auf die früher entwickelten Sätze gestützt, scheint es gerechtfertigt, den Pol $\mathfrak{u}$ der Mittelpunktsebene $\mu$ als Mittelpunkt der cubischen Raumcurve zu bezeichnen. Mit gleichem Rechte

würde die Mittelpunktsebene $\mu$ die **Mittelebene**, die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{u}$ gelegte Secante $g$ die **Mittellinie** der Curve genannt werden dürfen.

Aus Fig. 1 folgen weitere Eigenschaften der Raumcurve. Der dieselbe enthaltende hyperbolische Cylinder $\mathfrak{a}_\infty^{(2)}$ wird von der Ebene $\mu$ in einer durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ laufenden Hyperbel geschnitten, deren Asymptoten $\mathfrak{m}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_1$ sind; die Tangente dieser Hyperbel in $\mathfrak{a}_1$, also die Spur der Asymptotenebene $\tau_\mathfrak{a}$, ist daher mit $\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ parallel. Hieraus folgt:

**Die zur Mittellinie $g$ parallelen Schnittlinien der drei Asymptotenebenen der Raumcurve schneiden die Durchmesser der Mittelebene, auf welchen sie die Strecken $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{m}|$, $|\mathfrak{b}_0\mathfrak{n}|$, $|\mathfrak{c}_0\mathfrak{o}|$ halbiren.**

Die Schmiegungsebenen der Raumcurve schneiden die Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ in drei projectivischen Punktreihen. In jeder Asymptote finden sich hiernach zwei, den unendlich fernen Punkten der beiden anderen Asymptoten entsprechende Gegenpunkte, welche z. B. auf $t_\mathfrak{a}$ durch den Schnitt dieser Geraden mit $\tau_\mathfrak{b}$ und $\tau_\mathfrak{c}$ bestimmt sind. Berücksichtigt man, dass sich die drei Asymptotenebenen $\tau_\mathfrak{a}$, $\tau_\mathfrak{b}$, $\tau_\mathfrak{c}$ in parallelen Geraden schneiden, so folgt aus der Figur, dass $\mathfrak{a}_1$ die Mitte der auf $t_\mathfrak{a}$ gebildeten Gegenpunkte ist.

**Die Mittelebene $\mu$ geht durch die Mitte der Gegenpunkte, welche auf jeder Asymptote durch die beiden, dieser nicht zugehörigen Asymptotenebenen ausgeschnitten werden.**

Wählt man drei durch einen Durchmesser, etwa $|\mathfrak{u}\mathfrak{a}_0|$, halbirte Secanten der Raumcurve, so lassen sich durch die 2.3 Endpunkte derselben zwei Ebenen legen, welche keinen dieser Endpunkte gemeinschaftlich haben. Diese Ebenen schneiden sich in einer den Durchmesser $|\mathfrak{u}\mathfrak{a}_0|$ treffenden, zu $\tau_\mathfrak{a}$ parallelen Geraden. Rücken die gewählten drei Secanten unendlich nahe, so gehen die Ebenen in die Schmiegungsebenen der Endpunkte einer durch $|\mathfrak{u}\mathfrak{a}_0|$ halbirten Secante über.

**Die Schmiegungsebenen der Raumcurve in den Endpunkten einer zu einer Asymptotenebene parallelen, also durch den zugehörigen Durchmesser halbirten Geraden schneiden sich in einer zu dieser Asymptotenebene ebenfalls parallelen Linie, welche den erwähnten Durchmesser trifft.**

Der letzte Satz ist insofern für die betrachtete Curve nicht charakteristisch, als derselbe für jede Raumcurve gilt, welche einen Durchmesser in dem hier gebrauchten Sinne besitzt. Eine Folge des Satzes ist, dass die Schmiegungsebenen in den Endpunkten der aus $\mathfrak{u}$ an die $C^{(3)}$ gelegten Secante parallel laufen.

Aus Fig. 1 folgt endlich noch, da die Sehne $|\mathfrak{n}\mathfrak{o}|$ dem Durchmesser $|\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1|$ für den Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ conjugirt ist, dass dieser Kegelschnitt die Asymptotenebenen der Raumcurve berührt, ein aus den

von Schröter angegebenen Eigenschaften dieses Kegelschnittes leicht herleitbares Resultat. —

Die sämmtlichen Sätze gelten selbstverständlich auch für die cubische Ellipse; nur werden zwei Asymptoten dieser Curve und die diese enthaltenden Cylinder imaginär, dagegen die parallelen Schmiegungsebenen $\pi_\infty$ und $\pi'_\infty$ reell. Jede derselben schneidet das den Punkten von $g_1^\infty$ entsprechende Hyperboloid der in Bezug auf die Kegelschnitte der Schmiegungsebenen genommenen Polaren in einem Linienpaare, welches die Berührungspunkte von $\pi_\infty$, bezüglich $\pi'_\infty$ mit denjenigen Punkten verbindet, in welchen $g_1^\infty$ die in den parallelen Schmiegungsebenen gelegenen Kegelschnitte berührt. Die Geraden des Linienpaares laufen daher den Tangenten in den Endpunkten von $g$ parallel und das Hyperboloid wird von $\mu$ in einer Hyperbel geschnitten, deren Asymptoten die gleiche Richtung haben.

Der Mittelpunktskegelschnitt der cubischen Ellipse ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den Tangenten der Raumcurve in den Endpunkten der Mittellinie parallel sind.

Ist $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ der in diesem Falle einzige reelle Durchmesser, so ergeben sich der Mittelpunkt $\mathfrak{u}$ und ein weiterer Punkt $\mathfrak{m}$ dieser Hyperbel $\mu^{(2)}$, indem $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ nach dem Verhältnisse 3:1, bezüglich 1:1 getheilt wird. Wenn auch mit $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$ die Schnittpunkte $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ imaginär werden, bleiben doch die Secanten $|\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty|$ und $|\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0|$ reell; erstere ist die unendlich ferne Gerade der dritten reellen Asymptotenebene, welche mit der zum Durchmesser $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ parallelen Leitebene des einzigen durch $C^{(3)}$ zu legenden hyperbolischen Paraboloids zusammenfällt, letztere eine Parallele zur Spur der Asymptotenebene $\tau_\mathfrak{a}$ mit $\mu$, welche $\mathfrak{u}\mathfrak{a}_1$ im Verhältniss 3:1 verlängert. In gleicher Weise lässt sich in jeder parallel zu $\mu$ gelegten Ebene mit Hilfe des einen reellen Schnittpunktes mit $C^{(3)}$ die Mitte der in dieser Ebene verlaufenden, die beiden imaginären Schnittpunkte verbindenden Secante und hiermit diese selbst construiren. Der Satz, dass $g$ Schwerlinie der aus den Schnittpunkten dieser parallelen Ebenen mit der Curve gebildeten Dreiecke werde, wird natürlich illusorisch. Derselbe lässt sich dahin umformen, dass man die imaginären Schnittpunkte der in den Parallelebenen liegenden Secanten durch die reellen Potenzpunkte der auf diesen Secanten durch die Curve inducirten Involution ersetzt. Die stetige Folge der aus dem reellen Schnittpunkte und diesen beiden Potenzpunkten gebildeten Dreiecke stellt einen Körper dar, für welchen wieder der Schwerpunkt eines jeden Theiles, der durch zwei von $\mu$ gleichweit abstehende Parallelebenen begrenzt wird, nach $\mathfrak{u}$ fällt und die zwei in den begrenzenden Ebenen gelegenen Dreiecke gleichen Inhalt haben.

Für den angedeuteten Ausnahmefall, in welchem die Mittellinie $g$ in einer der Durchmesserebenen liegt, muss dieselbe mit der in dieser Ebene

verlaufenden Asymptote, u demnach als Mitte der Schnittpunkte der durch diesen Punkt gelegten Secante mit einem unendlich fernen Punkte zusammenfallen. Daher muss $g_1^\infty$ als Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen mit der Tangente dieses Punktes coincidiren, die Raumcurve also eine unendlich ferne Tangente haben, deren Schmiegungsebene sich als Mittelebene $\mu$ darstellt. Bei der cubischen parabolischen Hyperbel, wo $\mathfrak{b}_\infty$ mit $\mathfrak{c}_\infty$ zusammenfällt und die Tangente dieses Punktes unendlich weit rückt, wird also die Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{b}$ dieses Punktes zur Mittelebene. Die Gerade, welche den Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ dieser Ebene und der endlichen Asymptote $t_\mathfrak{a}$ mit dem unendlich fernen Mittelpunkte $\mathfrak{b}_\infty$ verbindet, ist ein im Endlichen gelegener Durchmesser der Curve; diese Gerade fällt mit der Axe des durch die cubische parabolische Hyperbel möglichen hyperbolischen Cylinders zusammen. Die beiden anderen Durchmesser $|u\mathfrak{b}_1|$ und $|u\mathfrak{c}_1|$ decken sich mit der unendlich fernen Tangente des doppelt zu zählenden unendlich fernen Punktes $\mathfrak{b}_\infty$.

Bei der cubischen Parabel, wo die Punkte $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ im Berührungspunkte der unendlich fernen Ebene zusammenfallen, liegt u in diesem Berührungspunkte, welcher durch die Erzeugende des die Curve enthaltenden parabolischen Cylinders bestimmt wird. Die Mittelebene $\mu$ reducirt sich auf die unendlich ferne Tangente $t_\infty$, da die sämmtlichen in den Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte die unendlich ferne Ebene $\varepsilon_\infty$ in einem Punhte dieser Geraden $t_\infty$ berühren. Die Durchmesser der Curve lassen sich als Schnitt der zu $t_\infty$ gehörigen Durchmesserebene mit der Schmiegungsebene des in letzterer enthaltenen Curvenpunktes bestimmen; da jede Erzeugende des parabolischen Cylinders in einer solchen Durchmesserebene liegt, folgt, dass jede Schnittlinie zwischen der Durchmesserebene und Schmiegungsebene eines Punktes der cubischen Parabel als Durchmesser derselben betrachtet werden muss.

# XIV.

# Grundzüge der mathematischen Chemie.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

---

## III.

(Schluss.)

### 4. Natrium.

Atomgewicht $Na = 23$.

Beträgt die Quantität der trägen Substanz einer Massenkugel 23 mal soviel, als diejenige einer Wasserstoffkugel, so erhalten wir das, was die Chemiker Natriumatom nennen und mit *Na* bezeichnen.

Befindet sich ein solches Natriumatom in einem äthererfüllten Raume, so werden sich vermöge der gegenseitigen Anziehung von Massen- und Aethertheilchen, sowie unter Mithilfe des äussern Aetherdruckes drei Aethertheilchen unmittelbar mit dem Massentheilchen verbinden und sich darauf so stellen, dass ihre Mittelpunkte die Ecke eines gleichseitigen Dreiecks darstellen, dessen Mittelpunkt mit demjenigen der Massenkugel zusammenfällt und durch welchen die auf der Ebene normale Axe des Atomes geht. Hat sich so das Natriumatom constituirt, so wird es auf die Gruppirung der benachbarten Aethertheilchen anders wirken, als ein Aethertheilchen an seiner Stelle thun würde. Am nächsten kommen ihm jedenfalls zwei Aethertheilchen, die sich in der Verlängerung der Atomaxe befinden und deren Entfernung $R$ von dem Atommittelpunkte durch nachstehende Formel bestimmt wird:

$$27)\qquad \frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{4R^2}+R=0.$$

Der Werth von $R$ ist 1,1718.

Ersetzt man nun das eine Aethertheilchen durch ein zweites Natriumatom, dessen Axe in der Verlängerung der Axe des ersten liegt, während das Aetherdreieck um 60 Grade gegen das des ersten Atoms gedreht ist, so findet man:

$$28)\quad 6\left(\frac{23}{18,6}-1\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{23^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{23}{18,6}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

$R\,(Na\,Na)$ ist $=1{,}1093$, während $R_1=1{,}2568$ wird. Kommt also ein zweites Natriumatom in die Nähe des ersten, so wird es, wenn es sich in der richtigen Stellung befindet — und in diese begiebt es sich selbst, sobald es in den Wirkungskreis des ersten kommt —, weniger abgestossen, als das demselben zunächstliegende Aethertheilchen, es drängt also dieses weg und setzt sich an seine Stelle. Sobald dieses geschehen, rückt das auf der abgewendeten Seite befindliche zweite Aethertheilchen in eine grössere Entfernung, geht von 1,1718 nach 1,2568. Es kann nun auch das zweite Aethertheilchen durch ein Atom ersetzt werden, welches gegen das mittlere ebenfalls um 60 Grade gedreht und also mit dem ersten äussern gleich gerichtet ist. Dieses führt zu der Gleichung:

$$29)\quad 6\left(\frac{23}{18,6}-1\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{12R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\left(\frac{23^2}{18,6^2}\tfrac{5}{4}+\tfrac{3}{4}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{12R}{(4R+3r^2)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0.$$

Es bestimmt sich $R$ zu 1,1643, und da das Aethertheilchen, welches weggedrängt werden soll, den Abstand 1,2568 hat, so ist diese Verdrängung sehr gut möglich.

Seitwärts von der die drei Atome verbindenden Geraden befinden sich zunächst Aethertheilchen, und es wäre nun die Aufgabe, da auch wieder eines nach dem andern durch ein Natriumatom zu ersetzen und so, wie bei dem Kalium, nach und nach einen Krystall aufzubauen. Es ist jedoch die Zahl der zu berücksichtigenden Theilchen hier eine viel grössere, und dazu kommt noch, dass, da der entstehende Krystall nicht wie das Kalium dem tesseralen, sondern dem hexagonalen System angehört, die Verschiedenheit der krystallographischen Axen zu berücksichtigen ist. Dadurch wird die Zahl der Unbekannten um 1 grösser, während die Gleichgewichtsbedingungen durch viel weitläufigere Formeln ausgedrückt werden. Aus diesen Gründen habe ich mich wenigstens auf so lange von der Bestimmung dispensirt, bis die genauere Feststellung der Constanten ein anderes Resultat, als ein blos provisorisches als Frucht der Arbeit erwarten lässt.

**Natrium und Sauerstoff.**

Wie bei dem Kalium, giebt es auch hier Verschiedenheiten rücksichtlich der Zahl der sich verbindenden Atome sowohl, als auch ihrer Reihenfolge.

Verbindung von zwei Atomen Natrium mit einem Atom Sauerstoff, $Na_2O$ oder Natron. Hier kann die Reihenfolge der Atome sein $NaONa$, sie kann aber auch sein $NaNaO$.

Im ersten der vorstehenden Fälle steht die Axe des Sauerstoffes normal auf der Verbindungslinie der drei Atome, während die Axen der Natriumatome in diese Verbindungslinie hineinfallen. Die Axe des Sauerstoffes ist gegen die Verbindungslinie eines jeden Natriummassentheilchens und eines seiner Aetbertheilchen um 90 Grade gedreht, die zwei Natriumatome sind gegen einander um 60 Grade gedreht. Es ergiebt sich so die Gleichung:

$$30)\quad \left(\frac{3.16+2.23}{18,6}-\frac{3}{4}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+6\left(\frac{23}{18,6}-1\right)\frac{2R}{(4R^2+r^2)^{3/2}} -\frac{23}{18,6}\left(\frac{16+5,75}{18,6}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}} -\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0.$$

Der Werth von $R$ ist 1,0328.

Nimmt man die Reihenfolge $NaNaO$, so bleibt die Drehung der Atome ungeändert, und es folgen die Gleichungen:

$$31)\quad 6\left(\frac{23}{18,6}-1\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\left(\frac{2.23+3.16}{18,6}\right)\frac{(R+R_1)}{((B+R_1)^2+r^2)^{3/2}} -\frac{23^2}{18,6^2}\frac{1}{R^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{16.23}{18,6^2}\frac{1}{(R+R_1)^2} -\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R_1+R)^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}} -\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+2r^2)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\left(\frac{3.16+2.23}{18,6}\right)\left(\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(R_1+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\right) -\frac{16.23}{18,6^2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{2R_1}{(R_1^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}} -\frac{2R_1}{(R_1^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}} -\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}} +\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R_1=0.$$

$R\,(NaNa)$ ist $=1,1183$, während $R_1\,(NaO)=1,1705$ ist. Diese Werthe sind viel grösser, als derjenige von $R$ in 30), und wenn auch die durch 31) angegebene Stellung einmal zum Vorschein kommen sollte, so müsste sie sich bei der nächsten Schwingung in diejenige von 30) umändern.

Verbindung von einem Atom Natrium mit einem Atom Sauerstoff. $NaO$, erstes Natriumhyperoxyd. Hat man nur je ein Atom Natrium und Sauerstoff, und bildet man aus ihnen mit Zuziehung eines Aethertheilchens eine Reihe, so sind die zwei Fälle $NaOA$ und $ONaA$ zu betrachten. Die Sauerstoffaxe steht wieder normal auf der Verbindungslinie, während die Natriumaxe in dieselbe hineinfällt. Die gegenseitige Drehung von Sauerstoff und Natrium ist die nämliche, wie in den beiden vorhergehenden Fällen.

Nimmt man die Reihenfolge $NaOA$, so ergiebt sich:

$$32)\quad \left(\frac{2.23+3.16}{18,6}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.23}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}$$
$$-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

Die Entfernung $R(NaO)$ ist 0,9655, die Entfernung $R_1(OA)$ ist 1,0880.

Benützt man die Reihenfolge $ONaA$, so entstehen die Gleichungen:

$$33)\quad \left(\frac{3.16+2.23}{18,6}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16.23}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

Es ist $R(ONa)=1,1192$ und $R_1(NaA)=1,1116$, also beide grösser als im vorigen Falle.

Wir begegnen so dem nämlichen Verhältnisse wie bei dem Kalium, und aus dem nämlichen Grunde wie dort ist auch hier anzunehmen, dass sich ein Natriumhyperoxyd bildet, welches die Zusammensetzung $2(NaO)$ oder $NaOONa$ hat. Dieses Natriumhyperoxyd entsteht bei dem Verbrennen des Natriums in einem Strome von Luft oder Sauerstoff, und der hierbei stattfindende Vorgang ist wieder ganz einfach der, dass an ein Molecul Sauerstoff beiderseits je ein Atom Natrium sich anhängt.

Verbindung von einem Atom Natrium mit zwei Atomen Sauerstoff. $NaO_2$ oder zweites Natriumhyperoxyd. Man kann die Frage aufstellen, wie es sich mit der Stellung der Atome verhalte, und als Antwort ergiebt sich sehr leicht, dass dabei die Reihenfolgen

*NaOO* oder *ONaO* zu berücksichtigen seien. Im ersten Falle ist die Drehung der Axe des mittlern Sauerstoffs gegen das Natrium die nämliche, wie bisher, der äussere Sauerstoff hat gegen den in der Mitte befindlichen seine Axe gekreuzt. Im letzteren Falle sind die beiden Sauerstoffaxen gegen einander um 60 Grade gedreht und auch je um 90 Grade gegen eine der Geraden, die den Mittelpunkt des Natriummassentheilchens mit einem der Aethertheilchen verbindet.

Bei der Reihenfolge *NaOO* ergiebt sich:

$$34)\quad \left(\frac{3.16+2.23}{18,6}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\left(\left(\frac{3.16+2.23}{18,6}\right)-2\right)\frac{R+R_1}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{23.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\left(\frac{23.16}{18,6^2}+1\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{4.16}{18,6}\,\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\left(\left(\frac{3.16+2.23}{18,6}\right)-2\right)\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R_1^2}-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\left(\frac{23.16}{18,6^2}+1\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2(R_1+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R_1=0.$$

$R(NaO)$ hat die Grösse 0,9801, $R_1(OO)$ ist $=0,9869$.

Bei Benutzung der Reihenfolge *ONaO* entsteht die Gleichung:

$$35)\quad \frac{(3.16+2.23)}{18,6}\,\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+4\left(\frac{2.16}{18,6}-1\right)\frac{R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}-\frac{4R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{16}{18,6^2}(23+4)\frac{1}{R^2}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0.$$

$R$ hat den Werth 1,1238.

Die Vergleichung der Resultate von 34) und 35) zeigt, dass die Reihenfolge *NaOO* die naturgemässere ist, und sie soll es daher sein, welche der nachfolgenden Betrachtung zu Grunde liegt.

Die Verbindung *NaOO* entsteht am einfachsten in der Weise, dass ein Natriumatom sich an ein Sauerstoffmolecul anschliesst. Dieses ist möglich, denn nach 29) nähern sich die Natriumatome einander nicht über 1,1643, und hat also eines derselben die Wahl zwischen einem Sauerstoffmolecul und einem andern Natriumatom, so ergiebt sich, dass es von ersterem eine geringere Abstossung erfährt, sich ihm also mehr nähern kann, als dieses bei dem benachbarten Natriumatom der Fall ist

Sowie dieser Anschluss des Natriums an den Sauerstoff erfolgt ist, rücken die Atome des Moleculs des letzteren auseinander, sie gehen von 0,8930 auf 0,9869. Auf der andern Seite des Moleculs kann sich ebenfalls ein Natriumatom anschliessen, und es entsteht so die Verbindung *NaOONa*. die bereits oben erwähnt wurde. Es geht nun hier wieder, wie bei dem Kalium, und wenn man die Verbindung *NaOONa* mit ebensoviel Natrium glüht, als schon darin ist, so entsteht die Verbindung *NaONa*, es braucht nämlich infolge des Anschlusses des zweiten *Na* an *NaOO* nur ein weiteres Auseinanderrücken der zwei Sauerstoffatome von 0,9869 bis über 1,0328 stattzufinden, und die Entstehung der Verbindung *NaONa* ist möglich.

Vergleicht man die Werthe von $R$ und $R_1$, wie sie sich in den Gleichungen des Kaliums ergeben, mit den entsprechenden Natriumgleichungen, so ergiebt sich, dass dieselben in letzteren kleiner sind. Ausgenommen von dieser Regel sind die zwei Hyperoxyde, in denen die Annäherung des Metalles an den Sauerstoff bei dem Kalium grösser ist, als bei dem Natrium. Die Grösse der Annäherung zweier Theilchen an einander ist jedenfalls maassgebend für die Wahrscheinlichkeit des Eintrittes einer Verbindung, und wenn sie derselben auch nicht proportional ist, muss man doch schliessen, dass die Kaliumhyperoxyde sich leichter bilden, als diejenigen des Natriums, das erste (weisse) Kaliumhyperoxyd leichter, als das zweite (gelbe). Ueber das zweite Natriumhyperoxyd habe ich nirgends etwas in den Büchern gefunden, und dieses lässt mich darauf schliessen, dasselbe sei noch gar nicht hergestellt.

### Natrium und Wasserstoff.

Der Zusammenstellungen von Natrium und Wasserstoff sind zwei möglich, nämlich die Verbindung je eines Atomes beider Substanzen, wozu als drittes Glied der Reihe ein Aethertheilchen zu nehmen ist, und die Verbindung von einem Atom Natrium mit zwei Atomen Wasserstoff.

Verbindung eines Atoms Natrium mit einem Atom Wasserstoff. In diesem Falle kommen bei der Reihe *HNaA* nachstehende Gleichungen zum Vorschein:

36) $$\frac{23}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{1}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}+\frac{3}{18{,}6}\cdot\frac{R-r}{((R-r)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{23}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R-r)^2}-\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R+\frac{r}{18{,}6}=0$$

und

$$\frac{23}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R_1+R_1-r)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1)^2}+R_1=0.$$

$R(HNa)$ ist $=1{,}1480$, während für $R_1(NaA)$ 1,1675 sich entziffert. Bei $R$ ist die Entfernung bis zum Aethertheilchen des Wasserstoffatoms gemessen, und nach dem, was oben bei dem Kalium erwähnt wurde, ist

die Entfernung bis zum Mittelpunkte des Druckes 1,1480 — 0,0190 = 1,1290.

Verbindung eines Atomes Natrium mit zwei Atomen Wasserstoff. Für die Combination $HNaH$ ergiebt sich:

$$37)\quad \left(\frac{23}{18,6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{3}{18,6}\cdot\frac{(R-r)}{((R-r^2)+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{1}{(2R-r)^2}$$
$$-\frac{23,25}{18,6}\cdot\frac{1}{(R-r)^2}-\frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}R+\frac{r}{18,6}=0.$$

Hier ist $R=1,1315$, die Entfernung bis zum Mittelpunkte des Druckes 1,1315 — 0,0190 = 1,1125.

In beiden Fällen sind die Entfernungen, in welchen sich die Theilchen einstellen, so gross, dass das Zustandekommen der Verbindungen sehr fraglich ist. Ich habe nirgends eine Nachricht gefunden, dass dieselben schon einmal hergestellt worden seien.

### Natrium, Sauerstoff und Wasserstoff.

Soll eine Verbindung dieser drei Körper untersucht werden, so hat man die Wahl zwischen den Zusammenstellungen $NaOH$ und $ONaH$. Die gegenseitige Stellung von $Na$ und $O$ ist die nämliche, wie bei der Verbindung $NaOA$.

Die Reihenfolge $NaOH$ führt zu nachstehenden zwei Gleichungen:

$$38)\quad \left(\frac{2.23+3.16}{18,6}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}$$
$$+\frac{3}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{23.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}-\frac{23}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$
$$-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(3-\frac{23}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}$$
$$+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{23}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$
$$-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}R_1+\frac{r}{18,6}=0.$$

Hier erhält man $R(NaO)=0,9599$ und $R_1(OH)=1,0667$ oder $O$ bis zum Mittelpunkte des Druckes 1,0667 — 0,0190 = 1,0477.

Bei Voraussetzung der Reihenfolge $ONaH$ ergeben sich die Gleichungen:

$$39)\ \left(\frac{2.23+3.16}{18,6}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{23.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}-\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}}-\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{3}{18,6}\cdot\frac{(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{23}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}+\frac{17,6}{18,6}R_1+\frac{r}{18,6}=0.$$

Es ergiebt sich $R(ONa)=1{,}1107$ und $R_1(NaH)=1{,}1569$. Zieht man von letzterem 0,0190 ab, so erhält man 1,1379. Beide Werthe sind viel grösser als bei der Zusammenstellung *NaOH*, und es ist daher letztere als die naturgemässere zu betrachten.

Bei 38) sieht man sofort, dass die Annäherung des Natriums an den Sauerstoff grösser ist, also $R$ kleiner als bei einer der anderen bisher besprochenen Combinationen, und die Verbindung Natronhydrat muss daher eine sehr feste sein. Nichtsdestoweniger steht sie hinter der entsprechenden Kaliumverbindung zurück, oder wie die Chemiker sagen: das Kalium ist stärker als das Natrium. Etwas weiter entfernt von dem Sauerstoff ist der Wasserstoff, und es muss daher leichter sein, diesen wegzubringen, als das Natrium. Glüht man Natriumoxydhydrat mit ebensoviel Natrium, als schon darin ist, so wird es zerlegt und es bildet sich *NaONa*, indem sich an die Stelle des Wasserstoffes, der nach 38) die Entfernung 1,0477 hat, Natrium mit der Entfernung 1,0328 (30) setzt. Es ist hier die nämliche Reihenfolge von Erscheinungen, wie sie oben bei dem Kalium dargestellt wurde.

---

## 5. Lithium.

Atomgewicht: $Li=7$.

Wenn die Quantität der trägen Substanz eines Massentheilchens das Siebenfache eines Wasserstoffmassentheilchens beträgt, so entsteht das, was die Chemiker ein Lithiumatom nennen und mit *Li* bezeichnen.

Befindet sich ein Lithiumatom im äthererfüllten Raume, so lassen sich unmittelbar auf demselben zwei Aethertheilchen nieder und lagern sich auf zwei einander diametral entgegengesetzten Punkten seiner Oberfläche. Eine Gerade, welche die Mittelpunkte der Aethertheilchen und

des Massentheilchens verbindet, wird im Nachstehenden die Axe des Atomes heissen.

Sind in einem Raume Lithiumatome in grösserer Anzahl mit Aethertheilchen untermischt, so werden erstere ihren Einfluss auf die Gruppirung der umgebenden Aethertheilchen ausüben, während andererseits auch zwei oder mehrere Lithiumatome gegenseitig aufeinander einwirken können. Suchen wir zunächst die Wirkung auf, welche das Atom auf zwei Aethertheilchen ausübt, welche sich zu beiden Seiten des Atomes in einer Geraden befinden, die durch das Massentheilchen geht und auf der Atomaxe senkrecht steht, so hat man, wenn $R$ die Entfernung eines Aethertheilchens von dem Massentheilchen bedeutet:

$$40)\qquad \frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{4R^2}+R=0.$$

Dieser Gleichung entspricht der Werth $R=1,1706$.

Wird nun das eine Aethertheilchen durch ein zweites Atom ersetzt, dessen Axe gegen die des ersten um 90 Grade gedreht ist, so erhält man:

$$41)\qquad \frac{4.7}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{7^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{7}{18,6}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

$R(LiLi)$ ist gleich 1,0963, während $R_1=1,2162$ wird. Es ergiebt sich hieraus, dass die zwei Lithiumatome sich in einer Entfernung anziehen, in welcher das Aethertheilchen bereits abgestossen wird. Darum wird das Aethertheilchen weggedrängt und es entsteht die Verbindung *LiLi*. Es kann nun auch das zweite Aethertheilchen durch ein weiteres Atom ersetzt werden, und dieses geschieht, wenn in der Gleichung:

$$42)\qquad \left(\frac{4.7}{18,6}-\frac{1}{2}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{8.7}{18,6}\,\frac{R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\left(\frac{7^2}{18,6^2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

der Werth von $R<1,2162$ ausfällt, was auch in der That der Fall ist, da $R=1,1471$ wird.

Die vorstehende Ableitung möge genügen, um die Analogie zwischen dem Verhalten der Lithiumatome mit denen des Natriums und des Kaliums zu zeigen. Streng genommen ist die Sache complicirter. Es wären nämlich noch die Stellungen der Aethertheilchen rings um das erste Atom zu suchen und dann eines nach dem andern durch ein weiteres Atom zu ersetzen, dabei aber natürlich nicht zu übersehen, welchen Einfluss der neue Ankömmling auf den Ort und die Drehung der übrigen bereits vorhandenen ausübt.

Ich halte es für wahrscheinlich, dass sechs unter sich parallele Atome um ein erstes ein Hexagon bilden, während in zwei der ersten parallelen Ebenen sich je drei Atome einfinden und so je ein Dreieck darstellen, von denen das eine gegen das andere um 60 Grade gedreht ist. Es käme so eine hexagonale Pyramide als Grundform zu Stande.

### Lithium und Sauerstoff.

Verbindung zweier Atome Lithium mit einem Atom Sauerstoff. $Li_2O$, Lithion. Wenn zwei Atome Lithium sich mit einem Atom Sauerstoff verbinden, so kann die Reihenfolge sein: *LiLiO* oder *LiOLi*. In beiden Fällen sind die Axen zweier neben einander befindlichen Atome gekreuzt, die der beiden äusseren also parallel gerichtet. Die Reihenfolge *LiLiO* giebt:

$$43)\quad \frac{4.7}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+2\frac{(7+16)}{18,6}\,\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{7^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\left(2+\frac{7.16}{18,6^2}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2(7+16)}{18,6}\cdot\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2(7+16)}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{7.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R_1^2}$$
$$-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\left(2+\frac{7.16}{18,6^2}\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}$$
$$+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R_1=0.$$

$R(LiLi)$ hat den Werth 1,1070, während $R_1$ sich zu 1,1170 entziffert.

Bei Benützung der Reihenfolge *LiOLi* kommt man zu der Gleichung:

$$44)\quad 2\left(\frac{7+16}{18,6}-\frac{1}{4}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{4.2.7}{18,6}\cdot\frac{R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\left(7\frac{(16+\frac{1}{4})}{18,6^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0.$$

Hier ist $R=1,0062$, und es kann also kein Zweifel bestehen, dass die Reihenfolge *LiOLi* die naturgemässe sei. Die Verbindung ist das Lithiumoxyd oder Lithion.

Verbindung eines Atomes Lithium und eines Atomes Sauerstoff. Verbinden sich je ein Atom Lithium und Sauerstoff, so haben wir unter den zwei Reihenfolgen *LiOA* und *OLiA* zu wählen. Die Reihenfolge *LiOA* giebt:

$$45)\quad 2\frac{(7+16)}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{7.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0.$$

$R(LiO)$ ist $=0,9293$, $R_1=1,0835$.

Bei Benützung der Reihenfolge $OLiA$ ist:

$$46)\quad 2\frac{(7+16)}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{7.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}$$
$$+R_1=0.$$

$R(OLi)$ ist $=1,0592$, $R_1=1,1824$.

Die Vergleichung von 45) und 46) zeigt, dass die Reihenfolge $LiOA$ in Berücksichtigung zu ziehen sei.

Verbindung eines Atomes Lithium mit zwei Atomen Sauerstoff. Verbindet sich ein Atom Lithium mit zwei Atomen Sauerstoff, so ist wieder die Möglichkeit der Reihenfolge eine doppelte, man kann $LiOO$, man kann $OLiO$ nehmen. Im ersten Falle haben wir:

$$47)\quad 2\frac{(7+16)}{18,6}\left(\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{R+R_1}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\right)-\frac{7.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}$$
$$-\left(\frac{7.16}{18,6^2}+2\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{4.16}{18,6}\cdot\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2(7+16)}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R_1^2}$$
$$-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\left(\frac{7.16}{18,6}+2\right)\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}$$
$$+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R_1=0.$$

Es ist hier $R(LiO)=0,9495$, während $R_1$ den Werth 0,9816 bekommt.

Ist die Reihenfolge $OLiO$, so ergiebt sich:

$$48)\quad 2\left(\frac{7+16}{18,6}-\frac{1}{4}\right)\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{4.2.16}{18,6}\,\frac{R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\left(\frac{16(4+7)}{18,6^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R=0.$$

Der Werth von $R$ ist 1,0751, und die Vergleichung von 47) und 48) zeigt, dass der Reihenfolge $LiOO$ der Vorzug gegeben werden müsse.

Es ist leicht zu sehen, dass bei dem Lithium der nämliche Vorgang stattfinden müsse, der auch bei dem Kalium und Natrium eintritt. An ein Molecul Sauerstoff schliessen sich rechts und links je ein Atom Lithium an, und es entsteht ein Doppelmolecul des ersten Superoxyds, oder es findet der Anschluss nur eines einzigen statt, um dann das zweite Superoxyd zu bilden. Glühen der Superoxyde mit Lithium muss, wie bei den beiden vorhergehenden Metallen, zur Entstehung des Oxyds führen. Da aus den Beobachtungen über die Zusammensetzung des

Superoxyds nichts bekannt ist, so verbietet sich ein Vergleich von Rechnung und Beobachtung von selbst. Die bedeutende Annäherung des Lithiums an den Sauerstoff in 47) lässt die Möglichkeit des zweiten Superoxyds erwarten.

### Lithium und Wasserstoff.

Ein Atom Lithium kann sich möglicherweise mit einem oder auch mit zwei Atomen Wasserstoff verbinden.

Bei der Verbindung mit einem Atom Wasserstoff ergiebt sich unter Zuziehung eines Aetherteilchens die Reihe $HLiA$, und es gelten die Gleichungen:

$$49) \quad \frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R-r)}{((R-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{1}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2R}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$
$$-\frac{7}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R-r)^2}-\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{17,6}{18,6}R+\frac{r}{18,6}=0$$

und

$$\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1)^2}+R_1=0.$$

Die um 0,0190 verminderte Grösse $R(HLi)$ beträgt 1,1242, während $R_1 = 1,1666$ ist.

Bei der Verbindung eines Atomes Lithium mit zwei Atomen Wasserstoff ist die Reihenfolge der Atome $HLiH$ und ihr entspricht:

$$50) \quad \left(\frac{7}{18,6}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R-r)}{((R-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{1}{(2R-r)^2}$$
$$-\frac{7,25}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R-r)^2}-\frac{2R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}R+\frac{r}{18,6}=0.$$

Die um 0,0190 verminderte Grösse $R$ ist 1,1203.

In 49) sowohl, als in 50) ist der Abstand des Wasserstoffes von dem Lithium so gross, dass die Aussicht auf eine Verbindung beider Elemente, es mag nun der Wasserstoff in einem oder in zwei Atomen vertreten sein, sehr gering ist, und ich habe auch in den Lehrbüchern der Chemie nirgends etwas von einem Lithiumwasserstoff finden können.

### Lithium, Sauerstoff und Wasserstoff.

Bei der Verbindung dieser drei Elemente hat man die Wahl zwischen den Reihenfolgen $LiOH$ und $OLiH$.

Im ersten Falle bestehen die Gleichungen:

$$51) \quad 2\frac{(7+16)}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{7}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}$$
$$-\frac{7.16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{7}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$
$$-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\left(2-\frac{7}{18,6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2(R_1-r)}{18{,}6((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18{,}6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R_1^2}$$
$$+\frac{7}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{7}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$
$$-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R_1+\frac{r}{18{,}6}=0.$$

Hier ist $R(LiO)=0{,}9218$, während $R_1$ nach Abzug von 0,0190 noch 1,0437 beträgt.

Bei der Reihenfolge $OLiH$ ergeben sich die Gleichungen:

52) $$2\frac{(7+16)}{18{,}6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2(R+R_1-r)}{18{,}6((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}$$
$$-\frac{7.16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1^2)+r^2)^{3/2}}$$
$$+\left(2-\frac{16}{18{,}6}\right)R=0$$

und

$$\frac{2(R_1-r)}{18{,}6((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18{,}6}\cdot\frac{(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{7}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{7}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R_1-r)^2}+\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1-r)^2}$$
$$-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R_1+\frac{r}{18{,}6}=0.$$

Die Entfernung $R(OLi)$ ist 1,0572, diejenige von $R_1$ ist nach Verminderung um 0,0190 noch 1,1363. Aus der Zusammenstellung von 51) und 52) erhellt, dass die Reihenfolge $LiOH$ die naturgemässere sei.

Der kleine Werth von $R$ in 51) weist darauf hin, dass das Lithion oder Lithiumoxydhydrat nicht nur eine mögliche, sondern sogar eine sehr feste Verbindung sein müsse.

Wird Lithium mit Wasser zusammengebracht, so ist zu erwägen, dass in dem Wasser die Entfernung eines Wasserstoffatomes von dem Sauerstoffe 0,9698 beträgt, während, wenn ein Wasserstoffatom durch Lithium ersetzt wird, dieses sich dem Sauerstoffe bis 0,9218 nähern kann. Es wird also dieser Austausch stattfinden können. Ist das Lithiumatom eingetreten, hat sich also das Lithiumoxydhydrat gebildet, so rückt das Wasserstoffatom auf der andern Seite etwas von dem Sauerstoffe weg, und seine Gleichgewichtslage ist statt der früheren Distanz 0,9698 nunmehr 1,0437. Wird das Lithiumoxydhydrat mit ebensoviel Lithium geglüht, als schon darin ist, so findet der nämliche Vorgang statt, der schon bei dem Kalium und Natrium erwähnt wurde: es macht sich der Umstand geltend, dass in $LiOLi$ [44] die Annäherung eines Lithiumatomes an den Sauerstoff bis 1,0062 stattfindet, und da im Lithiumoxydhydrat die Distanz des Wasserstoffes 1,0437 beträgt, so kann derselbe durch ein Lithiumatom ersetzt werden. Die mit der Erhöhung der Tem-

peratur verbundenen verstärkten Oscillationen müssen eine Art von Durcheinanderrütteln besorgen, damit der Austausch leichter stattfinden kann.

---

### Zusammenstellung der drei Alkalimetalle.

Kalium, Natrium, Lithium bilden mit einander die drei Alkalimetalle der Chemiker und zeigen in ihrem Auftreten ausserordentlich viele Analogien, weshalb es gerechtfertigt erscheinen dürfte, hier eine Zusammenstellung der Ergebnisse folgen zu lassen.

Ich werde nun die einzelnen Verbindungen der Metalle neben einander stellen; um aber das Terrain möglichst gleichmässig zu machen, muss bei dem Kalium die Zusammenstellung der Atome etwas anders genommen werden, als dieses nach 12) der Fall ist. Bei dem Natrium und dem Lithium habe ich mich aus den betreffenden Ortes angegebenen Gründen darauf beschränkt, die gegenseitige Stellung dreier in einer Reihe befindlichen Atome zu bestimmen, während ich bei dem Kalium diese Einschränkung nicht nöthig hatte. Obwohl nun die Molecularzusammensetzung des Kaliums besser bestimmt ist, als die der beiden anderen Metalle, habe ich mich doch der Analogie wegen genöthigt gesehen, auch für das Kalium die Entfernung zu berechnen, in welcher drei in einer Geraden befindliche Atome sich einstellen, wenn sie so gelagert sind, dass die einander entgegengesetzten Kanten zweier benachbarten Atome gekreuzt sind oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn alle drei die nämliche Stellung haben. Sind drei Atome in dieser gegenseitigen Stellung gegeben, so ergiebt sich:

$$
53)\quad \frac{39}{18,6}\left[\frac{4(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{4(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}\right.
$$
$$
\left.+\frac{4(2R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((2R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}+\frac{4(2R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((2R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{2}{3}r^2)^{3/2}}\right]
$$
$$
-\left(\frac{39^2}{18,6^2}\cdot\frac{5}{4}+5\right)\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+\frac{8}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{4.2R}{(4R^2+\frac{8}{3}r^2)^{3/2}}
$$
$$
-\frac{4(R-2r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R-2r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{4}{3}r^2)^{3/2}}-\frac{4(R+2r\sqrt{\frac{1}{3}})}{((R+2r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{4}{3}r^2)^{3/2}}
$$
$$
-\frac{(R-r\sqrt{\frac{1}{3}})}{\left((R-r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{r^2}{3}\right)^{3/2}}-\frac{(R+r\sqrt{\frac{1}{3}})}{\left((R+r\sqrt{\frac{1}{3}})^2+\frac{r^2}{3}\right)^{3/2}}+\left(4-\frac{39}{18,6}\right)R=0.
$$

$R$ ist hier $=1,3018$.

In der folgenden Tabelle finden sich die Ergebnisse der vorstehenden Rechnungen. Die zwischen den einzelnen Atomen befindlichen Ziffern bedeuten die jeweiligen Entfernungen. Bei denjenigen Zusammenstellungen, welche die kleinsten Distanzen geben, die also den in der

Natur vorkommenden Fall darstellen, sind die Ziffern grösser gedruckt. Bei dem Kalium geben die mit * bezeichneten Stellungen diejenigen an, in welchen statt einer Kante des Kaliumatomes eine Fläche normal auf der Verbindungslinie steht.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *K* | 1,3018 | *K* | 1,3018 | *K* | *Na* | 1,1643 | *Na* | 1,1643 | *Na* | *Li* | 1,1471 | *Li* | 1,1471 | *Li* |
| *K* | 1,0653 | *O* | 1,0653 | *K* | *Na* | 1,0328 | *O* | 1,0328 | *Na* | *Li* | 1,0062 | *O* | 1,0062 | *Li* |
| | 1,0832* | | 1,0832* | | | | | | | | | | | |
| *K* | 1,2553 | *K* | 1,2219 | *O* | *Na* | 1,1183 | *Na* | 1,1705 | *O* | *Li* | 1,1070 | *Li* | 1,1170 | *O* |
| *K* | 0,9427 | *O* | 1,1206 | *A* | *Na* | 0,9655 | *O* | 1,0880 | *A* | *Li* | 0,9293 | *O* | 1,0835 | *A* |
| | 1,0073* | | 1,1053* | | | | | | | | | | | |
| *O* | 1,1538 | *K* | 1,2910 | *A* | *O* | 1,1192 | *Na* | 1,1116 | *A* | *O* | 1,0592 | *Li* | 1,1824 | *A* |
| *O* | 1,1672 | *K* | 1,1672 | *O* | *O* | 1,1238 | *Na* | 1,1238 | *O* | *O* | 1,0751 | *Li* | 1,0751 | *O* |
| *K* | 0,9640 | *O* | 1,0234 | *O* | *Na* | 0,9801 | *O* | 0,9869 | *O* | *Li* | 0,9495 | *O* | 0,9816 | *O* |
| | 1,0022* | | 1,0103* | | | | | | | | | | | |
| *H* | 1,2331 | *K* | 1,2778 | *A* | *H* | 1,1290 | *Na* | 1,1675 | *A* | *H* | 1,1242 | *Li* | 1,1666 | *A* |
| *H* | 1,2302 | *K* | 1,2302 | *H* | *H* | 1,1125 | *Na* | 1,1125 | *H* | *H* | 1,1203 | *Li* | 1,1203 | *H* |
| *K* | 0,9339 | *O* | 1,0801 | *H* | *Na* | 0,9599 | *O* | 1,0477 | *H* | *Li* | 0,9218 | *O* | 1,0437 | *H* |
| *O* | 1,1534 | *K* | 1,2435 | *H* | *O* | 1,1107 | *Na* | 1,1379 | *H* | *O* | 1,0572 | *Li* | 1,1363 | *H* |

Die grosse Aehnlichkeit, die zwischen den drei Metallen rücksichtlich ihres Verhaltens gegen Sauerstoff und Wasserstoff besteht, dürfte nach dem Vorstehenden kaum zu verkennen sein. Allenthalben ist die in der Natur vorkommende Zusammenstellung der Atome die nämliche und ebenso ist es der Weg, auf dem die eine oder andere Verbindung zu Stande kommt. Selbst in denjenigen Combinationen, welche keinen in der Natur vorkommenden Verbindungen entsprechen, lässt sich die Analogie des Verhaltens nicht übersehen.

Unter den Verschiedenheiten der Resultate dürfte am auffallendsten die sein, dass die grösste Annäherung des Metalles an die anderen Atome bei dem Lithium stattfindet. Es wäre daraus zu schliessen, dass die Lithiumverbindungen die festesten seien. Der Satz, dass eine Verbindung um so leichter entsteht und um so fester ist, je mehr die Atome sich einander nähern, ist im Allgemeinen sicher richtig, denn wenn ein Atom *A* sich einem Atom *B* bis auf eine Distanz nähert, in welcher *C* bereits abgestossen wird, so kann *A* von *C* nicht verdrängt werden, da *C* gar nicht bis dorthin kommt, wo *A* ist; wohl aber kann das Umgekehrte

stattfinden. Trotzdem halte ich es nicht für unmöglich, dass es ausser der indirecten Trennung, die ich oben bei dem Kalium angeführt habe, noch Umstände giebt, welche den Satz zu modificiren vermögen. So ist bezüglich der bei dem Eintreten einer Verbindung sich entwickelnden Wärme jedenfalls auch der Umstand zu berücksichtigen, wieviel die Annäherung beträgt, und wenn die Kaliumatome aus der grösseren gegenseitigen Entfernung, die ihnen im Kalium zukommt, sich bei Bildung des Kalihydrats dem Sauerstoffe um eine grössere Strecke nähern, als die Atome des Lithiums, so kann bei Bildung des Kalihydrates eine grössere Menge von Wärme frei werden, selbst wenn auch bei dem Lithionhydrate die endliche Entfernung des Lithiums von dem Sauerstoffe eine kleinere ist, als bei dem Kalium. Es mag recht wohl sein, dass gegenwärtig bei der Schätzung der sogenannten chemischen Verwandtschaft mehrere Umstände, wie Constanz der Verbindung, Wärmeentwickelung bei Bildung derselben u. s. w., mitspielen, die nicht gehörig auseinander gehalten werden.

Während es noch unentschieden bleiben mag, ob die Verwandtschaft des Sauerstoffes zum Kalium grösser sei, als diejenige zum Lithium oder umgekehrt, ist sicher die Neigung desselben zum Kalium grösser, als diejenige zum Natrium, weil bei dem Kalium die ursprüngliche Entfernung grösser, die endliche kleiner ist, als bei dem Natrium. Kleinere Aenderungen können indessen noch eintreten bei Berücksichtigung der Temperatur, denn die vorstehenden Bestimmungen gelten eigentlich alle für $0^0$ absoluter Temperatur. Ausserdem ist nicht zu vergessen, dass die Constanten des Aetherwerthes der Wasserstoffmassenkugel, welche ich vorläufig zu $\frac{1}{18,6}$ bestimmt habe, sowie die Grösse $r$, die ich zu 0,37296 angenommen habe, die aber jedenfalls veränderliche Werthe hat, noch einer genaueren Feststellung harren. Ich halte es für am zweckmässigsten, vorerst mit den bisherigen Werthen eine Anzahl von Verbindungen zu berechnen, und hoffe dabei, dass sich eben dadurch neue Anhaltspunkte ergeben, welche ihrerseits eine genauere Bestimmung der Constanten zulassen.

Ueberblickt man die vorstehende Tabelle, so ergiebt sich, dass bei denjenigen Combinationen, welche natürlichen Verbindungen entsprechen, also bei den durch grössere Ziffern hervorgehobenen, jedesmal das Metall ein äusseres Glied ist. Niemals kommt es in der Mitte vor, allemal schliesst es die Reihe ab. Ebenso ist es mit dem Wasserstoffe, der seiner Ungleichseitigkeit wegen in der Mitte einer Reihe überhaupt nicht gut zu verwenden ist.

Bekanntlich gehören der Wasserstoff und die drei Alkalimetalle zu den sogenannten einwerthigen Elementen, und die erwähnte Eigenthümlichkeit dürfte mit dieser Einwerthigkeit zusammenhängen. Es giebt

übrigens einwerthige Elemente nicht nur unter den elektropositiven, sondern auch unter den elektronegativen, und da ich letztere noch nicht untersucht habe, kann ich selbstverständlich den Satz, dass die Einwerthigkeit mit der Stellung zusammenhänge, nicht als feststehend betrachten; ich muss mich einstweilen damit begnügen, auf obige Eigenthümlichkeit aufmerksam zu machen. Bei den elektronegativen Elementen kann für die Einwerthigkeit ein ganz anderer Grund bestehen, als bei den elektropositiven.

Ich glaube übrigens nicht, dass ein einwerthiges Element sich überhaupt gar nicht mit zwei anderen verbinden könne, denn sonst würden die einwerthigen Stoffe nur als Gase vorkommen; ist aber ein Körper fest, wie z. B. die drei Alkalimetalle, so ist in demselben jedenfalls stets ein Atom mit mehreren, wenn auch ihm gleichartigen verbunden. Am schwersten lässt sich der Wasserstoff in die Mitte einer Reihe bringen oder mehrwerthig machen, denn stets wendet er gegen das mit ihm verbundene Atom sein Massentheilchen, während das Aethertheilchen nach aussen gerichtet ist, womit dann die weitere Anreihung von Elementen zunächst ein Ende hat. Uebrigens hat man ja in neuerer Zeit den Wasserstoff condensirt und so eine Verbindung von mehr als zwei Atomen desselben hergestellt.

---

# XV.

## Grundzüge einer Dipolargeometrie.

Von

Dr. G. Leonhardt

in Colberg.

Hierzu Taf. V Fig. 2—5.

Durch Untersuchungen über die Vertheilung der Elektricität auf einem Conoide, welche ich in meiner Dissertation* veröffentlicht habe, bin ich zu weiteren rein geometrischen Beziehungen geführt. Genanntes Problem wird bekanntlich gelöst mit Hilfe der Kegelfunctionen und unter Zugrundelegung des dipolaren Coordinatensystems, und es ist mir gelungen, ausgehend von elektrostatischen Eigenschaften des Conoids, geometrische Beziehungen zwischen den dipolaren Coordinaten abzuleiten, durch welche theils neue Eigenschaften derselben aufgedeckt, theils bekannte auf neuem Wege abgeleitet werden.

Durch die Arbeiten des Herrn C. Neumann ist dies Coordinatensystem so geläufig geworden, dass ich einer näheren Auseinandersetzung desselben überhoben bin. Eine kurze Darstellung und die wichtigsten Eigenschaften desselben findet man in dem ersten Paragraphen der Abhandlung des Herrn Neumann: „Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen", Mathem. Annal., Bd. 18. Ich will nur bemerken, dass, wenn zwei feste Punkte $A$ und $A'$ (Pole) in der Entfernung $2e$ auf einer Geraden (Axe) gegeben sind, man dieselben durch einen beliebigen Kreisbogen verbindet, welcher gegen die Axe in einem Winkel $\omega$ geneigt ist, und man ausserdem den Quotienten $\frac{AB}{BA'} = \lambda = e^{-\vartheta}$ setzt, wo $B$ ein beliebiger Punkt ist, man unter den dipolaren Coordinaten des Punktes $B$ die Grössen $\omega$ und $\vartheta$ (oder $\lambda$) versteht. Der Quotient $\lambda$ ist gewöhnlich durch sein äquivalentes $\vartheta$ ersetzt. Hier aber, wo wir geometrische Beziehungen untersuchen, wird es sich in einigen Fällen vortheilhaft erweisen, statt des $\vartheta$ die Grösse $\lambda$ zu benutzen, da letztere geometrisch construirt werden kann, während das $\vartheta$ eine rein analytische Grösse ist. Schliesslich führt man als dritte Coordinate das Azimuth $\varphi$ ein.

* Ueber die Vertheilung der Elektricität auf einem durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper. Halle 1881.

Die Gleichung $\omega = Const.$ stellt ein Conoid, $\vartheta = Const.$ eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der Axe ausserhalb $AA'$ liegt, $\varphi = Const.$ eine Ebene dar. Im Besondern ist $\vartheta = 0$ die Gleichung einer Ebene, welche durch Rotation des im Nullpunkte, d. h. in der Mitte von $AA'$ errichteten Lothes um die Axe entsteht. Dies Loth will ich die Symmetrielinie und die Ebene $\vartheta = 0$ die Symmetrieebene des Coordinatensystems nennen.

---

## § 1. Begriff der Isogreene. Gleichung von Ebenen.

Es ist bei einer Kugel, welche man als ein Conoid vom Parameter $\omega = \frac{\pi}{2}$ ansehen kann, die Green'sche Function

$$G = \frac{e}{r_\mu} \cdot \frac{1}{\mathrm{E}},$$

wo $r_\mu$ die Entfernung zwischen dem Nullpunkte und einem festen äussern oder innern Punkte $\mu$ und E die Entfernung zwischen einem beliebigen äussern oder innern Punkte $m$ und dem zu $\mu$ in Bezug auf die Kugelfläche conjugirten Punkte $\iota$ darstellt. Sind ferner $\omega_m$, $\vartheta_m$, $\varphi_m$ die dipolaren Coordinaten des variablen Punktes $m$ und $\omega_\iota$, $\vartheta_\iota$, $\varphi_\iota$ diejenigen des Punktes $\iota$, so lässt sich mit Benutzung des Ausdruckes für $\frac{1}{\mathrm{E}}$ in dipolaren Coordinaten (§ 1, 5 der erwähnten Abhandlung des Herrn Neumann) die Green'sche Function in der Form schreiben

$$1)\quad G = \frac{1}{2 r_\mu} \frac{\sqrt{2 \cos i\vartheta_\iota - 2 \cos \omega_\iota}\sqrt{2 \cos i\vartheta_m - 2 \cos \omega_m}}{\sqrt{2 \cos i(\vartheta_\iota - \vartheta_m) - 2 \cos \omega_\iota \cos \omega_m - 2 \sin \omega_\iota \sin \omega_m \cos(\varphi_\iota - \varphi_m)}}.$$

Um nun aus diesem Ausdrucke geometrische Beziehungen abzuleiten, will ich die Curve, welche alle Punkte von gleicher Green'scher Function verbindet, eine isogreensche Curve oder kurz eine Isogreene nennen. Da die Green'sche Function die Form besitzt $G = \frac{Const.}{\mathrm{E}}$, so ist die Isogreene derjenige Theil einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte $\iota$ und dem Radius E, welcher in das Innere der Kugel $\omega = \frac{\pi}{2}$ fällt, wenn die Punkte $m$ und $\mu$ innerhalb derselben liegen; liegen diese hingegen ausserhalb, derjenige Theil einer Kugelfläche, welche ausserhalb der Kugel $\omega = \frac{\pi}{2}$ fällt.

Geht die Isogreene durch den Pol $A$, so ist $\vartheta_m = \infty$ und es wird

$$2)\quad G_A = \frac{1}{2 r_\mu} \frac{\sqrt{2 \cos i\vartheta_\iota - 2 \cos \omega_\iota}}{\sqrt{\cos i\vartheta_\iota + i \sin i\vartheta_\iota}}.$$

Geht die Isogreene durch den Pol $A'$, so ist $\vartheta_m = -\infty$ und es wird

$$3)\qquad G_{A'} = \frac{1}{2r_\mu}\,\frac{\sqrt{2\cos i\vartheta_\iota - 2\cos\omega_\iota}}{\sqrt{\cos i\vartheta_\iota - i\sin i\vartheta_\iota}}.$$

Geht die Isogreene durch den Nullpunkt, so ist $\vartheta_m = 0$, $\omega_m = \pi$, und es wird

$$4)\qquad G_0 = \frac{1}{r_\mu}\,\frac{\sqrt{\cos i\vartheta_\iota - \cos\omega_\iota}}{\sqrt{\cos i\vartheta_\iota + \cos\omega_\iota}}.$$

Geht nun die Isogreene sowohl durch den Pol $A'$, wie durch einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche $\vartheta_m$, $\omega_m = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_m$, so muss sie gleichzeitig den Gleichungen 1) und 3) genügen, woraus sich ergiebt (Fig. 2)

$$5)\qquad i\sin i\vartheta_\iota\left[\cos i\vartheta_m - i\sin i\vartheta_m\right] - \sin\omega_\iota\cos(\varphi_\iota - \varphi_m) = 0.$$

Geht aber die Isogreene durch den Pol $A'$ und einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche, so muss der Punkt $\iota$ in einer Ebene liegen, welche auf der Ebene $\varphi_m = Const.$ senkrecht steht und diese in der Geraden $\overline{o\iota}$ schneidet, wo $\overline{o\iota}$ senkrecht auf der Mitte von $\overline{mA'}$ errichtet ist, d. h. er muss liegen in einer durch den Nullpunkt gehenden und auf der Ebene $\varphi_m = Const.$ senkrecht stehenden Ebene, welche in demselben Winkel $\psi$ wie die Gerade $\overline{o\iota}$ gegen die Axe geneigt ist. Verbindet man ferner den Punkt $m$ auf der Kugeloberfläche mit dem Nullpunkte, so ist auch $\overline{om}$ in einem gewissen Winkel $\chi$ gegen die Axe geneigt, und zwar ist $\chi = 2\psi$. Ferner ist

$$\sin\chi = \frac{y_m}{r_m}, \qquad \cos\chi = \frac{x_m}{r_m},$$

wo $x_m$, $y_m$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $\vartheta_m$, $\omega_m = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_m$ und $r_m$ seine Entfernung vom Nullpunkte.

Benutzt man jetzt die Relationsformeln zwischen den rechtwinkligen und dipolaren Coordinaten (§ 1, 4 der Abhandlung des Herrn Neumann)

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{e\,i\sin i\vartheta}{\cos i\vartheta - \cos\omega},\\ y &= \frac{e\sin\omega\cos\varphi}{\cos i\vartheta - \cos\omega},\\ z &= \frac{e\sin\omega\sin\varphi}{\cos i\vartheta - \cos\omega},\end{aligned}\right.$$

und bedenkt, dass in unserem Falle $\omega_m = \frac{\pi}{2}$ und $r_m = e$ ist, sowie dass der Winkel $\chi$ bei der Rotation um die Axe sich nicht ändert, dass er also von $\varphi$ unabhängig ist, so wird

$$\sin\chi = \frac{1}{\cos i\vartheta_m}, \qquad \cos\chi = \frac{i\sin i\vartheta_m}{\cos i\vartheta_m}$$

und hieraus

$$\cos i\vartheta_m = \frac{1}{\sin\chi}$$

$$i \sin i\vartheta_m = \frac{\cos\chi}{\sin\chi}$$

$$\cos i\vartheta_m - i\sin i\vartheta_m = \frac{1-\cos\chi}{\sin\chi} = tag\frac{\chi}{2} = tag\,\psi,$$

welche Relation man auch direct aus der Figur ableiten kann, wenn man bedenkt, dass $\cos i\vartheta - i\sin i\vartheta = e^{\vartheta} = \frac{1}{\lambda} = \frac{A'm}{m\,A}$ ist. Setzt man nun diesen Werth in 5) ein, so geht die Gleichung, wenn man $\vartheta_\iota$, $\omega_\iota$, $\varphi_\iota$ allgemein mit $\vartheta$, $\omega$, $\varphi$ und $\varphi_m$ mit $\varphi'$ bezeichnet, über in

7) $$i\sin i\vartheta\, tag\,\psi - \sin\omega\cos(\varphi-\varphi') = 0$$

und dies ist die Gleichung einer auf der Ebene $\varphi' = Const.$ senkrecht stehenden, durch den Nullpunkt gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Ebene.

Aus dieser Gleichung lässt sich durch Specialisiren eine Reihe weiterer Formeln für geometrische Gebilde ableiten.

Wird in 7) $\varphi' = 0$ oder $= \pi$ und betrachtet man als die feste Meridianebene $\varphi = 0$ die obere Halbebene der Zeichnung, so ist

8) 9) $$i\sin i\vartheta\, tag\,\psi \mp \sin\omega\cos\varphi = 0$$

die Gleichung einer auf der oberen, resp. unteren Halbebene der Zeichnung senkrecht stehenden, durch den Nullpunkt gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Ebene, und zwar ist in 9) das $\psi$ entgegengesetzt gleich dem in 8) auftretenden $\psi$.

Wird in 7) $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$, so ist

10) 11) $$i\sin i\vartheta\, tag\,\psi \mp \sin\omega\sin\varphi = 0$$

die Gleichung einer auf der Ebene $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ resp. $= \frac{3\pi}{2}$ senkrecht stehenden, durch die Symmetrielinie gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Ebene.

Setzt man ferner in den letzten vier Formeln $\varphi = 0$, so ist

8a) 9a) $$i\sin i\vartheta\, tag\,\psi \mp \sin\omega = 0$$

die Gleichung einer in der oberen, resp. unteren Halbebene der Zeichnung liegenden, durch den Nullpunkt gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Geraden, und $i\sin i\vartheta\, tag\,\psi = 0$ oder, da $\psi$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt,

10a) 11a) $$\vartheta = 0$$

die Gleichung der Symmetrielinie.

Setzt man ferner in 10) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder in 11) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, so erhält man wieder die Gleichungen 8a) und 9a). Diese so entstandenen Geraden liegen aber in den Ebenen $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ resp. $= \frac{3\pi}{2}$. Die Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Geraden ist also mit Rücksicht auf das Vorzeichen von $\psi$ dieselbe, mag sie in den Ebenen $\varphi' = 0 = \frac{\pi}{2} = \pi = \frac{3\pi}{2}$ liegen. Und dies findet in der That noch allgemeiner statt. Denn da bei der Rotation einer solchen Geraden um die Axe sich weder $\omega$, noch $\vartheta$, noch $\psi$ ändert, so kann unter Berücksichtigung des Vorzeichens von $\psi$ diese Gerade auf einem Kegel liegen, welcher durch Rotation der Geraden um die Axe entsteht. Die Gleichung

$$12)\qquad i \sin i\vartheta \, tag\,\psi - \sin \omega = 0$$

stellt also nicht nur eine Gerade, sondern auch einen Kegel mit der Spitze im Nullpunkte und der Oeffnung $2\psi$ dar. Doch ist zu berücksichtigen, dass $\psi$ für Punkte oberhalb der Axe positiv und für Punkte unterhalb derselben negativ zu nehmen ist.

Man kann dasselbe Resultat auch direct aus 7) ableiten. Lässt man nämlich dort $\varphi$ mit $\varphi'$ zusammenfallen, so ist

$$i \sin i\vartheta \, tag\,\psi - \sin \omega = 0$$

die Schnittgerade der Ebene, welche durch 7) dargestellt wird, und der Ebene $\varphi' = Const.$ Hier aber sind $\varphi$ und $\varphi'$ fortgefallen, und ihre Wirkung äussert sich nur in dem Vorzeichen des Winkels $\psi$, so dass in der That die Gleichung dieser Schnittgeraden unter Berücksichtigung des Vorzeichens nicht geändert wird, wenn man $\varphi'$ und damit gleichzeitig auch $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ variiren lässt.

Wird in der Gleichung 12) des Kegels $\psi = 0$ oder $= \pi$, so erhält man

$$13)\qquad \sin \omega = 0$$

als Gleichung der Axe. Da nun $\omega$ von 0 bis $\pi$ variiren kann, so folgt $\omega = 0$ oder $= \pi$, und zwar ist $\omega = 0$ für alle Punkte der Axe ausserhalb $AA'$ und $= \pi$ für alle Punkte derselben innerhalb $AA'$, so dass $\sin \omega = 0$ in der That die Gleichung der ganzen ins Unendliche laufenden Axe ist.

Wird in 12) $\psi = \frac{\pi}{2}$, so ist wieder $\vartheta = 0$ die Gleichung der Symmetrieebene.

## § 2. Verallgemeinerung.

Betrachtet man in der Gleichung

$$1)\qquad i \sin i\vartheta \, tag\,\psi - \sin \omega = 0$$

sämmtliche drei Gössen $\vartheta$, $\omega$, $\psi$ als variabel, so erhält man sämmtliche Punkte des Raumes. Nimmt man hier diejenigen heraus, welche gleiches $\psi$ besitzen, so erhält man einen Kegel; nimmt man ferner diejenigen heraus, welche gleiches $\omega$ besitzen, so ein Conoid, und endlich diejenigen, welche gleiches $\vartheta$ besitzen, so eine Kugel. Die Gleichung 1) stellt also nicht nur einen Kegel, sondern ausserdem noch ein Conoid und eine Kugel dar, je nachdem $\pi$ oder $\omega$ oder $\vartheta$ als constant betrachtet wird. Bringt man in diesen drei Fällen die constanten Werthe auf eine Seite, so ist

2) $\frac{\sin\omega}{i\sin i\vartheta} = tag\,\psi$ die Gleichung eines Kegels ($\psi = Const.$),

3) $i\sin i\vartheta\, tag\,\psi = \sin\omega$ die Gleichung eines Conoids ($\omega = Const.$);

4) $\frac{\sin\omega}{tag\,\psi} = i\sin i\vartheta$ die Gleichung einer Kugel ($\vartheta = Const.$).

Die Gleichungen 2) bis 4) kann man auch durch folgende Betrachtungen gewinnen. Sieht man die Ebene der Zeichnung als $xy$-Ebene an, betrachtet in der $yz$-Ebene einen Kreis mit dem Radius $r$, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt, und verbindet man einen Punkt dieser Kreisperipherie mit dem Nullpunkte durch eine Gerade, welche im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigt ist, so ist $tag\,\psi = \frac{r}{x}$; und da $r$ bei der Rotation um die Axe ebenso wie $\psi$ und $x$ constant bleibt, so ist

$$tag\,\psi = \frac{r}{x} = \frac{\sin\omega}{i\sin i\vartheta}.$$

Betrachtet man jetzt eine Reihe solcher Kreise, so ist die Enveloppe der Kreise, welche gleiches $\psi$ besitzen, ein Kegel mit der Spitze im Nullpunkte und der Oeffnung $2\psi$, derjenigen Kreise, welche gleiches $\omega$ besitzen, ein Conoid und derjenigen von gleichem $\vartheta$ eine Kugel, wie in den Gleichungen 2) bis 4).

In der Gleichung $i\sin i\vartheta\, tag\,\psi - \sin\omega = 0$ fasse man $\psi$ als constant auf, betrachte dieselbe also als Gleichung einer Geraden. Haben zwei Punkte derselben gleiches $\vartheta$, so ist, wenn man die $\omega$-Coordinate des einen Punktes mit $\omega$, die des andern mit $\omega_1$ bezeichnet, $\sin\omega = \sin\omega_1$, d. h. entweder $\omega_1 = \omega$, die beiden Punkte fallen zusammen, oder $\omega_1 = \pi - \omega$. Es lässt sich auch geometrisch leicht ableiten, dass, wenn zwei Punkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden gleiches $\vartheta$ besitzen, zwischen ihren $\omega$-Coordinaten die Beziehung gilt $\omega_1 = \pi - \omega$, woraus sich ohne Schwierigkeit die weitere Relation

$$r.r_1 = e^2$$

ergiebt, wo $r$ und $r_1$ die Radii vectores der betreffenden Punkte sind. Solche Punkte nennt man bekanntlich zwei in Bezug auf einen Kreis vom Radius $e$ conjugirte Punkte, und ich will die Conoide, auf denen

diese Punkte liegen, welche also die Eigenschaft besitzen, dass ihre Parameter $\omega$ und $\pi-\omega$ sind, analog zwei in Bezug auf einen Kreis conjugirte Conoide nennen. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft derselben folgt zu Schluss des § 7.

### § 3. Allgemeinste Gleichung von Ebenen.

Die bis jetzt gewonnenen Resultate sind noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig. Wir hatten sie abgeleitet aus der Bedingung, dass die Isogreene durch den Pol $A'$ und einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche gehen sollte. Lässt man andererseits die Isogreene durch den Nullpunkt und einen beliebigen Raumpunkt gehen, so erhält man noch allgemeinere Resultate. In diesem Falle muss die Isogreene den Gleichungen 1) und 4) des § 1 gleichzeitig genügen, woraus sich ergiebt

$$1)\qquad \frac{i\sin i\vartheta_t}{\cos i\vartheta_t-\cos\omega_t}\cdot\frac{2i\sin i\vartheta_m}{\cos i\vartheta_m+\cos\omega_m} + \frac{\sin\omega_t\cos(\varphi_t-\varphi_m)}{\cos i\vartheta_t-\cos\omega_t}\cdot\frac{2\sin\omega_m}{\cos i\vartheta_m+\cos\omega_m}=1.$$

Geht aber die Isogreene durch den Nullpunkt und einen beliebigen Raumpunkt, so muss der Punkt in einer Ebene liegen, welche senkrecht auf der Ebene $\varphi_m=Const.$ steht, in einem gewissen Abstande vom Nullpunkte (in § 1 war dieser Abstand $=0$) die Axe schneidet und in einem gewissen Winkel $\psi$ gegen dieselbe geneigt ist. Bezeichnet man den Winkel, in welchem $r_m$, d. i. die Entfernung des Punktes $m$ vom Nullpunkte, gegen die Axe geneigt ist, mit $\chi$, denjenigen, in welchem die durch 1) dargestellte Ebene gegen dieselbe geneigt ist, mit $\psi$ und den Abstand des Schnittpunktes der Ebene mit der Axe vom Nullpunkte $\overline{oC}$ mit $p$, so ist (Fig. 3)

$$2)\qquad \chi=\psi-\frac{\pi}{2}\quad\text{und}\quad r_m=2p\cos\chi.$$

Betrachtet man andererseits $r_m$ als Entfernung zwischen dem Nullpunkte und dem Punkte $\omega_m\vartheta_m\varphi_m$, so ist

$$3)\qquad r_m=\frac{e\sqrt{\cos i\vartheta_m+\cos\omega_m}}{\sqrt{\cos i\vartheta_m-\cos\omega_m}},$$

daher

$$4)\qquad \frac{e}{2p\cos\chi}=\frac{\sqrt{\cos i\vartheta_m-\cos\omega_m}}{\sqrt{\cos i\vartheta_m+\cos\omega_m}}.$$

Nun ist, wie vorher, $\cos\chi=\frac{x_m}{r_m}$ und $\sin\chi=\frac{y_m}{r_m}$, woraus sich, wenn man für $x_m$, $y_m$ ihre Werthe in dipolaren Coordinaten nach § 1, 6) einsetzt, nach einigen Rechnungen unter Benutzung von 4) ergiebt

$$5)\qquad \frac{2i\sin i\vartheta_m}{\cos i\vartheta_m+\cos\omega_m}=\frac{e}{p},$$

6) $$\frac{2 \sin \omega_m}{\cos i\vartheta_m + \cos \omega_m} = \frac{e \operatorname{tag} \chi}{p} = -\frac{e \cos \psi}{p \sin \psi}.$$

Setzt man diese Werthe in 1) ein, bezeichnet $\omega_\iota \vartheta_\iota \varphi_\iota$ allgemein mit $\omega \vartheta \varphi$ und $\varphi_m$ mit $\varphi'$, so ist

7) $$\frac{i \sin i\vartheta \sin \psi - \sin \omega \cos (\varphi - \varphi')}{(\cos i\vartheta - \cos \omega) \sin \psi} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer auf der Ebene $\varphi' = Const.$ senkrecht stehenden, im Abstande $p$ vom Nullpunkte die Axe schneidenden und im Winkel $\psi$ gegen dieselbe geneigten Ebene.

Man kann diese Gleichung auch direct aus den rechtwinkligen Coordinaten ableiten. Geht nämlich unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Isogreene durch den Nullpunkt und einen beliebigen Raumpunkt $x_1 y_1 z_1$, so folgt, wenn man mit $xyz$ einen Punkt der durch 7) dargestellten Ebene bezeichnet,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

oder, wenn wir die Entfernung des Punktes $x_1 y_1 z_1$ vom Nullpunkte mit $r_1$ bezeichnen,

$$\frac{r_1^2}{2} = x x_1 + y y_1 + z z_1.$$

Nun ist aber

$$x_1 = r_1 \cos \chi, \quad y_1 = r_1 \sin \chi \cos \varphi_1, \quad z_1 = r_1 \sin \chi \sin \varphi_1.$$

Setzt man dies ein und bedenkt, dass ebenso wie vorher $r_1 = 2p \cos \chi$ und $\chi = \psi - \frac{\pi}{2}$ ist, so ergiebt sich

$$p \sin \psi = x \sin \psi - y \cos \psi \cos \varphi_1 - z \cos \psi \sin \varphi_1,$$

und setzt man hierin noch für $xyz$ ihre Werthe in dipolaren Coordinaten nach § 1, 6), so geht die Formel in 7) über.

Von der Gleichung 7) können jetzt dieselben Specialfälle, wie in den analogen Formeln des § 1 in Betracht gezogen werden. Wird in 7) $\varphi' = 0$ oder $= \pi$, so ist

8), 9) $$\frac{i \sin i\vartheta \sin \psi \mp \sin \omega \cos \psi \cos \varphi}{(\cos i\vartheta - \cos \omega) . \sin \psi} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer auf der oberen, resp. unteren Halbebene der Zeichnung senkrecht stehenden, im Abstande $p$ vom Nullpunkte die Axe schneidenden und im Winkel $\psi$ gegen dieselbe geneigten Ebene.

Wird in 7) $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$, so ist

10), 11) $$\frac{i \sin i\vartheta \sin \psi \mp \sin \omega \cos \psi \sin \varphi}{(\cos i\vartheta - \cos \omega) \sin \psi} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer durch die im Abstande $p$ vom Nullpunkte zur Symmetrielinie parallele Gerade hindurchgehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Ebene.

Wird in den letzten vier Formeln noch $\varphi = 0$, so ist

$$\left.\begin{array}{l}8\text{a})\\9\text{a})\end{array}\right\} \qquad \frac{i \sin i\vartheta \sin\psi \mp \sin\omega \cos\psi}{(\cos i\vartheta - \cos\omega)\sin\psi} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer in der oberen, resp. unteren Halbebene der Zeichnung im Abstande $p$ vom Nullpunkte die Axe schneidenden und im Winkel $\psi$ gegen dieselbe geneigten Geraden, und

$$\left.\begin{array}{l}10\text{a})\\11\text{a})\end{array}\right\} \qquad \frac{i \sin i\vartheta}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer im Abstande $p$ vom Nullpunkte zur Symmetrielinie parallelen, d. h. auf der Axe senkrechten Geraden.

Bemerkt man noch, dass man die Gleichungen 8a) und 9a) auch direct aus 7) ableiten kann, indem man dort $\varphi$ mit $\varphi'$ zusammenfallen lässt, so erhält man dort, analog wie dieselben Formeln des § 1, nicht nur gerade Linien, sondern auch die durch Rotation derselben um die Axe entstehenden Raumgebilde darstellten, das Resultat, dass die Gleichung 8a) mit Rücksicht auf das Vorzeichen von $\psi$ einen Kegel mit der Oeffnung $2\psi$, dessen Spitze in der Entfernung $p$ vom Nullpunkte auf der Axe liegt, und 10a) eine im Abstande $p$ vom Nullpunkte auf der Axe senkrecht stehende Ebene darstellt, und zwar ist in 8a), analog wie vorher, das $\psi$ für Punkte oberhalb der Axe positiv und für Punkte unterhalb derselben negativ zu nehmen.

Wird in der Gleichung des Kegels

$$12) \qquad \frac{i \sin i\vartheta \sin\psi - \sin\omega \cos\psi}{(\cos i\vartheta - \cos\omega)\sin\psi} = \frac{p}{e}$$

$\psi = 0$ oder $= \pi$, so erhält man wieder

$$13) \qquad \sin\omega = 0$$

als Gleichung der Axe; wird in 12) $\psi = \frac{\pi}{2}$, so ist wieder

$$14) \qquad \frac{i \sin i\vartheta}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p}{e}$$

die Gleichung einer im Abstande $p$ vom Nullpunkte auf der Axe senkrecht stehenden Ebene. Die Gleichungen 10a) und 14) bedeuten nämlich nichts Anderes, als $x = Const. = p$.

Analog wie die Formeln des § 1 im § 2 eine Verallgemeinerung erfuhren, kann auch hier die Formel 12) noch dahin erweitert werden, dass sie nicht nur einen Kegel, sondern ausserdem noch ein Conoid oder eine Kugel darstellt, je nachdem $\psi$, $\omega$ oder $\vartheta$ als constant betrachtet wird. Doch ist zu bemerken, dass ebenso, wie im Gegensatz zu § 2 die Spitze des Kegels nicht im Nullpunkte, sondern in einer Entfernung $p$ von demselben auf der Axe liegt, so auch das durch 12) dargestellte Conoid oder bei constantem $\vartheta$ die Kugel auf ein dipolares Coordinaten-

system bezogen ist, dessen Nullpunkt in der Entfernung $p$ von dem Nullpunkte des ursprünglichen Coordinatensystems auf der gemeinsamen Axe liegt.

Die Formeln dieses Paragraphen enthalten die des § 1 bereits in sich; denn man braucht nur $p=0$ zu setzen, um die analogen Gebilde des § 1 zu erhalten.

## § 4. Gleichungen von Ebenen, welche durch die Pole gehen.

Diese erhalten wir aus den Formeln des vorigen Paragraphen, wenn wir in ihnen $p=\pm e$ setzen. Ist $p=-e$, so gehen die Gebilde durch den Pol $A$, und es lassen sich die Formeln, wenn man bedenkt, dass $\cos i\vartheta + i \sin i\vartheta = e^{-\vartheta} = \lambda$ ist, in folgende umwandeln (die gleichbezeichneten Formeln beziehen sich auf die analogen Gebilde des vorigen Paragraphen):

7) $$\lambda \, tag\,\psi = \cos\omega \, tag\,\psi + \sin\omega \cos(\varphi-\varphi'),$$

8) 9) $$\lambda \, tag\,\psi = \cos\omega \, tag\,\psi \pm \sin\omega \cos\varphi,$$

10) 11) $$\lambda \, tag\,\psi = \cos\omega \, tag\,\psi \pm \sin\omega \sin\varphi,$$

8a) 9a) $$\lambda \, tag\,\psi = \cos\omega \, tag\,\psi \pm \sin\omega,$$

10a) 11a) $$\lambda = \cos\omega.$$

Die Gleichung 8a) stellt also einen Kegel mit der Oeffnung $2\psi$ dar, dessen Spitze im Pole $A$ liegt. Man kann dieser Gleichung auch die Form geben

$$\lambda \sin\psi = \cos\omega \sin\psi + \sin\omega \cos\psi,$$

d. h.

12) $$\lambda = \frac{\sin(\psi+\omega)}{\sin\psi},$$

welche Gleichung für $\psi=\frac{\pi}{2}$ in 10a) übergeht; man kann Formel 12) auch direct aus der Figur ablesen. Es ist nämlich (Fig. 4)

$$\lambda = \frac{AC}{CA'} = \frac{\sin AA'C}{\sin CAA'} = \frac{\sin(\psi+\omega)}{\sin\psi}.$$

Setzt man in denselben Formeln des § 3 $p=+e$, so gehen die Gebilde durch den Pol $A'$, und zwar ergiebt sich, wenn man bedenkt, dass $\cos i\vartheta - i\sin i\vartheta = e^{\vartheta} = \frac{1}{\lambda}$ ist, als allgemeinste, der Gleichung 7) des § 3 für $p=e$ entsprechende Gleichung

$$\frac{tag\,\psi}{\lambda} = \cos\omega \, tag\,\psi - \sin\omega \cos(\varphi-\varphi'),$$

woraus man durch Specialisiren wiederum die analogen Gebilde erhält. Im Besondern wird für $\varphi = \varphi'$ die Gleichung eines Kegels mit der Oeffnung $2\psi$, dessen Spitze im Pole $A'$ liegt,

$$\frac{\sin\psi}{\lambda} = \cos\omega \sin\psi - \sin\omega \cos\psi$$

oder

13) $$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin\psi},$$

welche Formel ebenfalls direct aus der Figur abgeleitet werden kann und für $\psi = \frac{\pi}{2}$ in die Gleichung einer im Pole $A'$ auf der Axe senkrecht stehenden Ebene übergeht

14) $$\frac{1}{\lambda} = \cos\omega.$$

### § 5. Gleichung von Ebenen, welche der Axe parallel laufen.

Diese erhält man aus den Gleichungen des § 3, wenn man in ihnen $\psi = \pi$ setzt und gleichzeitig $p$ zu $\infty$ werden lässt. Bedenkt man noch, dass $p \sin\psi$ das vom Nullpunkte auf die Ebene gefällte Loth $p'$ darstellt, so ist

1) $$\frac{\sin\omega \cos(\varphi - \varphi')}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p'}{e}$$

die Gleichung einer auf der Ebene $\varphi' = Const.$ senkrecht stehenden und im Abstande $p'$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Ebene.

Wird in 1) $\varphi' = 0$ oder $= \pi$, so ist

2), 3) $$\frac{\sin\omega \cos\varphi}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \pm \frac{p'}{e}$$

die Gleichung einer auf der oberen, resp. unteren Halbebene der Zeichnung senkrecht stehenden und im Abstande $p'$ resp. $-p'$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Ebene; diese Gleichung bedeutet nämlich nichts Anderes, als $y = Const. = \pm p'$.

Wird in 1) $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$, so ist

4), 5) $$\frac{\sin\omega \sin\varphi}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \pm \frac{p'}{e}$$

die Gleichung einer auf der Ebene $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ resp. $\varphi' = \frac{3\pi}{2}$ senkrecht stehenden und im Abstande $p'$ resp. $-p'$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Ebene; diese Gleichung bedeutet nämlich nichts Anderes, als $z = Const. = \pm p'$.

Wird in 2) und 3) noch $\varphi = 0$, so ist

2a), 3a) $$\frac{\sin\omega}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \pm \frac{p'}{e}$$

die Gleichung einer im Abstande $\pm p'$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Geraden. In den Gleichungen 4) und 5) kann $\varphi$ nicht 0 werden. Denn die durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen stehen senkrecht auf den Ebenen $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ resp. $= \frac{3\pi}{2}$, d. h. laufen parallel den Ebenen $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$.

Schliesslich erhalten wir, analog wie früher, das Resultat, dass die Gleichung

$$6)\qquad \frac{\sin\omega}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p'}{e}$$

nicht nur eine im Abstande $p'$ von der Axe mit ihr parallel laufende Gerade, sondern auch das durch Rotation dieser Geraden um die Axe entstehende Raumgebilde darstellt. Die Formel 6) ist also die Gleichung eines Kreiscylinders mit dem Radius $p'$, dessen Axe mit der Axe des Coordinatensystems zusammenfällt, und zwar ist $p'$ für Punkte oberhalb der Axe positiv und für Punkte unterhalb derselben negativ zu nehmen.

Setzt man in den Gleichungen dieses Paragraphen wieder $p' = \pm e$, so erhält man die analogen Gebilde im Abstande $\pm e$ von der Axe, und führt man alsdann für $\vartheta$ sein äquivalentes $\lambda$ ein, so erhält man analoge Formeln wie in § 4; z. B. wird die Gleichung des Kreiscylinders mit dem Radius $e$

$$7)\qquad \lambda^2 - 2\lambda[\sin\omega + \cos\omega] + 1 = 0$$

und hieraus

$$8)\qquad \lambda = \sin\omega + \cos\omega \pm \sqrt{\sin 2\omega},$$

und zwar gilt, wie auch die Figur lehrt, wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln dieser Gleichung sind, die Beziehung $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$.

## § 6. Die $\vartheta$-Coordinate des Projectionspunktes.

Wird ein beliebiger Punkt $B$ auf die Axe zum Punkte $C$ projicirt, so bietet sich sofort die Aufgabe dar, die $\vartheta$-Coordinate dieses Projectionspunktes durch diejenige des projicirten Punktes auszudrücken.

Da der projicirte und der Projectionspunkt immer in einer Ebene liegen, so fällt die Abhängigkeit der fraglichen Ausdrücke von dem Azimuth fort und wir können uns daher auf die Ebene beschränken. Sind nun $\vartheta\,\omega$ die Coordinaten des gegebenen und $\vartheta_1, \omega_1 = {0 \atop \pi}$ diejenigen des Projectionspunktes, so ist, da beide Punkte gleiches $x$ besitzen, nach § 1, 6)

$$1)\qquad \frac{i\sin i\vartheta}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{i\sin i\vartheta_1}{\cos i\vartheta_1 \pm 1}\left\{\begin{array}{l} +1, \text{ wenn } \vartheta_1 \text{ innerhalb } AA', \\ -1, \text{ wenn es ausserhalb } AA' \text{ liegt.}\end{array}\right.$$

Eine der Form nach von dieser verschiedene und zugleich der geometrischen Construction zugängliche Relation zwischen den $\vartheta$-Coordinaten

beider Punkte erhält man auf folgende Weise. Ist $\lambda$ die $\vartheta$- oder $\lambda$-Coordinate des gegebenen und $\lambda_1$ diejenige seines Projectionspunktes, so ist (Fig. 5)

$$\lambda = \frac{AB}{BA'}, \quad \lambda_1 = \frac{AC}{CA'}.$$

Ferner ist

$$\cos\omega = \frac{AC}{AB} = \frac{e+x}{AB}$$

$$\cos\omega' = \frac{A'C}{A'B} = \frac{e-x}{A'B}$$

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{A'B}{A'C} = \frac{e+x}{e-x}\cdot\frac{A'B}{AB}$$

und hieraus

$$\lambda_1 = \frac{e+x}{e-x}.$$

Führt man jetzt für $x$ seinen Ausdruck in dipolaren Coordinaten nach § 1, 6) und alsdann für $\vartheta$ sein äquivalentes $\lambda$ ein, so ergiebt sich

2) $$\lambda_1 = \frac{\lambda^2 - \lambda\cos\omega}{1-\lambda\cos\omega},$$

welche Gleichung die $\lambda$-Coordinate des Projectionspunktes durch diejenige des projicirten Punktes ausdrückt. Liegt im Besondern der gegebene Punkt auf einer Kreisperipherie, d. h. wird sein $\omega = \frac{\pi}{2}$, so ist

3) $$\lambda_1 = \lambda^2$$

oder

4) $$\vartheta_1 = 2\vartheta.$$

Construirt man ferner den $\vartheta$-Kreis, auf dem der gegebene Punkt $B$ liegt, und ist $D$ sein Mittelpunkt, so lässt sich geometrisch leicht zeigen (der Beweis für einen speciellen Fall folgt sogleich), dass auch die $\lambda$-Coordinate $\Lambda$ dieses Mittelpunktes $= \lambda^2$ ist; daher

5) $$\lambda_1 = \Lambda,$$

d. h.: Der Projectionspunkt eines Punktes $B$ der Kreisperipherie $\omega = \frac{\pi}{2}$ und der Mittelpunkt des $\vartheta$-Kreises, auf dem $B$ liegt, liegen auf demselben $\vartheta$-Kreise, d. h. bilden mit den Polen $A$ und $A'$ vier harmonische Punkte.

Die Gleichung 5) kann auch geometrisch abgeleitet werden. Ist $C$ ein beliebiger Punkt zwischen $AA'$, errichtet man in $C$ ein Loth, welches den über $AA'$ beschriebenen Halbkreis in $B$ trifft, legt in $B$ an denselben eine Tangente, welche die Axe in $D$ trifft, so soll geometrisch bewiesen werden, dass $C$ und $D$ in Bezug auf $A$ und $A'$ zwei harmonische Punkte sind.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ACB$ und $CBA'$ folgt nämlich

6) $$\frac{BA}{BA'} = \frac{CB}{CA'} = \frac{AC}{CB}$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ABC$ und $A'BD$ folgt

7) $$\frac{BA}{BA'} = \frac{DB}{DA'} = \frac{DA}{DB},$$

folglich aus 6)

$$\left(\frac{BA}{BA'}\right)^2 = \frac{AC}{CA'}, \text{ d. h. } \lambda^2 = \lambda_1$$

und aus 7)

$$\left(\frac{BA}{BA'}\right)^2 = \frac{AD}{DA'}, \text{ d. h. } \lambda^2 = \Lambda$$

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{AD}{DA'}, \text{ d. h. } \lambda_1 = \Lambda,$$

und unter Berücksichtigung der Vorzeichen, da $DA'$ den übrigen drei Strecken entgegengesetzt gerichtet ist,

$$\frac{AC'}{CA} = -\frac{AD}{A'D}.$$

## § 7. Harmonische Strahlen.

Die Gleichung § 3, 12)

1) $$\frac{i \sin i\vartheta \sin\psi - \sin\omega\cos\psi}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p \sin\psi}{e}$$

betrachte man als Gleichung einer im Abstande $p$ vom Nullpunkte die Axe schneidenden und im Winkel $\psi$ gegen dieselbe geneigten Geraden. Doch ist zu beachten, dass Alles, was hier von geraden Linien gilt, auch von den durch Rotation dieser Geraden um die Axe entstehenden Kegeln gilt. Schneidet eine zweite Gerade die Axe im Abstande $p_1$ vom Nullpunkte und ist sie im Winkel $\psi_1$ gegen dieselbe geneigt, so ist ihre Gleichung

2) $$\frac{i \sin i\vartheta \sin\psi_1 - \sin\omega\cos\psi_1}{\cos i\vartheta - \cos\omega} = \frac{p_1 \sin\psi_1}{e}.$$

Multiplicirt man nun 1) mit $m$, 2) mit $n$ und addirt, so ist die entstehende Gleichung wiederum die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden ersten hindurchgeht, die Axe in einem Abstande $p_2$ vom Nullpunkte schneidet und im Winkel $\psi_2$ gegen dieselbe geneigt ist, und zwar ist

3) $$tag\,\psi_2 = \frac{m \sin\psi + n \sin\psi_1}{m \cos\psi + n \cos\psi_1},$$

4) $$p_2 = \frac{mp \sin\psi + np_1 \sin\psi_1}{m \sin\psi + n \sin\psi_1}.$$

Der Quotient $\frac{m}{n}$ ist bekanntlich nichts Anderes, als das Verhältniss der Lothe, welche von einem Punkte der Geraden $\psi_2 = Const.$ auf die

beiden ersten Geraden gefällt sind. Ist endlich bei einer vierten Geraden ($\psi_3 = Const.$) das Verhältniss dieser Lothe $= \frac{-m}{n}$, so ist diese bekanntlich der in Bezug auf die Strahlen $\psi = Const.$ und $\psi_1 = Const.$ als Grundstrahlen auf den Strahl $\psi_2 = Const.$ bezogene vierte harmonische Strahl, und zwar ist, wenn letzterer die Axe im Abstande $p_3$ vom Nullpunkte schneidet und im Winkel $\psi_3$ gegen dieselbe geneigt ist,

5) $$tag\,\psi_3 = \frac{m \sin\psi - n \sin\psi_1}{m \cos\psi - n \cos\psi_1},$$

6) $$p_3 = \frac{m p \sin\psi - n p_1 \sin\psi_1}{m \sin\psi - n \sin\psi_1}.$$

Da die beiden letzten Strahlen sich nur darin von einander unterscheiden, dass das $n$ des ersten entgegengesetzt gleich dem $n$ des zweiten ist, so ergiebt sich die einfache Construction des vierten harmonischen Strahles. Man fälle von einem Punkte des dritten Strahles, zu dem der vierte harmonische gesucht wird, die beiden Lothe auf die Grundstrahlen, verlängere das eine über einen Strahl hinaus um sich selbst und ziehe durch den Endpunkt eine Parallele zu diesem Strahl. Zieht man ferner durch den Punkt des dritten Strahles, von welchem die beiden Lothe gefällt sind, eine Parallele zu dem andern Grundstrahl und verbindet den Schnittpunkt beider Parallelen mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der drei Strahlen, so ist dieser Strahl der vierte harmonische.

Wird $\psi = \pi$, $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, d. h. sind die beiden Grundstrahlen 1) die Axe und 2) eine auf der Axe im Mittelpunkte des Strahlenbüschels errichtete Senkrechte, so ist $tag\,\psi_2 = \frac{n}{m}$ und $tag\,\psi_3 = \frac{-n}{m}$, also $\psi_3 = \pi - \psi_2$, d. h.: Stehen die beiden Grundstrahlen aufeinander senkrecht und ist der dritte Strahl in einem Winkel $\alpha$ gegen einen derselben geneigt, so ist der vierte harmonische Strahl in einem Winkel $(-\alpha)$ gegen denselben Strahl geneigt.

Wird $p = p_1$, d. h. liegt der Schnittpunkt der beiden Grundstrahlen auf der Axe, so wird auch $p_3 = p_2 = p_1 = p$, d. h. der Mittelpunkt des Strahlenbüschels liegt auf der Axe. Fällt dieser ferner mit den Polen $A'$ oder $A$ zusammen, was für $p = \pm e$ der Fall ist, so hat man vier harmonische Strahlen in den Polen $A'$ oder $A$ als Mittelpunkt, welche in gewissen Winkeln $\psi$, $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ gegen die Axe geneigt sind. Construirt man jetzt zu jedem dieser Strahlen das zugehörige Conoid, d. h. construirt Conoide derart, dass die Tangenten in den Polen $A'$ oder $A$ an dieselben vier harmonische Strahlen bilden, sind ferner $\omega$ und $\omega_1$ die Parameter zweier solcher Conoide, welche den beiden Grundstrahlen entsprechen, und ist $\omega_2$ der Parameter eines dritten Conoids derart, dass das Verhältniss der Lothe von einem Punkte der Tangente dieses Conoids

auf die Tangenten der beiden anderen Conoide gefällt $=\frac{m}{n}$ ist, so ist nach 3)

$$7)\qquad tag\,\omega_2=\frac{m\sin\omega+n\sin\omega_1}{m\cos\omega+n\cos\omega_1}$$

und es bestimmt sich schliesslich der Parameter $\omega_3$ desjenigen Conoids, dessen Tangente in Bezug auf die des Conoids $\omega_2=Const.$ mit den Tangenten an die beiden ersten Conoide als Grundstrahlen den vierten harmonischen Strahl bildet, nach der Formel

$$8)\qquad tag\,\omega_3=\frac{m\sin\omega-n\sin\omega_1}{m\cos\omega-n\cos\omega_1}.$$

Wird hier $\omega=\pi$, $\omega_1=\frac{\pi}{2}$, so ist wieder $tag\,\omega_2=\frac{n}{m}$ und $tag\,\omega_2=\frac{-n}{m}$, d. h. $\omega_3=\pi-\omega_2$. Es ist aber in § 2 gezeigt worden, dass, wenn zwei Punkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden die $\omega$-Coordinaten $\omega$ und $\pi-\omega$ besitzen, sie in Bezug auf einen Kreis vom Radius $e$ conjugirt sind, und die Conoide, auf denen diese Punkte lagen, waren zwei in Bezug auf den Kreis conjugirte Conoide genannt worden. Da nun hier das eine Conoid $\omega=\frac{\pi}{2}$ der Kreis vom Radius $e$ ist, so erhält man den Satz:

Besitzen zwei Conoide die Eigenschaft, dass das Product aus den Strecken, welche sie auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden abschneiden, $=e^2$ ist, so bilden die Tangenten in den Polen an diese Conoide in Bezug auf die Axe und der in den Polen auf ihr errichteten Senkrechten als Grundstrahlen vier harmonische Strahlen;

oder kürzer:

Die Tangenten in den Polen an zwei in Bezug auf einen Kreis vom Radius $e$ conjugirte Conoiden bilden mit der Tangente an den Kreis und der Axe als Grundstrahlen vier harmonische Strahlen.

Da die Gleichung 1) dieses Paragraphen, von der wir ausgingen, nicht nur eine Gerade, sondern auch einen Kegel darstellt, so gelten die erhaltenen Resultate auch von den durch Rotation dieser Geraden um die Axe entstehenden Kegeln. Harmonische Kegel sind also solche, welche die Eigenschaft besitzen, dass beim Schnitt derselben durch eine beliebige Ebene $\varphi=Const.$ in letzterer vier harmonische Strahlen entstehen.

## § 8. Schlussbemerkungen.

Die hier abgeleiteten Relationen sind natürlich nicht die einzigen, welche sich auf die angewandte Weise unter Benutzung des Begriffes der Isogreene ableiten lassen. Ein näheres Eingehen auf diesen Punkt würde aber die Grenzen dieser Arbeit überschreiten. Bemerken will ich

noch, dass bei der Aufgabe, die dipolaren Coordinaten der Schnittpunkte zweier Gebilde zu berechnen, sich bemerkenswerthe Relationen ergeben, und ich will zum Schluss noch kurz die Coordinaten des Schnittpunktes einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden mit einer im Abstande $e$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Geraden ableiten.

Die Gleichungen dieser Gebilde sind nach § 1, 12) und § 5, 7)

$$1)\qquad i \sin i\vartheta \sin\psi - \sin\omega \cos\psi = 0,$$

$$2)\qquad \lambda^2 - 2\lambda[\sin\omega + \cos\omega] + 1 = 0.$$

Führt man auch in 1) für $\vartheta$ sein äquivalentes $\lambda$ ein, so ergiebt sich

$$3)\qquad \lambda^2 - 2\lambda \sin\omega \, ctg\,\psi - 1 = 0.$$

Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln dieser Gleichung, so folgt $\lambda_1 . \lambda_2 = -1$, wobei das Minuszeichen darauf hindeutet, dass die beiden Punkte der Geraden, welche zu gleichem $\omega$ gehören, auf verschiedenen Seiten der Axe liegen.

Die $\lambda$-Coordinate des Schnittpunktes der Gleichungen 2) und 3) muss beiden Gleichungen genügen, woraus unmittelbar folgt

$$4)\qquad tag\,\omega = 2\, tag^2\psi.$$

Bringt man ferner die beiden Gleichungen auf die Formen

$$2a)\qquad \lambda^2 - 2\lambda \cos\omega[1 + tag\,\omega] + 1 = 0,$$

$$3a)\qquad \lambda^2 - 2\lambda \cos\omega \, tag\,\omega \, ctg\,\psi - 1 = 0$$

und setzt für $tag\,\omega$ seinen Werth nach 4), so erhält man nach einigen kleineren Rechnungen

$$5)\qquad \lambda^2 = \frac{1 + 2\, tag^2\psi + 2\, tag\,\psi}{1 + 2\, tag^2\psi - 2\, tag\,\psi} = \frac{1 + \sin^2\psi + \sin 2\psi}{1 + \sin^2\psi - \sin 2\psi},$$

d. h. die $\omega$- und $\lambda$-Coordinate des Schnittpunktes beider genannten Geraden bestimmen sich nach den Formeln 4) und 5).

Auf ähnliche Weise ergeben sich die $\omega$- und $\lambda$-Coordinaten des Schnittpunktes einer durch den Pol $A$ gehenden und im Winkel $\psi$ gegen die Axe geneigten Geraden mit einer im Abstande $e$ von der Axe mit ihr parallel laufenden Geraden aus den Formeln

$$6)\qquad tag\,\omega = \frac{2\sin^2\psi}{1 - \sin 2\psi},$$

$$7)\qquad \lambda^2 = \frac{1}{1 - 2\sin 2\psi + 4\sin^2\psi}.$$

Durch analoge Verfahrungsweisen erhält man die Coordinaten der Schnittpunkte zweier beliebiger Gebilde.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

## XX. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner nebst einigen daraus fliessenden geometrischen Relationen.

Steiner hat bewiesen, dass zwei Tripel eines Kegelschnittes in einem Kegelschnitt enthalten sind, und Chasles, dass ein Paar von je drei Punkten eines Kegelschnittes stets als Tripel eines Kegelschnittes aufgefasst werden können. Der Zusammenhang dieser Sätze stellt sich in folgender einfachen Form dar:

Sind $x=0$, $y=0$, $z=0$ drei Gerade, deren gegenseitige Durchschnitte drei Punkte bestimmen, so ist jeder Kegelschnitt, welcher durch diese Punkte hindurchgeht, in der Form enthalten $xyl+yzm+zxn=0$. Führt dieser Kegelschnitt durch die Ecken eines Dreiecks, welches durch die Geraden $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ bestimmt ist, so muss er auch in der Form $\xi\eta L+\eta\zeta M+\zeta\xi N=0$ darstellbar sein. Es muss also die eine Form in die andere durch die lineare Substitution

$$x=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta,\quad y=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta,\quad z=\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3\zeta$$

transformirbar sein, und das erfordert

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 l+\alpha_2\alpha_3 m+\alpha_3\alpha_1 n&=0,\\ \beta_1\beta_2 l+\beta_2\beta_3 m+\beta_3\beta_1 n&=0,\\ \gamma_1\gamma_2 l+\gamma_2\gamma_3 m+\gamma_3\gamma_1 n&=0.\end{aligned}$$

Es ist demnach die Bedingung dafür, dass ein Paar von je drei Punkten in einem Kegelschnitt enthalten sei, ausdrückbar durch

$$\text{I)}\qquad \begin{vmatrix}\alpha_1\alpha_2, & \alpha_2\alpha_3, & \alpha_3\alpha_1\\ \beta_1\beta_2, & \beta_2\beta_3, & \beta_3\beta_1\\ \gamma_1\gamma_2, & \gamma_2\gamma_3, & \gamma_3\gamma_1\end{vmatrix}=0.$$

Sollen andererseits die durch $x=0$, $y=0$, $z=0$ beschriebenen Punkte Tripel eines Kegelschnittes sein, so muss derselbe sich in der Form darstellen $x^2a+y^2b+z^2c=0$. Bilden für diesen Kegelschnitt auch die Punkte, welche durch $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ ihrer Lage nach gegeben sind, ein Tripel, so muss dieser Kegelschnitt auch in der Form $\xi^2A+\eta^2B+\zeta^2C=0$ erscheinen können. Es muss demnach durch dieselbe lineare Substitution jener Form in diese überführbar sein, und das ist nur möglich, wenn folgende Gleichungen statthaben:

$$\alpha_1\beta_1 a + \alpha_2\beta_2 b + \alpha_3\beta_3 c = 0,$$
$$\beta_1\gamma_1 a + \beta_2\gamma_2 b + \beta_3\gamma_3 c = 0,$$
$$\gamma_1\alpha_1 a + \gamma_2\alpha_2 b + \gamma_3\alpha_3 c = 0.$$

Die Bedingung dafür also, dass ein Paar von je drei Punkten Tripel eines Kegelschnittes sind, spricht sich in der Gleichung aus

$$\text{II)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1, & \alpha_2\beta_2, & \alpha_3\beta_3 \\ \beta_1\gamma_1, & \beta_2\gamma_2, & \beta_3\gamma_3 \\ \gamma_1\alpha_1, & \gamma_2\alpha_2, & \gamma_3\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vergleicht man die Determinanten I) und II), so erkennt man sie sofort als identisch, sobald man aus jeder derselben die Factoren $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ $\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ heraushebt; denn jede derselben zerlegt sich in ein Product aus diesen Factoren und der Determinante

$$\text{III)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\alpha_3} \\ \frac{1}{\beta_1}, & \frac{1}{\beta_2}, & \frac{1}{\beta_3} \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \frac{1}{\gamma_2}, & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix}.$$

Die Bedingung dafür, dass ein Paar von je drei Punkten Tripel eines Kegelschnittes sind, ist also identisch mit der Bedingung, dass ein Paar von je drei Punkten in einem und demselben Kegelschnitt enthalten ist. Ist jene erfüllt, so ist auch diese erfüllt, und umgekehrt, findet diese statt, so gilt auch jene; der eine Gedanke drückt den Satz von Steiner aus, der andere den von Chasles.

Ist die Determinante III) gleich Null, so ist $a:b:c$ eindeutig durch die Substitutionscoefficienten ausdrückbar, d. h. ein Paar von je drei Punkten auf einem Kegelschnitte $S$ bestimmt eindeutig denjenigen Kegelschnitt $K$, für welchen jenes Paar von je drei Punkten ein Tripelpaar ist. Zu jedem Punkte $p$ auf $S$ ordnet der Kegelschnitt $K$ eine reciproke Polare $P$ zu, welche $S$ in $q$ und $r$ schneiden möge. Dem Punkte $q$ entspricht als reciproke Polare in Bezug auf $K$ die Gerade $Q$, diese geht durch $p$ und schneidet $P$ in $r_1$, so dass $p$, $q$, $r_1$ ein Tripel für $K$ bilden. Diese drei Punkte müssen also mit einem der obigen constituirenden Tripel in einem Kegelschnitte liegen; da dieser aber mit $S$ fünf Punkte gemein hat, nämlich die Punkte eines Tripels nebst $p$ und $q$, so muss auch $r_1$ in $S$ gelegen sein, d. h. es muss $r_1$ mit $r$ zusammenfallen. Wenn demnach auf einem Kegelschnitte $S$ zweimal je drei Punkte willkürlich angenommen worden sind, so lassen sich vermittelst $K$ die Punkte von $S$ in eindeutiger Weise zu je drei Punkten so ordnen, dass je ein Glied des Dreipunktsystems ein Tripel für $K$ ist.

Polarisirt man dieses Tripelsystem auf $K$, so geht jeder Punkt eines Tripels in die ihm gegenüberliegende Tripelgerade über, es transformirt

sich also jedes Tripel in sich selbst, und man erkennt, dass jedes Tripel einem Kegelschnitt $S'$ umgeschrieben ist, wo $S'$ das polarische Gebilde von $S$ bedeutet.

In engem Zusammenhange hiermit steht ein Satz von Poncelet. Wenn nämlich $p$, $q$, $r$ ein Dreieck bestimmen, welches $S$ eingeschrieben und $S'$ umgeschrieben ist, so lassen sich von einem beliebigen Punkte $p_1$ des Kegelschnittes $S$ zwei Tangenten an $S'$ ziehen, welche $S$ in $q_1$ und $r_1$ schneiden; die drei Punkte $p_1$, $q_1$, $r_1$ aber geben mit $p$, $q$, $r$ zusammen Veranlassung zu einem Kegelschnitte $K$, für den sie Tripel sind. Diese Tripel sind nach Obigem einem Kegelschnitt umgeschrieben, und da derselbe mit $S'$ fünf Tangenten gemein hat, so ist er mit $S'$ identisch; also ist auch das Dreieck $p_1$, $q_1$, $r_1$ dem Kegelschnitt $S'$ umgeschrieben. Der Poncelet'sche Satz, welcher hiermit begründet ist, lässt sich demnach mit folgendem Zusatz aussprechen:

Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem zweiten Kegelschnitte umgeschrieben, so lässt sich von jedem Punkte des ersten aus ein Dreieck dem einen ein- und dem andern umzeichnen, und alle diese Dreiecke sind Tripel eines und desselben dritten Kegelschnittes.

Polarisirt man die Schaar der Tripel, welche auf $S$ gelegen sind, auf $S$ selber, so entsteht eine Schaar Dreiecke, welche einem Kegelschnitte $S''$ eingezeichnet sind. Mit Hilfe dieses Kegelschnittes $S''$ kann man zu einem beliebigen Punkte $a$ des Kegelschnittes $S$ die beiden Punkte $b$ und $c$, welche mit $a$ ein Tripel ausmachen, wie folgt, bestimmen. Man lege in $a$ an $S$ die Tangente $A$, diese schneidet $S''$ in zwei Punkten, und von diesen laufen ausser $A$ noch zwei Tangenten $B$ und $C$ an $S$; diese berühren $S$ in den gesuchten Punkten $b$ und $c$. Nimmt man im Besondern $a$ in einem Grundpunkte von $S$ und $S''$ an, so überzeugt man sich leicht, dass einer der beiden Punkte $b$, $c$ mit $a$ zusammenfällt, d. h. die Polare von $a$ in Bezug auf $K$ geht durch $a$ selber, oder $a$ ist auf $K$ gelegen. Der Kegelschnitt $K$ geht demnach durch die vier Grundpunkte des Büschels, was durch $S$ und $S''$ bestimmt wird. Von dieser Eigenschaft soll noch für räumliche Gebilde eine Anwendung gemacht werden.

Das System der conjugirten Durchmesser einer Fläche zweiten Grades bildet auf der unendlich entfernten Ebene ein Tripelsystem; für dieses ist der Kegelschnitt Grundkegelschnitt, in welchem der Asymptotenkegel jene Ebene trifft. Es liegen demnach sowohl ein Paar von je drei conjugirten Durchmessern in einem Kegel zweiten Grades, als auch kann ein beliebiges Paar von je drei Erzeugenden einer solchen Kegelfläche als ein Paar conjugirter Durchmesser einer Fläche zweiten Grades angesehen werden. Das System der conjugirten Durchmesser ist mit dieser

Wahl eindeutig bestimmt, die Flächen zweiten Grades aber, denen dieses System angehört, sind unter sich ähnlich und ähnlich gelegen.

Liegen im Besondern in einer Kegelfläche zweiten Grades drei Normalstrahlen, so lässt sich um die Spitze des Kegels eine Kugel legen, und für diese sind jene Normalstrahlen conjugirte Durchmesser. Diese Kugel schneidet die unendlich entfernte Ebene in dem imaginären Kugelkreise, und dieser ordnet auf dem Kegelschnitte, in welchem die Kegelfläche jene Ebene durchsetzt, die Punkte zu je dreien derartig an, dass je drei derselben Tripel für den imaginären Kugelkreis bilden. Die Strahlen nach den drei Punkten eines Tripels sind conjugirte Durchmesser der Kugel, stehen also senkrecht auf einander. Liegen also drei Normalstrahlen in einer Kegelfläche zweiten Grades, so giebt es eine ganze Schaar von Normalstrahlen in dieser Kegelfläche.

An diese Relationen musste zuvor erinnert werden, um eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids zu beleuchten, welche mit obigen Betrachtungen eng verknüpft ist.

Drei Erzeugende einer Schaar eines solchen Hyperboloids $G_1$, $G_2$, $G_3$ bestimmen drei windschiefe Gegenkanten eines Parallelopipedons, dessen Ebenen Tangentialebenen der Fläche sind. Denn eine Ebene, welche eine Gerade in sich enthält und parallel der zweiten läuft, schneidet die dritte, und die Gerade, welche durch diesen Schnittpunkt parallel der zweiten läuft, liegt ganz in dem Hyperboloid, da sie drei Punkte mit ihm gemein hat; man gewinnt also drei neue Gerade $G'_1$, $G'_2$, $G'_3$, welche bezüglich mit $G_1$, $G_2$, $G_3$ parallel laufen. Diese bestimmen ein Sechseck, welches dem Hyperboloid aufgezeichnet ist; je zwei aufeinander folgende Kanten dieses Sechsecks bestimmen aber jene sechs Tangentialebenen, welche das Parallelopipedon begrenzen. Ein solches Parallelopipedon kann als dem Hyperboloid umgeschrieben bezeichnet werden.

Die Ebene durch zwei parallele Gegenkanten desselben ist eine Tangentialebene des Hyperboloids in einem Punkte der unendlich entfernten Ebene, berührt also den Asymptotenkegel längs einer Geraden, welche mit den Gegenkanten parallel läuft, und umgekehrt schneidet jede Tangentialebene des Asymptotenkegels aus dem Hyperboloid zwei parallele Gerade aus. Jedes dem Hyperboloid in obigem Sinne umgeschriebene Parallelopipedon giebt also Veranlassung zu drei Kanten des Asymptotenkegels $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, und umgekehrt bestimmen je drei Kanten dieses Kegels ein solches Parallelopipedon, welches dem Hyperboloid umgeschrieben ist.

Die Berührungsebenen längs jener Kanten $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ schneiden sich in drei neuen Geraden $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, und diese sind die Diagonalen der sechs diametralen Ecken des Parallelopipedons, welche auf dem Hyperboloid gelegen sind.

Vergleicht man nun irgend zwei Parallelopipeda, welche dem Hyperboloid in obigem Sinne umgeschrieben sind, so entsprechen diesen ein Paar von je drei Strahlen in der Fläche des Asymptotenkegels, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ und $\Gamma'_1$, $\Gamma'_2$, $\Gamma'_3$, diese geben aber wieder Veranlassung zu den beiden Dreikanten $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ und $\gamma'_1$, $\gamma'_2$, $\gamma'_3$, welche mit ihren Seitenflächen den Asymptotenkegel berühren.

Die Geraden $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ liegen nach Obigem in einem Kegel zweiten Grades, welcher die unendlich entfernte Ebene in einem Kegelschnitt $S''$ schneidet. Dieser Kegel zweiten Grades bestimmt mit dem Hyperboloid eine Raumcurve vierten Grades, und diese Raumcurve vierten Grades durchsticht die unendlich ferne Ebene in den vier Punkten, in welchen der vom Asymptotenkegelschnitt bestimmte Kegelschnitt $S$ von $S''$ getroffen wird. Alle Flächen zweiten Grades, welche durch jene Raumcurve gehen, sind mit dem Hyperboloid concentrisch; denn eine der hindurchgehenden Kegelflächen hat ihre Spitze im Centrum, dieses aber und die unendlich ferne Ebene müssen in Bezug auf jede Fläche der Schaar Pol und Polare bilden. Die Flächenschaar schneidet die unendlich entfernte Ebene in Kegelschnitten des Büschels, welches durch die Grundpunkte von $S$ und $S''$ bestimmt wird, und umgekehrt bestimmt ein jeder Kegelschnitt dieses Büschels eine concentrische Fläche zweiten Grades, welche durch jene Raumcurve geht.

Unter diesen Kegelschnitten giebt es aber nach obigen Entwickelungen einen Kegelschnitt $K$, für welchen die Schnittpunkte von $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ und $\Gamma'_1$, $\Gamma'_2$, $\Gamma'_3$ mit der unendlich fernen Ebene Tripel bilden; die Richtungen dieser Geraden sind demnach als conjugirte Richtungen des Gliedes der Flächenschaar aufzufassen, welches durch $K$ bestimmt wird. Die Kanten der beiden Parallelopipeda haben also conjugirte Richtung für diese Fläche, und da diese Fläche bereits sechs Ecken von jedem Parallelopipedon in sich enthält, so ist dies nur möglich, wenn auch die übrigen Ecken in dieser Fläche $F$ enthalten sind.

Da der Kegelschnitt $K$ die Punkte des Kegelschnittes $S$ in Tripel ordnet, so gruppirt diese Fläche $F$ die Geraden einer Schaar des Hyperboloids derart, dass je drei für $F$ conjugirte Richtungen bilden, also das ihnen entsprechende Parallelopipedon der Fläche $F$ eingeschrieben ist. Man erkennt also einen Satz, der mit jenem oben ausgesprochenen Poncelet'schen eine gewisse Analogie bietet und so lautet:

Ein Paar von je drei Geraden einer Regelschaar des Hyperboloids bestimmt in eindeutiger Form die Gruppirung der Geraden dieser Schaar zu je dreien derart, dass jede Gruppe von je dreien mit den drei ihnen parallelen der andern Schaar ein Parallelopipedon ergiebt, welches dem Hyperboloid umgeschrieben und zugleich einer mit ihm concentrischen Fläche zweiten Grades eingeschrieben ist.

Ist das Hyperboloid gleichseitig, d. h. sind drei Erzeugende derselben Schaar senkrecht gegen einander gerichtet, so giebt es obigen Entwickelungen gemäss eine ganze Schaar derartiger Geraden. Zwei Gruppen derselben bestimmen zwei senkrechte Parallelopipeda, die Fläche $F$ aber hat in diesem Falle ein Paar von je drei Normalstrahlen zu conjugirten Durchmessern, ist also eine Kugel. Jede Gruppe von drei Normalstrahlen einer Regelschaar des gleichseitigen Hyperboloids bestimmt also senkrechte Parallelopipeda, die einer Kugel eingeschrieben sind.

Dieser Satz vom gleichseitigen Hyperboloid ist zuerst von Herrn A. Voigt im 86. Bande des Crelle'schen Journals synthetisch entwickelt worden, ich selbst habe ihn im 16. Bande dieser Zeitschrift aus einfachen analytischen Formen hervorgehen lassen, und Herr G. Bauer hat in den Berichten der Münchener Akademie vom 5. Juni 1880 zuerst die generellere Beziehung zwischen den Geraden eines beliebigen Hyperboloids durch eine affine Transformation gegeben und zugleich dargethan, dass zwei Parallelopipeda, welche irgend je drei Gerade eines Hyperboloids bestimmen, gleich an Volumen sind. Auf diese Eigenthümlichkeit soll hier nicht weiter eingegangen werden; es war nur von Interesse, die allgemeine Relation als einen Ausfluss der Sätze von Chasles und Steiner zu kennzeichnen.

Ad. Schumann.

---

## XXI. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes.

Bildet man aus je vier von fünf Punkten des Raumes ein Tetraeder und bestimmt den Potenzwerth des fünften gegen die diesem Tetraeder umgeschriebene Kugel, so hat das Product aus dieser Potenz und dem Volumen des Tetraeders denselben absoluten Zahlenwerth, wie man auch die fünf Punkte zu vieren combiniren mag.

Stellt man die Gleichung einer Kugel durch vier Punkte des Raumes in Form der Determinante dar

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so lässt sich diese Determinante für jeden Punkt $(x, y, z)$ des Raumes in ein Product von zwei Factoren zerlegen, von denen der eine das sechsfache Volumen des Tetraeders aus den Punkten 1, 2, 3, 4 darstellt, der andere aber als die Potenz des Punktes $(x, y, z)$ gegen die diesem Tetraeder umgeschriebene Kugel gedeutet werden kann. Bezeichnet man

das Volumen des Tetraeders mit $V_{1,2,3,4}$, die Potenz des fünften aber gegen die dem Tetraeder umgezeichnete Kugel mit $P_5$, so ist

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2, & x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} = 6 . V_{1,2,3,4} . P_5 .$$

Da nun die Determinante durch eine Vertauschung der Indices ihren absoluten Werth nicht ändert, so bewahrt auch das Product $V_{1,2,3,4} . P_5$ denselben absoluten Werth, wie man auch die fünf Indices permutiren möge. Damit ist die obige Relation begründet.

Berlin. AD. SCHUMANN.

---

## XXII. Ueber die Krümmung der Flächen.

Es sollen im Folgenden die Beziehungen zwischen den Flächen zweiten Grades untersucht werden, welche mit irgend einer Fläche $F$ in einem beliebigen Punkte $S$ derselben von gleichartiger Krümmung eine Berührung erster oder zweiter Ordnung haben. Zu diesem Zwecke denke man sich ein System von confocalen Flächen, $(\lambda)$, $(\mu)$, $(\nu)$, welche durch die Gleichungen

$$1)\qquad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-\beta}+\frac{z^2}{\lambda-\gamma}=1, \quad \lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu$$

repräsentirt sind. $(\lambda)$ ist das Ellipsoid, $(\mu)$ das einmantlige, $(\nu)$ das zweimantlige Hyperboloid. Diese drei Flächen schneiden sich in einem Punkte $S$; ihre drei Normalen bilden ein zweites Coordinatensystem, auf welches der Kegel

$$2)\qquad \frac{\xi^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\eta^2}{\mu-\lambda'}+\frac{\zeta^2}{\nu-\lambda'}=0$$

bezogen ist. Die $\xi$-, $\eta$-, $\zeta$-Axen sind der Reihe nach die Normalen von $(\lambda)$, $(\mu)$, $(\nu)$, und $(\lambda')$ ist eine weitere confocale Fläche, welche der Kegel 2) berührt. In dem speciellen Falle, wenn $\lambda'=\gamma$ ist, reducirt sich diese Fläche zur Focalellipse, und der Kegel 2) hat die Gleichung

$$3)\qquad \frac{\xi^2}{\lambda-\gamma}+\frac{\eta^2}{\mu-\gamma}+\frac{\zeta^2}{\nu-\gamma}=0.$$

$2\omega$, $2\omega'$, $2\omega''$ seien die Winkel dieses Kegels in den Axenebenen $\eta\xi$, $\xi\zeta$, $\zeta\eta$, so ist

$$4)\qquad \cos\omega=\sqrt{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\mu}};\quad \cos\omega'=\sqrt{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\nu}},\quad \cos\omega''=i\sqrt{\frac{\gamma-\nu}{\mu-\nu}}.$$

$2\varphi$, $2\varphi'$, $2\varphi''$ sind die Winkel der (reellen oder imaginären) Focallinien der Kegel 2) oder 3):

$$5)\qquad \cos\varphi = i\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu}},\quad \cos\varphi' = \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}},\quad \cos\varphi'' = \sqrt{\frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu}}.$$

Da in diesen Werthen $\lambda'$ nicht vorkommt, so sind die Kegel confocal.

Bezeichnet man die Hauptkrümmungshalbmesser von $(\lambda)$ mit $L$ und $L'$, von $(\mu)$ mit $M$ und $M'$ und von $(\nu)$ mit $N$ und $N'$, so ist

$$6)\qquad L = \frac{1}{\pi}(\lambda-\mu)^{3/2}(\lambda-\nu)^{1/2},\quad L' = \frac{1}{\pi}(\lambda-\mu)^{1/2}(\lambda-\nu)^{3/2},$$

$$7)\qquad M = \frac{1}{\pi'}(\lambda-\mu)^{1/2}(\mu-\nu)^{3/2},\quad M' = -\frac{1}{\pi'}(\lambda-\mu)^{3/2}(\mu-\nu)^{1/2},$$

$$8)\qquad N = \frac{1}{\pi''}(\lambda-\nu)^{3/2}(\mu-\nu)^{1/2},\quad N' = \frac{1}{\pi''}(\lambda-\nu)^{1/2}(\mu-\nu)^{3/2},$$

$$\pi = \sqrt{\lambda(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)},\quad \pi' = \sqrt{\mu(\mu-\beta)(\gamma-\mu)},\quad \pi'' = \sqrt{\nu(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}.$$

Sind endlich $p, p', p''$ die Abstände des Mittelpunktes von den drei Tangentialebenen in $S$, so ist

$$9)\qquad p = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\lambda-\nu}},$$

$$10)\qquad p' = \frac{\pi'}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\mu-\nu}},$$

$$11)\qquad p'' = \frac{\pi''}{\sqrt{\lambda-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}.$$

Die $\xi$-Axe oder die Normale des Ellipsoids $(\lambda)$ schneide die Hauptebene $xy$ in $Q$, so ist

$$SQ = \frac{\lambda-\gamma}{p},\ \text{also}\ \frac{SQ}{\cos^2\omega} = \frac{\lambda-\mu}{p}$$

oder

$$12)\qquad \frac{SQ}{\cos\omega^2} = L,\quad \frac{SQ}{\cos^2\omega'} = L',$$

$$\frac{L}{L'} = \frac{\cos^2\omega'}{\cos^2\omega} = \cos^2\varphi'$$

und analog

$$13)\qquad \cos^2\varphi = \frac{M}{M'},\quad \cos^2\varphi' = \frac{L}{L'},\quad \cos^2\varphi'' = \frac{N}{N'}.$$

Ist einer von den drei Winkeln $\varphi, \varphi', \varphi''$ gegeben, so sind damit auch die zwei anderen bestimmt, wie man sich leicht aus den Gleichungen 5) überzeugt; ein System von confocalen Kegeln ist also durch Ein (reelles oder imaginäres) Paar von Focallinien gegeben. Aus 13) folgt ferner, dass, wenn eines der drei Verhältnisse $\frac{L}{L'}, \frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}$ bekannt ist, dann es auch die zwei anderen sind.

Irgend eine Fläche zweiten Grades $A$ berühre eine beliebige Fläche $F$ in einem Punkte $S$, so wird die Normale $SQ$ von $F$ eine Axe der beiden (confocalen) Kegel sein, deren Spitze $S$ und deren Basis eine der Focal-

curven von $A$ ist. Die beiden anderen Axen dieser Kegel liegen in der Tangentialebene von $F$ oder $A$. Kommt nun noch die weitere Bedingung hinzu, dass die Krümmungslinien von $F$ diejenigen von $A$ im Punkte $S$ berühren sollen, so sind auch die zwei anderen Axen der Kegel bestimmt, als Tangenten der Krümmungslinien von $F$. Hieraus folgt:

Die Focalcurven aller Flächen $A$, welche $F$ in einem Punkte $S$ berühren, liegen auf Kegeln, deren gemeinschaftliche Axe die Normale von $F$ ist. Berühren sich ausserdem die Krümmungslinien von $A$ und $F$, so liegen die Focalcurven von $A$ auf coaxialen Kegeln (welche drei Axen gemein haben).

Bei einer Berührung erster Ordnung findet zwischen den Krümmungshalbmessern $L_0$ und $L'_0$ von $F$ und den entsprechenden $L$ und $L'$ von $A$ keine Relation statt. Setzt man aber

14) $$\frac{L_0}{L'_0} = \frac{L}{L'} = cos^2 \varphi',$$

so werden die coaxialen Kegel zugleich confocal, d. h.:

Sämmtliche Flächen zweiten Grades $A$, welche mit einer beliebigen Fläche $F$ in einem Punkte $S$ eine Berührung zweiter Ordnung haben, insofern als die Verhältnisse der Hauptkrümmungshalbmesser von $A$ und $F$ gleich sind, sind dadurch charakterisirt, dass ihre Focalcurven auf einem System von confocalen Kegeln liegen.

Wenn also in irgend einem Punkte $S$ einer Fläche $F$ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $L_0$ und $L'_0$ gegeben sind, so construire man nach 14) die Focallinien und wähle irgend einen der durch dieselben bestimmten Kegel aus, schneide ihn durch eine beliebige Ebene, betrachte die Schnittcurve als Focale einer Fläche $A$, welche durch $S$ geht, so wird $A$ in diesem Punkte $F$ berühren und die Verhältnisse der Hauptkrümmungshalbmesser von $A$ und $F$ werden einander gleich sein. Ist die Schnittlinie ein Kreis, so ist $A$ eine Rotationsfläche, ist $S$ ein Kreispunkt von $F$, so werden die confocalen Kegel Drehungskegel.

Da sowohl der Kegel, auf dem die Focalcurve liegt, als auch ihre Ebene ganz beliebig sind, so erhält man für einen Punkt $S$ auf $F$ unendlich viele Berührungsflächen $A$, unter welchen diejenigen, deren Hauptkrümmungshalbmesser gleich $L_0$ und $L'_0$ sind (also nicht blos dem Verhältnisse $\frac{L_0}{L'_0}$ genügen), durch die Gleichungen 12) bestimmt werden. Ist nämlich $\frac{SQ}{cos^2 \omega} = L_0$ und $\frac{SQ}{cos^2 \omega'} = L'_0$, so sind, wenn der Punkt $Q$ auf der Normale von $F$ gegeben, auch $\omega$ und $\omega'$, d. h. der Kegel, auf dem die Focale liegt, bestimmt, und umgekehrt:

Gehen die Ebenen der Focalcurven von den Flächen zweiten Grades, welche mit einer Fläche in einem Punkte

eine Berührung zweiter Ordnung haben, durch einen Punkt der Normale, so liegen sie zugleich auf einem Kegel, und umgekehrt. Jedem Punkte $Q$ entspricht also ein ihm conjugirter Kegel.

$l$ und $l'$ seien die Krümmungsmittelpunkte von $F$, also $Sl = L_0$ und $SL' = L'_0$, $L'_0 > L_0$. Man beschreibe über $Sl$ und $Sl'$ als Durchmesser zwei Kreise in den Ebenen der Hauptschnitte $\eta\xi$ und $\xi\zeta$, lege durch $Q$ eine Ebene senkrecht zu $SQ$, so bestimmen ihre Durchschnitte mit den Kreisen die Hauptschnitte des conjugirten Kegels; fällt $Q$ auf $l$, so reducirt sich der conjugirte Kegel auf die beiden Focallinien, die Focalcurven degeneriren in Linien, welche durch $l$ bis zum Durchschnitt mit den Focallinien gezogen werden; diese Durchschnitte sind die Brennpunkte von Rotationsflächen, in welche die Flächen $A$ übergehen, die also durch Drehung eins Kegelschnittes um diejenige Axe, welche die Brennpunkte enthält, entstanden sind:

Durch jeden Punkt (von gleichartiger Krümmung) einer beliebigen Fläche gehen zwei Gerade, welche nach 14) construirt werden, auf welchen die Brennpunkte aller Rotationsflächen liegen, die mit der Fläche eine Berührung zweiter Ordnung haben; diese Rotationsflächen sind durch Drehung eines Kegelschnittes um die Axe der Brennpunkte entstanden. Ihre Axen gehen durch den Mittelpunkt des kleineren Hauptkrümmungskreises der Fläche.

Zu diesen Rotationsflächen gehören zwei gleiche Paraboloide, die übrigen sind Ellipsoide und zweimantlige Hyperboloide.

Dieser Satz lässt sich auch direct beweisen: Zieht man durch $l$ eine beliebige Gerade, welche die Focallinien in $f$ und $f'$ schneidet, betrachtet diese Punkte als Brennpunkte einer Ellipse, welche durch $S$ geht, so wird sie $F$ berühren. Ihr Krümmungshalbmesser in $S$ ist $Sl'$; dreht man die Ellipse um ihre grosse Axe, so beschreibt sie ein Rotationsellipsoid, welches $F$ in $S$ in zweiter Ordnung berührt; denn wenn man von $S$ auf die grosse Axe ein Perpendikel fällt, so ist dieses der Halbmesser eines Parallelkreises und somit nach dem Satze von Meunier $Sl$ der andere Hauptkrümmungshalbmesser. Ist die durch $l$ gezogene Linie parallel mit einer Focallinie, so entsteht ein Drehungsparaboloid, und wenn sie die Verlängerung einer Focallinie trifft, ein Drehungshyperboloid.

Die centrischen Flächen zweiten Grades, welche mit einer Fläche $F$ in einem Punkte von gleichartiger Krümmung eine Berührung zweiter Ordnung haben können, sind entweder Ellipsoide oder zweimantlige Hyperboloide; beschränken wir uns zunächst auf den ersten Fall.

Die Normale eines Punktes $S$ des Ellipsoids ($\lambda$) 1) schneide die $xy$-Ebene in $Q$, die $xz$-Ebene in $Q'$ und die $yz$-Ebene in $Q''$, so ist

$$SQ=\frac{\lambda-\gamma}{p},\quad SQ'=\frac{\lambda-\beta}{p},\quad SQ''=\frac{\lambda}{p}.$$

Durch Verbindung mit 6) und 9) erhält man folgende Ungleichungen:

$$L'>L>SQ,\quad L'>SQ'>L,\quad SQ''>L'>L.$$

Die drei Focalcurven von ($\lambda$) sind

$$15)\ \frac{x^2}{\gamma}+\frac{y^2}{\gamma-\beta}=1,\qquad 16)\ \frac{x^2}{\beta}-\frac{z^2}{\gamma-\beta}=1,\qquad 17)\ \frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=-1.$$

Die Ellipse liegt also in der $xy$-, die Hyperbel in der $xz$- und die imaginäre Ellipse in der $yz$-Ebene. Hat nun ($\lambda$) mit $F$ in $S$ eine Berührung zweiter Ordnung, so müssen die drei Axenebenen von ($\lambda$) die Normale von $F$ so schneiden, dass der erste Durchschnitt $Q$ zwischen $S$ und $l$, der zweite $Q'$ zwischen $l$ und $l'$ und der dritte $Q''$ zwischen $l'$ und $\infty$ liegt.

**Berührt ein Ellipsoid eine Fläche in zweiter Ordnung, so schneidet die Ebene der Focalellipse die Normale zwischen dem Berührungspunkte und dem Mittelpunkte des kleineren Hauptkrümmungskreises, die Ebene der Focalhyperbel schneidet zwischen beiden Mittelpunkten und diejenige der imaginären Ellipse jenseits vom Mittelpunkte des grösseren Hauptkrümmungskreises. Die Focalellipsen liegen auf Kegeln, welche die Focallinien des Berührungspunktes einschliessen, die Focalhyperbeln auf Kegeln, welche sie trennen.**

Geht die Ebene der Focalcurve durch $l'$, so wird letztere ein beide Focallinien berührender Kreis und das Ellipsoid ein abgeplattetes Drehungsellipsoid, dessen Meridian der grössere Hauptkrümmungskreis von $F$ ist. Die übrigen abgeplatteten Drehungsellipsoide, welche $F$ in zweiter Ordnung berühren, haben zu Focalcurven diejenigen Kreisschnitte der Kegel des ersten Systems, welche zwischen $S$ und $l$ hindurchgehen. Durch diese Sätze ist die Reihe sämmtlicher Ellipsoide, sowohl der dreiaxigen als der Rotationsellipsoide, welche mit $F$ eine Berührung zweiter Ordnung haben können, erschöpft.

Durch den Punkt $S$ auf ($\lambda$) geht ferner ein zweimantliges Hyperboloid ($\nu$), auf der Normale desselben liegen die beiden Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$, also ist $S\mathfrak{n}=N$, $S\mathfrak{n}'=N'$, $N>N'$. Diese Normale schneide die $xy$-Ebene in $R$, die $xz$ in $R'$ und die $yz$ in $R''$, so ist

$$SR=\frac{\gamma-\nu}{p''},\quad SR'=\frac{\beta-\nu}{p''},\quad SR''=\frac{\nu}{p''}.$$

Durch Verbindung mit 8) und 11) erhält man folgende Ungleichungen:

$$N>SR>N'>SR'.$$

Der dritte Punkt $R''$ ist unbestimmt. Die Focalcurven von ($\lambda$) sind zugleich diejenigen von ($\nu$). Denkt man sich nun eine Fläche $F$ in der Lage, dass sie ($\nu$) im Punkte $S$ berührt, und seien $N$ und $N'$ zugleich

die Hauptkrümmungshalbmesser von $F$, so gilt der letzte Satz auch dann, wenn man statt Ellipsoid zweimantliges Hyperboloid setzt und die Wörter Focalellipse und Focalhyperbel vertauscht; für den Durchschnitt der Ebene der imaginären Focalellipse lässt sich keine bestimmte Regel angeben.

Wenn man ferner in den Gleichungen 4) $\gamma$ durch $\beta$ ersetzt, um die Durchschnitte der confocalen Kegel vom zweiten System mit den Ebenen $\eta\xi$, $\xi\zeta$ und $\zeta\eta$ zu erhalten, so findet man nach 8) und 11)

$$\frac{SR'}{\sin^2\omega'} = N, \qquad \frac{SR'}{\cos^2\omega'} = N'.$$

Beschreibt man also über $S\mathfrak{n}$ und $S\mathfrak{n}'$ als Durchmesser Kreise in der $\xi\zeta$- und $\eta\zeta$-Ebene, legt durch $R'$ eine Ebene senkrecht zu $SR'$, so bestimmen ihre Durchschnitte mit den Kreisen die Hauptschnitte des dem Punkte $R'$ conjugirten Kegels; irgend ein hyperbolischer Schnitt desselben, dessen Ebene durch $R'$ geht, giebt eine Focalhyperbel, durch welche ein System von Confocalen ($\lambda$), ($\mu$), ($\nu$) bestimmt ist. Das zweimantlige Hyperboloid ($\nu$), welches durch $S$ geht, berührt $F$ in zweiter Ordnung; die dazu gehörige Focalellipse, deren Ebene zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ schneidet, liegt auf einem Kegel des ersten Systems.

Aus dem Bisherigen erhellt, dass es für jeden Punkt von gleichartiger Krümmung einer Fläche zwei Gerade giebt, welche man die Focallinien des Punktes nennen kann und die für die Theorie der Krümmung der Flächen insofern von Bedeutung sind, als sie die Brennpunkte der osculirenden Rotationsflächen enthalten und die Schaar der confocalen Kegel bestimmen, auf welchen die Focalcurven aller osculirenden Flächen zweiten Grades liegen. Man construirt diese Linien, indem man im grösseren Hauptkrümmungskreise zwei Sehnen zieht, deren Projection auf der Normale der kleinere Hauptkrümmungshalbmesser ist. Das Quadrat dieser Sehnen ist also gleich dem reciproken Werthe des Krümmungsmaasses. Sie werden in ihren Endpunkten von einer der beiden reellen Focalcurven, Ellipse oder Hyperbel, derjenigen osculirenden Ellipsoide berührt, deren Hauptschnitte mit den Ebenen der zwei Hauptkrümmungskreise zusammenfallen.

Reutlingen. Dr. O. Böklen.

---

### XXIII. Ueber eine Transformation der Differentialgleichung

$$1)\qquad \varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0.$$

Es ist bekannt, dass vorliegende Gleichung durch die Substitution

$$y = \frac{\varphi_0}{\varphi_1} z$$

übergeht in

$$\varphi_0^2 f_0\left(\frac{dz}{dx}+z^2\right)+\varphi_0 f_1 z+f_2=0,$$

wobei die $f$ ganze algebraische Functionen in $x$ sind, falls die $\varphi$ als solche vorausgesetzt werden, und dass endlich diese Gleichung für

$$z=\frac{\frac{dv}{dx}}{v},\quad \text{mithin}\quad \frac{dz}{dx}+z^2=\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{v}$$

auf folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$2)\qquad \varphi_0^2 f_0\frac{d^2v}{dx^2}+\varphi_0 f_1\frac{dv}{dx}+f_2 v=0$$

zurückkommt.

Man kann nun die letzte Gleichung im Allgemeinen stets so transformiren, dass ihre linke Seite den Factor $\varphi_0(x)$ ausscheiden lässt und sonach der Grad der Coefficienten bezüglich $x$ um den Grad von $\varphi_0$ niedriger wird. Setzt man $\varphi_0$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade in der Form

$$\varphi_0=c(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_n)$$

voraus, so fordert diese Transformation nur noch die Auflösung einer quadratischen Gleichung und die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

Um dies darzuthun, führe man in 2) die Substitution

$$v=w\,e^{\int\frac{G\,dx}{\varphi_0}}$$

ein, in welcher $G$ eine Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades

$$G=g_0+g_1x+g_2x^2+\dots+g_{n-1}x^{n-1}$$

mit noch zu bestimmenden Coefficienten bedeutet. Man erhält

$$3)\quad \varphi_0^2 f_0\frac{d^2w}{dx^2}+\varphi_0.\{2f_0G+f_1\}\frac{dw}{dx}+\{\varphi_0 f_0 G'+f_0G^2+(f_1-\varphi'_0 f_0)G+f_2\}w=0.$$

Nun versuche man, die $n$ Grössen $g_0$ bis $g_{n-1}$ so zu bestimmen, dass der Coefficient von $w$ in der letzten Gleichung die Gestalt $\varphi_0 F$ erlangt, unter $F$ eine ganze Function in $x$ verstanden — oder mit anderen Worten, man verlange, dass der betreffende Coefficient für alle Werthe $x=\varepsilon_i$; $(i=1,2,3\dots n)$ verschwinde. Dies führt auf $n$ Gleichungen von der Form

$$f_0(\varepsilon_i)\,G^2(\varepsilon_i)+(f_1(\varepsilon_i)-\varphi'_0(\varepsilon_i)\,f_0(\varepsilon_i))\,G(\varepsilon_i)+f_2(\varepsilon_i)=0,$$

und hieraus findet man für $G(\varepsilon_i)$ zwei Werthe, von denen der eine oder der andere $\Delta_i$ heissen möge. Nunmehr hat man zur Bestimmung der Grössen $g_0$ bis $g_{n-1}$ folgende $n$ lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned}g_0+g_1\varepsilon_1+g_2\varepsilon_1^2+\dots+g_{n-1}\varepsilon_1^{n-1}&=\Delta_1,\\ g_0+g_1\varepsilon_2+g_2\varepsilon_2^2+\dots+g_{n-1}\varepsilon_2^{n-1}&=\Delta_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ g_0+g_1\varepsilon_n+g_2\varepsilon_n^2+\dots+g_{n-1}\varepsilon_n^{n-1}&=\Delta_n,\end{aligned}$$

und die Gleichung 3) lautet jetzt einfacher

$$\varphi_0 f_0 \frac{d^2 w}{d x^2} + \{2 f_0 G + f_1\} \frac{d w}{d x} + F w = 0.$$

Die Function $F$ lässt sich dadurch bestimmen, dass man den Coefficienten von $w$ in Gleichung 3) durch $\varphi_0$ dividirt; der Quotient muss im Allgemeinen eine ganze Function vom mindestens $n-2^{\text{ten}}$ Grade sein.

Sind mehrere der Zahlen $\varepsilon_i$ einander gleich, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten $g$ nicht die hinreichende Anzahl linearer Gleichungen. In diesem Falle kann man sich die fehlenden Gleichungen durch einen Differentiationsprocess verschaffen. Ist beispielsweise

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_\nu,$$

so hat man zu verlangen, dass der Factor von $w$ in Gleichung 3) die Potenz $(x-\varepsilon_\nu)^\nu$ ausscheide, das heisst, dass derselbe sammt seinen $\nu-1$ ersten Ableitungen für $x=\varepsilon_\nu$ verschwinde. Man findet nun aus diesen Bedingungen gewisse Werthe für $G(\varepsilon_\nu)$, $G'(\varepsilon_\nu)$, ... $G^{(\nu-1)}(\varepsilon_\nu)$, welche $\varDelta_\nu$, $\varDelta'_\nu$, ... $\varDelta_\nu^{(\nu-1)}$ heissen mögen; andererseits ist

$$\begin{aligned}
G(\varepsilon_\nu) &= g_0 + g_1 \varepsilon_\nu + g_2 \varepsilon_\nu^2 + \ldots + g_{n-1} \varepsilon_\nu^{n-1},\\
G'(\varepsilon_\nu) &= g_1 + 2 g_2 \varepsilon_\nu + 3 g_3 \varepsilon_\nu^2 + \ldots + (n-1) g_{n-1} \varepsilon_\nu^{n-2},\\
G''(\varepsilon_\nu) &= 1.2 g_2 + 2.3 g_3 \varepsilon_\nu + \ldots + (n-1)(n-2) g_{n-2} \varepsilon_\nu^{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese $\nu$ linearen Gleichungen im Verein mit den übrigen Gleichungen des Systems reichen zur Bestimmung der $g$ aus.

Wie man sich zu verhalten hat, wenn noch andere der Zahlen $\varepsilon_i$ einander gleich sind, ist jetzt leicht einzusehen.

Was nun das Integral der Gleichung 1) anbetrifft, so wird es durch die Substitutionen

$$y = \frac{\varphi_0}{\varphi_1} \cdot \frac{\frac{d v}{d x}}{v} \quad \text{und} \quad v = w\, e^{\int \frac{G}{\varphi_0} dx}$$

vermittelt; es lautet

$$y = \frac{1}{\varphi_1} \left\{ G + \varphi_0 \frac{\frac{d w}{d x}}{w} \right\},$$

unter $w$ das Integral der letzten Differentialgleichung verstanden.

Wir wollen die im Allgemeinen angedeutete Transformation auf die Gleichung*

$$1)\quad (a + b x + c x^2) \frac{d y}{d x} + A x^2 + B y^2 + 2 C x y + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

anwenden; dabei wird sich zeigen, dass die Integration von der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe abhängig ist.

* Diese Gleichung lässt sich auch auf anderem Wege in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe überführen. Vergl. meinen Aufsatz: Zur Integration der Differentialgleichungen, Zeitschr. f. Mathematik u. Physik XXVII, 1.

Man hat jetzt im Speciellen

$$\varphi_0 = a + bx + cx^2, \quad \varphi_1 = B, \quad \varphi_2 = 2(Cx + E), \quad \varphi_3 = Ax^2 + 2Dx + F.$$

Daher lautet die Gleichung 2) folgendermassen:

$$2) \qquad (a + bx + cx^2)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (a + bx + cx^2)(a_1 + b_1 x)\frac{dv}{dx} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) v = 0,^*$$

und hierin sind die fünf neu auftretenden Coefficienten von einander unabhängig und unmittelbar durch die früheren gegeben.

Setzt man nun

$$v = w . e^{\int \frac{g + hx}{a + bx + cx^2} dx},$$

unter $g$ und $h$ zwei noch zu wählende Zahlen verstanden, so kommt man nach gehöriger Reduction zu folgender Differentialgleichnng:

$$3) \qquad \psi_0 \frac{d^2 w}{dx^2} + \psi_1 \frac{dw}{dx} + \psi_0 w = 0,$$

in welcher

$$\begin{cases} \psi_0 = (a + bx + cx^2)^2, \\ \psi_1 = (a + bx + cx^2)\{a_1 + 2g + (b_1 + 2h)x\}, \\ \psi_2 = (a + bx + cx^2)h + (g + hx)^2 + \{a_1 - b + (b_1 - 2c)x\}(g + hx) \\ \qquad + a_0 + b_0 x + c_0 x^2. \end{cases}$$

Für die weitere Untersuchung ist es erforderlich, vier Hauptfälle der Transformation zu unterscheiden, und zwar je nachdem der Ausdruck $a + bx + cx^2$ allgemein, vollkommen quadratisch, linear oder constant ist.

I. Fall. Es sei $a + bx + cx^2 = c(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)$.

Man bestimme die Zahlen $g$ und $h$ so, dass

$$\psi_2 = k(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2).$$

Dies ist möglich, so lange $\varepsilon_1$ von $\varepsilon_2$ verschieden ist; denn wegen

$$\psi_2(\varepsilon_1) = 0 \text{ und } \psi_2(\varepsilon_2) = 0$$

hat man die beiden Gleichungen

$$(g + h\varepsilon_1)^2 + \{a_1 - b + (b_1 - 2c)\varepsilon_1\}(g + h\varepsilon_1) + a_0 + b_0\varepsilon_1 + c_0\varepsilon_1^2 = 0,$$
$$(g + h\varepsilon_2)^2 + \{a_1 - b + (b_1 - 2c)\varepsilon_2\}(g + h\varepsilon_2) + a_0 + b_0\varepsilon_2 + c_0\varepsilon_2^2 = 0.$$

Aus diesen findet man zunächst

$$g + h\varepsilon_1 = \varDelta_1, \quad g + h\varepsilon_2 = \varDelta_2$$

und hieraus

$$g = \frac{\varepsilon_1 \varDelta_2 - \varepsilon_2 \varDelta_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \qquad h = \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Die Zahl $k$ hat als Factor von $x^2$ in $\psi_2$ den Werth

* Eine ähnliche, weniger allgemeine Gleichung untersuchte Weiler. Vergl. Crelle Bd. 51.

$$k = h^2 + (b_1 - c)h + c_0.$$

Nach diesen Bestimmungen lautet die Gleichung 3)

$$c^2(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{d^2w}{dx^2} + c\{a_1 + 2g + (b_1 + 2h)x\}\frac{dw}{dx} + kw = 0$$

und geht für

$$x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)u$$

über in eine Gleichung der Form

$$u(1-u)\frac{d^2w}{du^2} + (\alpha + \beta u)\frac{dw}{du} + \gamma w = 0.$$

II. Fall. Es sei $a + bx + cx^2 = c(x-\varepsilon)^2$.

Dann lassen sich die Grössen $g$ und $h$ so bestimmen, dass

$$\psi_2 = k(x-\varepsilon),$$

Das heisst aber: es muss der Factor von $x^2$ in $\psi_2$ verschwinden und

$$\psi_2(\varepsilon) = 0$$

sein. Dies führt auf folgende Gleichungen:

$$h^2 + (b_1 - c)h + c_0 = 0, \quad (g + h\varepsilon)^2 + \{a_1 + b_1\varepsilon\}(g + h\varepsilon) + a_0 + b_0\varepsilon + c_0\varepsilon^2 = 0.$$

Aus der ersten findet man $h$, aus der zweiten bestimmt sich der Ausdruck $g + h\varepsilon$, also schliesslich $g$. Die Zahl $k$ hat als Factor von $x$ in $\psi_2$ den Werth

$$k = 2gh + a_1 h + (b_1 - 2c)g + b_0.$$

Nun reducirt sich die Gleichung 3) auf

$$c^2(x-\varepsilon)^3\frac{d^2w}{dx^2} + c(x-\varepsilon)\{a_1 + 2g + (b_1 + 2h)x\}\frac{dw}{dx} + kw = 0.$$

Führt man statt $x$ eine neue unabhängige Variabele $u$ ein mit Hilfe von

$$x - \varepsilon = \frac{1}{u},$$

so vereinfacht sich die letzte Differentialgleichung zu

$$u\frac{d^2w}{du^2} + (\alpha + \beta u)\frac{dw}{du} + \gamma w = 0.$$

III. Fall. Es sei $c = 0$, $b \gtrless 0$.

Dann lassen sich die Grössen $g$ und $h$ so bestimmen, dass

$$\psi_2 = k(a + bx),$$

das heisst aber: es muss der Factor von $x^2$ in $\psi_2$ verschwinden und

$$\psi_2(\varepsilon) = 0 \quad \left(\varepsilon = -\frac{a}{b}\right)$$

sein. Dies führt auf folgende Gleichungen:

$$h^2 + b_1 h + c_0 = 0, \quad (g + h\varepsilon)^2 + \{a_1 - b + b_1\varepsilon\}(g + h\varepsilon) + a_0 + b_0\varepsilon + c_0\varepsilon^2 = 0.$$

Aus der ersten findet man $h$, aus der zweiten bestimmt sich der Ausdruck $g + h\varepsilon$, also schliesslich $g$.

Die Zahl $k$ hat als Factor von $x$ in $\psi_2$ den Werth

$$k = 2gh + a_1 h + b_1 g + b_0$$

Nun reducirt sich die Gleichung 3) auf

$$(a + bx)\frac{d^2 w}{dx^2} + \{a_1 + 2g + (b_1 + 2h)x\}\frac{dw}{dx} + kw = 0$$

und geht für

$$a + bx = u$$

über in

$$u\frac{d^2 w}{du^2} + (\alpha + \beta u)\frac{dw}{du} + \gamma w = 0.$$

IV. Fall. Es sei $c = 0$ und $b = 0$.

In diesem Falle verfüge man über $g$ und $h$ so, dass die Factoren von $x^2$ und $x$ in $\psi_2$ verschwinden. Dies führt auf folgende Gleichungen:

$$h^2 + b_1 h + c_0 = 0, \quad 2gh + a_1 h + b_1 g + b_0 = 0,$$

und nun ist $\psi_2$ gleich einer Constanten, nämlich

$$k = g^2 + a_1 g + ah + a_0.$$

Die Differentialgleichung 3) besitzt jetzt die Gestalt

$$a^2\frac{d^2 w}{dx^2} + a\{a_1 + 2g + (b_1 + 2h)x\}\frac{dw}{dx} + kw = 0$$

und lässt sich mit Hilfe der Substitution

$$x = \delta + \sqrt{u}, \quad \delta = -\frac{a_1 + 2g}{b_1 + 2h}$$

abermals auf die Form

$$u\frac{d^2 w}{du^2} + (\alpha + \beta u)\frac{dw}{du} + \gamma w = 0*$$

bringen.

Nach Erledigung der vier Hauptfälle können wir folgendes Resultat aussprechen:

Die Differentialgleichung

$$2)\ (a + bx + cx^2)^2\frac{d^2 v}{dx^2} + (a + bx + cx^2)(a_1 + b_1 x)\frac{dv}{dx} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)v = 0$$

kann durch die Substitutionen

$$v = w \,.\, e^{\int \frac{g + hx}{a + bx + cx^2}dx} \quad \text{und resp.} \quad \left\{\begin{array}{l} x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)u, \\ x - \varepsilon = \dfrac{1}{u}, \\ a + bx = u, \\ \qquad x = \delta + \sqrt{u} \end{array}\right.$$

stets in eine der Gleichungen

$$u(1 - u)\frac{d^2 w}{du^2} + (\alpha + \beta u)\frac{dw}{du} + \gamma w = 0,$$

---

* Auf noch speciellere Fälle dieser Gleichung gehen wir hier nicht ein. Man findet deren Transformation und Integration in den „Vorlesungen über höhere Analysis“ von O. Schlömilch.

$$u\frac{d^2w}{du^2}+(\alpha+\beta u)\frac{dw}{du}+\gamma w=0$$

transformirt werden, für welche die Integration hinlänglich bekannt ist.

Der Zusammenhang zwischen den Integralen der Gleichung 2) und der Gleichung

$$1)\quad (a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$$

ist nun gegeben durch

$$y=\frac{\varphi_0}{\varphi_1}z=\frac{a+bx+cx^2}{B}\cdot\frac{\frac{dv}{dx}}{v},$$

und weil

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=\frac{g+hx}{a+bx+cx^2}+\frac{\frac{dw}{dx}}{w},$$

so genügt der Gleichung 1)

$$y=\frac{1}{B}\left\{g+hx+(a+bx+cx^2)\frac{\frac{dw}{dx}}{w}\right\},$$

unter $w$ das in $x$ ausgedrückte Integral der entsprechenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung verstanden.

Dresden, im Mai 1882. WOLDEMAR HEYMANN.

---

## XXIV. Zwei projectivische Sätze.

Es sei $ABCD$ ein gewöhnliches Viereck, $E$ der Durchschnitt von $AC$ und $BD$, $F$ der von $AB$ und $CD$, $G$ der von $DA$ und $BC$; wird nun $ABCD$ mittelst eines beliebig gewählten Projectionscentrums $O$ perspectivisch auf eine Ebene projicirt, welche die Gerade $FG$ in sich enthält, und ist $A'B'C'D'$ die entstandene Abbildung, so gehen die vier Geraden $AC'$, $BD'$, $CA'$, $DB'$ durch einen und denselben Punkt $P$. Dreht sich die Projectionsebene um $FG$, so durchläuft $P$ die Gerade $EO$.

Nach einer Bemerkung des Herrn Prof. Dr. Klein lautet das Correlat dieses Satzes folgendermassen: Durch einen Punkt $O$ mögen vier Ebenen $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOA$ oder kurz $a$, $b$, $c$, $d$ gehen und es sei $l$ der Durchschnitt der Diagonalebenen $AOC$ und $BOD$; werden nun $a$, $b$, $c$, $d$ durch eine fünfte Ebene in den Geraden $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ geschnitten und letztere mit einem willkürlich auf $l$ gewählten Punkte $O'$ durch vier neue Ebenen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ verbunden, so liegen die vier Durchschnitte von $a$ und $c'$, $b$ und $d'$, $c$ und $a'$, $d$ und $b'$ in einer und derselben Ebene.

Diese Sätze dürften neu sein und eine weitere Untersuchung verdienen.

SCHLÖMILCH.

---

## XXV. Beweis der vorigen Sätze.

(Hierzu Taf. V Fig. 6 u. 7.)

*Satz I.* Die Seiten 1, 2, 3, 4 eines Vierecks, dessen Ecken 41, 12, 23, 34 resp. $A$, $B$, $C$, $D$, dessen Diagonalendurchschnittspunkt $E$ und dessen Nebenecke 13 $G$ heissen mögen, werden von einer beliebigen Geraden in den Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ geschnitten. Die Schnittpunkte von $P_1E$, $P_2E$, $P_3E$, $P_4E$ mit den Gegenseiten 3, 4, 1, 2 : $\Pi_3$, $\Pi_4$, $\Pi_1$, $\Pi_2$ liegen dann auf einer Geraden (Fig. 6).

*Satz II.* Die Eckpunkte 1, 2, 3, 4 eines Vierseits, in welchem die Seiten 41, 12, 23, 34 resp. $a$, $b$, $c$, $d$, die Verbindungslinie der Nebenecken $e$ und die Diagonale 13 $g$ heissen mögen, werden mit einem beliebigen Punkte der Ebene durch Strahlen $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ verbunden. Verbindet man dann die Schnittpunkte von $p_1e$, $p_2e$, $p_3e$, $p_4e$ mit den Gegenecken 3, 4, 1, 2 durch die Strahlen $\pi_3$, $\pi_4$, $\pi_1$, $\pi_2$, so schneiden sich diese Strahlen in einem Punkte.

Zum Beweise von Satz I wird es genügen, zu zeigen, dass drei der Punkte $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ auf gerader Linie liegen. Es folgt dann unmittelbar, dass auch der vierte Punkt auf derselben Geraden liegt. Der Schnittpunkt von $P_2E$ und $CD$ möge $Q$ heissen. Verstehen wir unter $(m_1n_1 . m_2n_2 \dots m_sn_s)$ den Quotienten $\frac{m_1n_1}{n_1m_2} . \frac{m_2n_2}{n_2m_3} \dots \frac{m_sn_s}{n_sm_s}$, so wird die Bedingung dafür, dass $P_1$, $P_2$, $P_3$ auf gerader Linie liegen, durch die Gleichung

$$\text{I)} \qquad (BP_2 . CP_3 . GP_1) = -1$$

ausgedrückt.

Nun ist

$(CP_3 . G\Pi_1 . AE) = -1$, weil $P_3\Pi_1E$ auf gerader Linie liegen,
$(D\Pi_3 . GP_1 . BE) = -1$, „ $\Pi_3P_1E$ „ „ „ „
$(BP_2 . CQ . DE) = -1$, „ $P_2QE$ „ „ „ „
$(A\Pi_4 . DQ . CE) = -1$, „ $\Pi_4QE$ „ „ „ „

Multiplicirt man diese vier Gleichungen mit einander, so folgt unter Berücksichtigung von Gleichung I)

$$(G\Pi_1 . A\Pi_4 . D\Pi_3) = -1$$

und diese Gleichung sagt aus, dass $\Pi_1\Pi_4\Pi_3$ auf gerader Linie liegen.

Satz II ist der reciproke Satz zu Satz I. Der eben gegebene Beweis kann auf Satz II nach dem Princip der Reciprocität buchstäblich übertragen werden, wenn man statt der grossen Buchstaben die entsprechenden kleinen einführt und statt der Streckenverhältnisse die Verhältnisse der Sinus der entsprechenden Winkel.

Die Sätze I und II gestatten eine Uebertragung in den Raum. Es ist möglich, die Verallgemeinerung von Satz I wieder aus metrischen

Relationen von Strecken, und reciprok die von Satz II aus metrischen Relationen von Sinusfunctionen abzuleiten; doch gelangt man schneller zum Ziele, wenn man die Verallgemeinerung von Satz II aus metrischen Relationen von Strecken beweist und daraus reciprok die Verallgemeinerung von Satz I ableitet.

Wir sprechen darnach die verallgemeinerten Sätze in folgender Form aus:

*Satz III.* Vier durch einen Punkt gehende Ebenen A, B, Γ, Δ schneiden sich in den Geraden AB, BΓ, ΓΔ, ΔA. Die Ebene AB, ΓΔ heisse E, die Ebene BΓ, AΔ heisse Z, die Ebene ΔB, EZ heisse Θ. Eine beliebige Ebene Λ schneide nun die Ebenen A, B, Γ, Δ in den Geraden AΛ, BΛ, ΓΛ, ΔΛ. Legt man dann von einem beliebigen Punkte der Schnittgeraden EZ Ebenen A′, B′, Γ′, Δ′ durch diese Geraden, so liegen die vier Schnittgeraden AΓ′, BΔ′, ΓA′, ΔB′ in einer Ebene.

*Satz IV.* Vier in einer Ebene liegende Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bilden ein Viereck, der Durchschnittspunkt von $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ heisse $\varepsilon$, der von $\beta\gamma$ und $\alpha\delta$ heisse $\zeta$, der von $\delta\beta$ und $\varepsilon\zeta$ heisse $\vartheta$. Zieht man nun nach einem beliebigen Punkte $\lambda$ im Raume die Geraden $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$, $\gamma\lambda$, $\delta\lambda$, welche eine durch die Gerade $\varepsilon\zeta$ gelegte Ebene in den Punkten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ schneiden, so gehen die Geraden $\alpha\gamma'$, $\beta\delta'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\beta'$ durch einen Punkt (Fig. 7).

Zum Beweise von Satz IV genügt es wieder zu zeigen, dass drei der Geraden $\alpha\gamma'$, $\beta\delta'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\beta'$ sich in einem Punkte schneiden. Die Bedingung dafür, dass $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ durch einen Punkt $\lambda$ gehen, findet man, indem man je zwei Bedingungsgleichungen dafür aufstellt, dass $\lambda\beta\beta'$, $\lambda\gamma\gamma'$, $\lambda\delta\delta'$ auf gerader Linie liegen. Eliminirt man daraus die von $\lambda$ ausgehenden Strecken, so ergeben sich die drei Bedingungsgleichungen

$$\text{I)}\qquad (\beta\delta\,.\,\gamma\varepsilon\,.\,\gamma'\delta'\,.\,\beta'\vartheta)=1,$$
$$\text{II)}\qquad (\gamma'\beta'\,.\,\delta'\vartheta\,.\,\delta\beta\,.\,\gamma\zeta)=1,$$
$$\text{III)}\qquad (\delta'\gamma'\,.\,\beta'\zeta\,.\,\beta\gamma\,.\,\delta\varepsilon)=1.$$

Nun ist

$$\text{IV)}\qquad (\vartheta\beta\,.\,\alpha\varepsilon\,.\,\gamma\delta)=1,$$

weil $\vartheta\alpha\gamma$ so auf den Seiten des Dreiecks $\beta\varepsilon\delta$ gelegen sind, dass ihre Verbindungslinien mit den Gegenecken sich in einem Punkte schneiden. Analog ist

$$\text{V)}\qquad (\beta\gamma\,.\,\zeta\alpha\,.\,\delta\vartheta)=1.$$

Ferner ist

$(\gamma\zeta\,.\,\delta\alpha\,.\,\varepsilon\beta)=-1$, weil $\gamma\delta\varepsilon$ auf gerader Linie liegen,
$(\beta\varepsilon\,.\,\gamma\delta\,.\,\zeta\alpha)=-1$, „ $\beta\gamma\zeta$ „ „ „ „
$(\delta\gamma\,.\,\zeta\beta\,.\,\alpha\varepsilon)=-1$, „ $\delta\zeta\alpha$ „ „ „ „
$(\gamma\varepsilon\,.\,\beta\alpha\,.\,\zeta\delta)=-1$, „ $\gamma\beta\zeta$ „ „ „ „

Multiplicirt man diese vier Gleichungen mit einander, so erhält man

VI) $(\beta\varepsilon.\delta\alpha)(\beta\zeta.\delta\gamma) = 1.$

Multiplicirt man nun I) mit IV), II) mit V), III) mit VI), so ergeben sich die drei Gleichungen

Ia) $(\delta\beta\,.\,\alpha\varepsilon\,.\,\gamma'\delta'.\,\beta'\vartheta) = 1,$

IIa) $(\gamma'\beta'.\,\delta'\vartheta\,.\,\beta\delta\,.\,\alpha\zeta) = 1,$

IIIa) $(\delta'\gamma'.\,\beta'\zeta\,.\,\delta\alpha\,.\,\beta\varepsilon) = 1,$

und diese sagen aus, dass $\beta\delta'$, $\delta\beta'$ und $\alpha\gamma'$ sich in einem Punkte schneiden.

Dieser Beweis ist nun auf Satz III in der nämlichen Weise übertragbar, wie der Beweis von Satz I auf Satz II.

Als interessante Specialfälle der Sätze I, II, III, IV fügen wir noch folgende Sätze hinzu:

1. Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Diagonalen eines Vierecks Parallelen zu den Seiten, so liegen deren Schnittpunkte mit den Gegenseiten auf einer geraden Linie.*

2. Zieht man von den Ecken eines Vierseits Parallelen in einer beliebigen Richtung und durch deren Schnittpunkte mit der Verbindungslinie der Nebenecken gerade Linien nach den entsprechenden Gegenecken, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte.

3. Legt man durch einen beliebigen Punkt einer Diagonalgeraden einer vierkantigen Ecke Parallelebenen zu den Seitenflächen der Ecke, so liegen deren Durchschnitte mit den entsprechenden gegenüberliegenden Seitenflächen in einer Ebene.

4. Zieht man von den Ecken eines Vierseits Parallelen zu einer beliebigen Richtung im Raume und durch deren Schnittpunkte mit einer Ebene, welche, durch die Verbindungslinie der Nebenecken gelegt ist, gerade Linien nach den entsprechenden Gegenecken, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte.

Strassburg i. E., im Mai 1882. Dr. Arnold Sachse.

---

## XXVI. Ein elementargeometrischer Satz als Beitrag zur Theorie der stereographischen Projection.

Sind vier Punkte auf einer Ebene oder auf einer Kugel gegeben $ABCD_1$, sind ferner die vier Kreise $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ gezeichnet, welche durch resp. $BCD$, $ACD$, $ABD$, $ABC$ gelegt werden können, so kann man

* Den obigen Satz hatte der Herr Verfasser gefunden und mir darüber einen Artikel zugesendet; dieser veranlasste mich zur Aufsuchung des viel allgemeineren Theorems IV, welches ich sowohl unter der vorhergehenden Nummer, als brieflich Herrn Dr. Sachse mitgetheilt habe, worauf Letzterer den früheren Artikel gegen den vorliegenden umtauschte. Schlömilch.

zwischen den sechs Winkeln (12)(13)(14)(23)(24)(34), welche die Kreise miteinander bilden, vier Beziehungen aufstellen; man hat nämlich, wenn man die Winkelsumme um jeden der vier Punkte $ABCD$ bildet und nur die absoluten Werthe jener Winkelgrössen in Rechnung bringt,

$$(23)+(34)+(24)=(13)+(34)+(14)=(12)+(14)+(24)$$
$$=(12)+(13)+(23)=180^0.$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$(23)+(24)-(13)-(14)=0=(14)+(24)-(13)-(23)$$

und hieraus durch Addition $(24)=(13)$. Analog erhält man $(12)=(34)$, $(14)=(23)$.

Das Resultat $(12)=(34)$ kann man auch so aussprechen:

„Hält man zwei Punkte $AB$ auf einem festen Kreise $K_3$, sowie einen ausserhalb $K_3$ beliebig gelegenen Punkt $C$ fest, legt dagegen durch einen auf der Peripherie $K_3$ beweglichen Punkt $D$ die Kreise $K_1$, welcher $D$ mit $BC$, sowie $K_2$, welcher $D$ mit $AC$ verbindet, so schliessen diese veränderlichen Kreise $K_1$, $K_2$ einen constanten Winkel ein."

Das Gesagte liefert wohl den einfachsten Beweis dafür, dass die stereographische Projection der Erdoberfläche, nach welcher jeder Punkt der Kugel vom Nordpol aus auf eine zur Tangentialebene im Nordpol parallele Ebene projicirt wird, als Bild eines Kreises auf der Kugel wieder einen Kreis auf der Projectionsebene liefert.

Denkt man sich nämlich den Nordpol in $C$, sowie einen Kreis $K_3$ auf der Kugelfläche gegeben, so kann man auf diesem Kreise zwei Punkte $A$, $B$ fest annehmen, sowie einen dritten Punkt $D$ die Peripherie $K_3$ durchlaufen lassen; die durch $ADC$, $BDC$ gelegten projicirenden Ebenen schneiden die Kugel in Kreisen $K_2$, $K_1$. Ihre Schnittlinien auf der Zeichnungsebene bilden auf letzterer einen Winkel, der nicht verschieden ist von dem bei $C$ auftretenden Winkel (12) der Kreise $K_1$, $K_2$, da ja die Zeichnungsebene der Tangentialebene parallel ist.

Letzterer Winkel (12) ist nun aber constant nach dem oben Bewiesenen; daher projicirt sich der Kreis $K_3$ als eine Curve $K'_3$ von der Eigenschaft, dass zwei feste Punkte $A'$, $B'$ derselben von jedem Curvenpunkte $D'$ aus unter demselben Winkel erscheinen.

Verwandte Betrachtungen finden sich in zwei Arbeiten von Wedekind (Dissertation, Erlangen 1874/75, und 9. Band der mathematischen Annalen).

München, April 1882. FRITZ HOFMANN.

# Historisch-literarische Abtheilung

der

# Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXVII. Jahrgang.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1882.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## I. Abhandlungen.

Seite

Versuch neuer Tafeln der hyperbolischen Functionen. Von Prof. **Angelo Forti** . . . 1
Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate. Von Prof. Dr. **Friedrich Hultsch** . . . 41
Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme. Von Dr. **Heinrich Suter** . . . 121
Berichtigung zu S. 65 . . . 125
Zu F. Klein's Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen". Von Prof. Dr. **Max Nöther** . . . 201
Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Dr. **Ed. Mahler** . . . 207
Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Prof. Dr. **Siegm. Günther** . . . Supplementheft 1
Der Tractat Franco's von Lüttich „de quadratura circuli". Herausgegeben von Dr. **Winterberg** . . . Supplementheft 135
Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Ragusaer Patriziers Marino Ghetaldi aus dem Jahre 1630. Von Director **Eugen Gelcich** . . . Supplementheft 191
Descartes u. d. Brechungsgesetz des Lichtes. Von Dr. **P. Kramer** . . . Supplmth. 233

## II. Recensionen.

### Geschichte der Mathematik.

**Zuckermann**, Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung im Talmud. Von **M. Cantor** . . . 106
**Majer**, Proklos über die Definitionen bei Euklid. Von **M. Cantor** . . . 107
**Heiberg**, Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Von **M. Cantor** . 108
**Weissenborn**, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti. Von **M. Cantor** . . . 110
**Favaro**, Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galileo. Von **M. Cantor** 111
**Reinhardt**, Magister Georg Samuel Dörffel. Von **M. Cantor**. . . . 112
**Rodet**, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur égyptien. Von **M. Cantor** . . . 117
**Lasswitz**, Die Lehre von den Elementen während des Ueberganges von der scholastischen Physik zur Corpusculartheorie. Von **M. Cantor** . . . 186
**Bergold**, Arithmetik und Algebra nebst einer Geschichte dieser Disciplinen. Von **M. Cantor** . . . 187

## Arithmetik, Algebra, Analysis.

Seite

**Schapira**, Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihren Anwendungen. Von **W. Preobraschensky** . . . . . . . . . . . . 21
**Steinhauser**, Hilfstafeln zur präcisen Berechnung 20stelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen u. der Zahlen zu 20stell. Logarithmen. Von **M. Cantor** 38
**Radicke**, Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Von **S. Günther** . . . . . . . . . . . . . . 63
**Tait**, Quaternionen (übersetzt von **G. v Scherff**). Von **W. Unverzagt** . . . . . 64
**Scheffler**, Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Von **W. Killing** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
**Unverzagt**, Ueber die Grundlagen der Rechnung m. Quaternionen. Von **W. Killing** 72
**Worpitzky**, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Von **M. Cantor** 73
**Helmling**, Ueber die Integration der allgem. Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx}+y^2=X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. Von **M. Nöther** . 131
**Beyda**, Die imaginären Grössen und ihre Auflösung. Von **M. Cantor** . . . . 132
**Heger**, Differential- und Integralrechnung, Ausgleichungsrechnung, Renten-, Lebens- und Aussteuerversicherung. Von **M. Cantor** . . . . . . 133
In memoriam Dominici Chelini. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . 136
**Götting**, Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . 140
**Bremiker**, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142
**Pryde**, Mathematical Tables. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . 142
**Wittstein**, Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit. Von **M. Cantor** . . . 143
**Harnack**, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Von **H. Weber** 161
**Mayr**, Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. Von **E. Lommel** . 164
**Abel**, Oeuvres complètes. Von **M. Nöther** . . . . . . . . . . . . . . . 169
**Goldschmidt**, Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen. Von **K. Schwering** 179
**Amthor**, Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung, insbesondere die Militärdienstversicherung. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . 190
**Hunrath**, Aufgaben zum Rechnen mit Systemzahlen. Von **M. Cantor** . . . . 192
**Matthiessen**, Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193
**Muir**, A treatise on the theory of determinants. Von **M. Cantor**. . . . . . 194
**Schendel**, Beiträge zur Theorie der Functionen. Von **W. Killing** . . . . . 215

## Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

**Petersen**, Lehrbuch der ebenen Planimetrie. Von **K. Schwering** . . . . . . 29
**Heger**, Darstellende Geometrie. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . 76
**Kroes**, Untersuchung des Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind. Von **K. Schwering** . . . . . . 77
**Reusch**, Die stereographische Projection. Von **Chr. Wiener** . . . . . . . . 86
**Taylor**, An introduction to the ancient and modern geometry of conics. Von **A. Milinowski** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
**Weinmeister**, Die Flächen zweiten Grades. Von **A. Milinowski** . . . . . 92
**Milinowski**, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Von **K. Schwering** 95
**Schwering**, Mathematische Miscellen. Von **V. Schlegel** . . . . . . . . . 97
**Ruchonnet**, Exposition géométrique des propriétés générales des courbes. Von **A. Enneper** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98
**Heger**, Analytische Geometrie. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . 101

Seite

**Simony**, Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . 103
**Buys**, La science de l'espace. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . 104
**Klein**, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Von **M. Nöther** 130
**Lie**, Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Von **M. Nöther** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
**v. Arnold**, Trisectio angulorum. Von **E. Ullrich** . . . . . . . . . . . . 132
**Henrici** und **Treutlein**, Lehrbuch der Elementargeometrie I. Von **M. Cantor** . 139
**v. Escherich**, Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. Von **M. Nöther** 171
**Wiener**, Ueber Involutionen auf ebenen Curven. Von **M. Nöther** . . . . . . 174
**Noth**, Die Arithmetik der Lage. Von **K. Schwering** . . . . . . . . . . 175
**Consentius**, Die Rückläufigkeit des Raumes ein Irrthum und Ursache weiterer Irrthümer. Von **K. Schwering** . . . . . . . . . . . . . . . . . 177
**Schlegel**, Einige geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Von **S. Günther** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179
**Günther**, Parabolische Logarithmen u. parabolische Trigonometrie. Von **M. Cantor** 183
**Schröder**, Lehrbuch der Planimetrie. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . 188
**Schuberth**, Illustrirtes Hand- und Hilfsbuch der Flächen- und Körperberechnung. Von **M. Cantor** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189
**Abendroth**, Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene. Von **M. Cantor** 193
**Schlegel**, Lehrbuch der elementaren Mathematik. Von **W. Killing** . . . . . 211
**Hochheim**, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von **M. Cantor** 219
**Lucas**, Récréations mathématiques. Von **S. Günther** . . . . . . . . . . . 220

## Geodäsie und Geographie.

**Schell**, Die Tachymetrie mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichy und Starke. Von **C. Bohn** . . . . . . . . . . . . . . . . 15
Antikritik von **Ant. Schell** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
**Doll**, Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von **C. Bohn** . . . . . . . 27
**Steinhauser**, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkarten-Projection. Von **S. Günther** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
**Schlemüller**, Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden, nicht bestrahlten Atmosphäre, sowie die Höhe der Atmosphäre. Von **C. Bohn** . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
**Steinhauser**, Sechs Karten zur mathematischen Geographie. Von **S. Günther** . 224
**Israel-Holtzwart**, Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten. Von **S. Günther** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226

## Mechanik und Physik.

**Schell**, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Von **Dietrich** . . . . . . . 12
**Drossbach**, Kraft und Bewegung. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . 13
**Weinberg**, Messung der Wellenlängen des Lichtes. Von **P. v. Zech** . . . . . 13
**Glaser**, Beitrag zur Potentialtheorie. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . 13
**Jenkin**, Elektricität und Magnetismus (deutsch von **Exner**). Von **P. v. Zech** . . 13
**Rayleigh**, Theorie des Schalls (deutsch von **Neesen**). Von **P. v. Zech** . . . . 14
**Kohlrausch**, Praktische Physik. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . 14
**Salcher**, Elemente der theoretischen Mechanik. Von **P. v. Zech** . . . . . . 15
**Fritsch**, Stoss zweier Massen unter Voraussetzung ihrer Undurchdringlichkeit behandelt. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

Seite

**Weinhold**, Physikalische Demonstrationen. Von **Rich. Rühlmann** . . . . . . 30
**Van der Waals**, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustands (deutsch von **Roth**). Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
**Mousson**, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Von **P. v. Zech** . . . . 127
**Verdet**, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes (deutsch von **Exner**) Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
**Jürgenssen**, Ueber eine Art Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
**Walberer**, Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. Von **P. v. Zech** . . . 128
**Lüroth**, Grundriss der Mechanik. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . 128
**Undeutsch**, Einführung in die Mechanik. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . 129
Entgegnung von **H. Undeutsch** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227
**Planck**, Ueber Gleichgewichtszustände isotroper Körper in verschiedenen Temperaturen. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129
**Auerbach**, Die theoretische Hydrodynamik. Von **Dietrich** . . . . . . . . 181
**Maxwell**, An elementary treatise on electricity. Von **Pilgrim** . . . . . . . 215
**Fleischer**, Der Hydromotor und die Physik des Hydromotors. Von **P. v. Zech**. 216
**Rottock**, Die Deviationstheorie. Von **P. v. Zech** . . . . . . . . . . . . 217
**Neumann**, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Von **P. v. Zech** . 217
**Krebs**, Grundriss der Physik für höhere realistische Lehranstalten. Von **P. v. Zech** 217

---

Bibliographie . . . . . . . . . . . . . Seite 39, 78, 118, 145, 198, 229
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1881 . . . . . 148
" " 1. Juli bis 31. December 1881 . . . . 232

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Zu F. Klein's Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen".*

Von
Prof. Dr. M. Noether
in Erlangen.

Hier liegt eine Schrift vor, welche den Stempel des Originalen trägt: aus Vorlesungen hervorgegangen, führt sie auch den Leser mit einem Wurfe in das Innere des Gebiets lebendig ein. Sie stellt den Kenner der Theorie, oder auch den Physiker, der sich mit der Potentialtheorie oder der Stromvertheilung beschäftigt hat, unmittelbar auf einen Punkt, von dem aus er die Gedanken der Theorie sich einheitlich, wie von selbst, aus einander entwickeln sieht und die Tragweite und den Umfang der Methoden von vornherein überblicken kann.

Aber hat sich die Theorie der algebraischen Functionen auch historisch bei Riemann selbst von diesem Punkte aus entwickelt? Hier ist die Stelle, wo der Kritiker einzugreifen hat, und nicht etwa bei der Frage, ob Herr Klein bei der ausserordentlich knappen Behandlung seines Gegenstandes Lücken gelassen hat. Solche sind sicher vorhanden, ohne aber dem Buche etwas von seinem anregenden Werthe zu nehmen; der Verf. überlässt eben die Ausführung der Details späteren Schriften oder beruft sich dafür auf die vorhandenen Arbeiten. Wir beschäftigen uns daher wesentlich nur mit der Idee der Schrift, und um so mehr, als sie einen der interessantesten Punkte in der Geschichte der neueren Mathematik, der noch wenig geklärt ist, berührt.

Des Verf. Gedankengang ist der: Man kennt die physikalische Deutung der Function $u+vi$ eines complexen Arguments $x+yi$; $u$ wird das Geschwindigkeitspotential für die stationäre Strömung einer incompres-

* „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. Von Felix Klein, o. ö. Professor der Geometrie a. d. Universität Leipzig." Leipzig, B. G. Teubner. 1882. VIII u. 82 S. gr. 8°.

sibeln Flüssigkeit in der $xy$-Ebene, $v = Const.$, bez. $u = Const.$ werden die Strömungs-, bez. Niveaucurven. Das Studium der Strömungen unter gegebenen Bedingungen liefert also auch umgekehrt Definitionen von Functionen complexen Arguments. Nun ist Riemann einerseits sicher durch die Physik hindurchgegangen; andererseits beschränkte sich R., wie der Verf. einer Aeusserung Prym's entnimmt, nicht auf ebene Flächen, sondern soll auf beliebig gegebenen krummen Flächen Functionen des Ortes studirt haben. Auf solchen geschlossenen Flächen aber, welche man sich nur als einblättrig zu denken braucht, kann man leicht einförmige Strömungen (solche, bei welchen in jedem Punkte, einzelne ausgenommen, die Geschwindigkeiten eindeutig gegeben sind) bewirken und studiren, also auch hierdurch Functionen des Ortes auf diesen Flächen definiren. Zwischen irgend zwei complexen Functionen des Ortes, zwei einförmigen Strömungen entsprechend, besteht dann die Beziehung, dass jede, im gewöhnlichen Sinne, eine Function der andern ist: Abhängigkeiten, deren Eigenschaften man aber physikalisch von vornherein übersehen kann.

In diesem Gedankengange verschwindet zunächst die Schwierigkeit der mehrfach überdeckten Flächen; vielmehr sieht man, dass zwei conform auf einander abbildbare Flächen für die Theorie der auf ihnen zu studirenden Functionen des Ortes gleichbedeutend sind, und man erkennt, indem man eine solche Function in der Ebene ausbreitet, die Bedeutung der mehrblättrigen ebenen Flächen. Ferner tritt die Wichtigkeit der auf mehrfach zusammenhängenden Flächen existirenden geschlossenen Curven, welche die Fläche nicht in getrennte Bereiche zerlegen, unmittelbarer hervor. Indem man dieselben, wenn man etwa elektrische Strömungen betrachtet, zum Sitze constanter elektromotorischer Kräfte macht, übersieht man, dass unendlich vieldeutige Ortsfunctionen existiren, mit Periodicitätsmoduln; und da bei mehrfach zusammenhängenden Flächen dann Strömungen ohne einzelne Pole (unwesentliche Singularitätsstellen für die Function, d. h. algebraische oder logarithmische, die letzteren mit der Residuensumme 0) hergestellt werden können, ergiebt sich die Existenz der allenthalben endlichen Ortsfunctionen. Weiterhin kann man die Bedeutung der Zahl $p$ erkennen und die Zahl der Constanten einer auf einer solchen Fläche existirenden eindeutigen Function des Ortes, mit gegebenen nur unwesentlichen Unstetigkeiten voraussehen. Und endlich erkennt man — und dieses ist das Ziel aller Betrachtungen —: dass für die geschlossene Fläche zwischen je zwei eindeutigen Ortsfunctionen $w$, $z$ mit nur unwesentlichen Unstetigkeiten eine algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Geschlecht $p$ besteht, wobei alle betrachteten Ortsfunctionen oder deren Differentialquotienten rationale Functionen von $w$ und $z$ werden.

So entsteht die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale: die Integrale zweiter Gattung erscheinen als die

ursprünglichen Functionen, aus denen sich die algebraischen Functionen additiv zusammensetzen; für alle diese Functionen erhält man die nothwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke. —

Man kann nicht anders sagen, als dass der innere Zusammenhang dieses Ideenganges des Verf. bestechend wirkt; und es sind auch wesentlich innere Gründe, die den Verf. zu seiner Auffassung führen. Die von ihm angeführten Belege — die so weitgehend aufgefasste Bemerkung des Herrn Prym, die Bedingungen, unter denen R. in Göttingen arbeitete, die allgemeinen physikalischen (naturphilosophischen) Speculationen R.'s, die Schlussworte seiner Dissertation — lauten alle zu wenig bestimmt, um als Argumente gelten zu können. Auch ist jetzt kaum mehr zu erwarten, dass noch persönliche Erinnerungen an R. solches Material liefern könnten, das in dieser Frage über Vermuthungen hinauszugehen gestattete.

Dagegen liegt über diese Frage noch ein Material vor, das vom Verfasser gar nicht erwähnt ist: das sind einige in den Schriften von R. selbst enthaltene bezügliche Aeusserungen. Ich will deren Bedeutung hier untersuchen.

Der Abschluss der Dissertation Riemann's — Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse —, deren erste Ideen R. 1847, wohl seit er Dirichlet in Berlin hörte, erfasste (Werke S. 512), fällt in den Herbst 1851. In Nr. 21 der Dissertation erklärt nun R., dass die in Nr. 20 derselben bezeichnete Anwendung seiner allgemeinen Sätze — über die Definition einer Function durch von einander unabhängige Bestimmungsstücke — die bei ihrer Aufstellung zunächst beabsichtigte gewesen sei. Diese specielle Anwendung aber bezieht sich nach Nr. 20 auf nichts Anderes, als auf die durch eine endliche Anzahl von Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeitsgesetze, insbesondere auf die Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Hierzu kommt in der Einleitung zur Theorie der Abel'schen Functionen die wichtige Aeusserung (Werke S. 95): dass R. auf die algebraischen Theile (genau so weit, als Klein dieselben in dem oben mitgetheilten Gedankengange entwickelt) „im Herbste 1851 und zu Anfang 1852 durch Untersuchungen über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen geführt wurde.“

Zur Vervollständigung ist noch hinzuzufügen, dass R. in Nr. 21 der Dissertation eine einfache Abbildungsaufgabe behandelt und in der letzten Nr. 22 ausspricht, dass die allgemeinste Aufgabe der conformen Abbildung zweier beliebiger Flächen auf ähnliche Weise, unter Benutzung der Gauss'schen Untersuchungen, behandelt werden könne. —

Zunächst entnehme ich nun aus dem ganzen Entwickelungsgange Riemann's, vor Allem aus dem Einflusse von Gauss, Dirichlet und

Weber, dass die physikalischen Gesichtspunkte auf die Ideenentwickelung R.'s geradezu bestimmend wirkten; aber nicht etwa auf die Ideen bezüglich specieller Functionen, sondern auf die bezüglich der Definition der Functionen einer complexen Variablen überhaupt. Die Grundidee, die Einsicht, auf was die Fortsetzung einer Function, die in einem endlichen Stücke der Ebene gegeben ist, beruhe, musste ihm durch die Potentialtheorie geliefert sein, in welcher, in einer um 1 grösseren Dimension, die Functionen wesentlich durch die partielle Differentialgleichung und durch unabhängige Grenzbedingungen definirt werden. Für R. blieb also noch hauptsächlich die Einführung der Unstetigkeiten der Function in die Bestimmungsstücke und die Anwendung des Dirichlet'schen Princips auf diese Fälle.

Von experimentellen oder theoretischen Untersuchungen über stationäre Ströme existirte damals, ausser den hierher zu rechnenden Gauss-schen Untersuchungen über den Erdmagnetismus, hauptsächlich nur die Kirchhoff'sche Arbeit über die stationären elektrischen Strömungen in einer Platte bei aufgesetzten Polen (Pogg. Ann. 64, 1845 und 67, 1846).

Sicher ist ferner, dass R. das Problem der Bestimmung einer Function sogleich geometrisch, als Problem der conformen Abbildung einer gegebenen Fläche auf einer zweiten, auffasste. Hierfür spricht die ganze Anlage der Dissertation, insbesondere die oben angeführten Stellen, deutlich; und wir mögen dabei dahingestellt sein lassen, auf welchem Wege, ob rein geometrisch, ob durch Integralbetrachtungen, R. auf seine Eintheilung der Flächen nach der Ordnung des Zusammenhanges und deren Zerschneidung gekommen ist. Jedenfalls waren hiernach die Beispiele, welche R. sich bildete, sowohl von frei im Raume schwebenden krummen Flächen, als von solchen, die über die Ebene einfach oder mehrfach ausgebreitet sind, wie den von $p+1$ geschlossenen sich nicht schneidenden Curven begrenzten ebenen Flächen $T$, hergenommen.

Ebenso erscheint als sicher, dass R. sich diese Probleme direct reducirte durch conforme Abbildung jeder solchen begrenzten Fläche auf die mehrfach überdeckte Halbebene; eine Auffassung, welche ihm die Potentialtheorie und das Dirichlet'sche Princip an die Hand gaben, analog der einfachen Abbildungsaufgabe in Nr. 21 der Dissertation.

Endlich ergeben die oben angeführten Stellen, dass R. bei dieser Operation in der Theorie der algebraischen Functionen, die er von vornherein zu begründen in Aussicht nahm, seine Hauptresultate fand.

Vergleicht man diese Daten mit der Klein'schen Darstellung, so erscheinen an dieser folgende Punkte wohlbegründet: Einmal waren die physikalischen Gesichtspunkte für die Grundanschauung R.'s massgebend geworden; zweitens beschäftigte sich R. mit den allgemeinsten Flächen von beliebigem Zusammenhange, krummen und ebenen, einfach und mehrfach überdeckten, geschlossenen und berandeten; drittens wird R.

der Zusammenhang zwischen stationären Strömungen einer incompressiblen Flüssigkeit in der Ebene und der Function einer complexen Variablen, wie auch die Thatsache, dass bei conformer Abbildung Strömungscurven in solche übergehen, also die Möglichkeit der Definition einer „complexen Function des Ortes" auf beliebiger Fläche, deutlich gewesen sein; und endlich lieferte ihm die partielle Differentialgleichung, wie in der Physik das Princip der Ueberlagerung der Strömungen, so das Princip der additiven Zusammensetzung seiner Functionen aus einzelnen einfacheren.

Als nicht zu erweisen ergiebt sich aber, dass R. die geschlossenen Flächen vor den berandeten, mit Ausnahme der geschlossenen die ganze Ebene mehrfach überdeckenden Fläche, in seinen Betrachtungen wesentlich bevorzugt habe. Weiter wird es, indem man bedenkt, dass damals erst der verhältnissmässig einfache Fall von Kirchhoff untersucht war, wenig wahrscheinlich, dass R. die experimentelle Anordnung für alle einförmigen Strömungen, mit allen Unstetigkeiten, deutlich eingesehen habe. Und wenn man auch diese beiden Dinge zugeben sollte, erscheint es doch als kaum möglich, dass R., wie es jetzt Klein skizzirt, die Theorie jener Strömungen und der entsprechenden Ortsfunctionen auf solchen Flächen bis zur allgemeinsten Theorie der zugehörigen algebraischen Gleichung durchgeführt habe.

Ich erkenne daher, die Klein'sche Auffassung beschränkend, nur den im Allgemeinen leitenden Charakter der physikalischen Anschauung und die Bedeutung der conformen Abbildung nur soweit an, dass R. von der allgemeinsten Abbildungsfrage (Schlussnummer der Dissertation) ausging, ohne dass die vollkommene Erledigung dieser Frage, auch nur in Bezug auf die geschlossenen krummen Flächen, für seine Theorie der algebraischen Functionen Vorbedingung gewesen wäre. Vielmehr denke ich mir die Folge der Entstehung so:

Vorausging die Darstellung der algebraischen Function als eindeutige Function des Ortes in einer die ganze Ebene mehrfach überdeckenden geschlossenen Fläche $T$. Die geometrischen Betrachtungen, welche R. zu seinen Zerschneidungen der mehrfach zusammenhängenden Flächen in Ebene oder Raum führten, wurden von ihm auch auf diese mehrblättrigen ebenen Flächen $T$ angewandt, wobei Betrachtungen der conformen Abbildung leitend mitwirkten. Sodann betrachtete R. die einfachsten mehrfach zusammenhängenden Flächen, und ich denke mir hier, einmal wegen der Anschaulichkeit, sodann weil die gewöhnliche partielle Differentialgleichung ohne Weiteres angewandt werden kann, eine solche über die Ebene einfach ausgebreitete Fläche $S$, welche von mehreren geschlossenen sich nicht schneidenden Curven (vielleicht speciellen Curven, wie Kreisen) begrenzt wird. Eine solche Fläche wurde — und hierbei leiteten die physikalischen Gesichtspunkte, die Potentialtheorie und das Dirich-

let'sche Princip — auf die mehrblättrige Halbebene abgebildet; und hiernach ergab sich leicht die Einsicht in den algebraischen Charakter der Beziehung zwischen zwei eindeutigen Ortsfunctionen in der ersteren Fläche — analog, wie es Klein für seinen Fall skizzirt.

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ganges wird noch erhöht, wenn man die grosse Analogie beachtet, die derselbe mit dem von Herrn Schottky in seiner Dissertation und seiner Arbeit über conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen in Crelle's J. Bd. 83 genommenen Gange hat. —

Es seien noch einige Worte über den dritten Abschnitt der Klein-schen Schrift hinzugefügt, wenn auch derselbe die hier behandelte Frage nicht berührt. Dieser Abschnitt giebt Untersuchungen über conforme Abbildungen von beliebigen Flächen, welche als Ausführungen der Andeutungen Riemann's in der Schlussnummer der Dissertation anzusehen sind. Dabei schliesst der Verf. wohl im Wesentlichen an die Resultate der oben citirten Schottky'schen Schrift an, geht aber durch Betrachtung der allgemeinsten Flächen und ihre Anknüpfung an die Theorie der algebraischen Functionen über diese Resultate bedeutend hinaus. Insbesondere ist hierbei auf die Betrachtung der symmetrischen Flächen und ihre Eintheilung aufmerksam zu machen — Flächen nämlich, welche eine conforme Abbildung in sich unter Umlegung der Winkel gestatten, und zu denen z. B. solche, schon in der Schottky-schen Arbeit auftretenden, geschlossenen Flächen gehören, welche aus den berandeten entstehen, indem man beide Seiten einer solchen zu einer Gesammtfläche vereinigt. Aber gerade bei diesen Untersuchungen, wie am Anfange des § 21, wäre eine grössere Ausführlichkeit dankenswerth gewesen. — In einer Anmerkung auf S. 67 wird noch dem Zweifel Raum gelassen, ob eine Fläche vom Geschlecht $p > 1$ nicht unter Umständen durch unendlich viele discrete conforme Abbildungen in sich übergehen könne. Diese Möglichkeit bleibt jetzt ausgeschlossen, sowohl durch den algebraischen Beweis, welchen ich im 20. u. 21. Bd. der Math. Ann. gegeben habe, als durch im 19. und 20. Bd. der Math. Ann. enthaltene Noten von Klein über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Gerade der letztere Umstand verdient hier Erwähnung, weil er auf ein neues Gebiet hinweist, dessen Ideen bei allen Forschern wesentlich an den Riemann'schen aufgewachsen sind, das ferner eng mit der von mir angenommenen Entstehung der Theorie der algebraischen Functionen aus einem speciellen Abbildungsproblem zusammenhängt (vergl. insbesondere die nachgelassenen Formeln Riemann's, Werke Nr. XXV, S. 413), und das in seiner Verbindung der geometrischen Betrachtungen, der algebraischen Functionen und der linearen Differentialgleichungen eines der wichtigsten der neueren Analysis zu werden verspricht.

# Beitrag zur Geschichte der Mathematik.

Von
Dr. Eduard Mahler
in Wien.

---

In der historisch-literarischen Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Bd. XX S. 163) drückt Herr Cantor auf Grund einer Talmudstelle* die Vermuthung aus, die Zahl $\pi = 3$ sei orientalischen Ursprungs. Nach weiteren Auseinandersetzungen über diese Talmudstelle sagt Herr Cantor: „Dann folgen noch weitere sehr schwer verständliche Auseinandersetzungen über Flächeninhalte des Kreises, des umschriebenen und des eingeschriebenen Quadrates, für deren Erläuterung wir sehr dankbar wären. Mögen Gelehrte, deren Sprachkenntnisse, von mathematischem Wissen unterstützt, ihnen die Fähigkeit verleihen, jenes Material zu überschauen und zu sichten, sich der für sie wohl nicht übermässigen Mühe unterziehen. Eine Frage, welche gleichfalls von solcher Seite her beantwortet werden müsste, ist die nach dem Alter der betreffenden Talmudstelle."

Ich habe mich nun dieser Aufgabe unterzogen, aber nicht blos diese Talmudstelle, sondern alle damit in Zusammenhang stehenden und auf diesen Gegenstand Bezug habenden Stellen gesichtet und gefunden, dass dieselben für die Geschichte der Mathematik von grösster Bedeutung sind. Nicht nur die Zahl $\pi = 3$ hat — wie dies sämmtliche auf den Kreis Bezug habenden Stellen beweisen — orientalischen Ursprung, auch das Zerlegen eines Flächenstückes in unendlich viele unendlich kleine Elemente, das Summiren von unendlich vielen unendlich kleinen Flächenstreifen, somit das Wesen der Integralrechnung findet sich daselbst vor, was doch für die Geschichte der älteren Mathematik gewiss von Wichtigkeit ist.

---

Der Inhalt der erwähnten Talmudstelle ist folgender:

Rabbi Jochanan sagt, eine Succha mit kreisförmiger Basis soll 24 Ellen im Umfange auf 8 Ellen in der Breite haben, und begründet dies mit den Worten:

A) „Jedes Kreisrund, das im Umfange 3 Spannen hat, hat in der Breite 1 Spanne."

Gegen diese Worte des Rabbi Jochanan polemisirt die Gemarah, indem sie fragt:

---

* Succha, fol. 7, 2.

B) „Um wieviel ist ein Quadrat* grösser als ein Kreis? um $\frac{1}{4}$; nun, dann wären ja 12 genug?“

Hierauf wird erwidert, dass Rabbi Jochanan nicht einen einem Quadrat eingeschriebenen Kreis, sondern einen diesem Quadrat umschriebenen Kreis gemeint habe, und dieser steht zum Quadrate in dem Verhältnisse wie 3:2, denn:

C) „Ein einem Quadrate eingeschriebener Kreis ist um $\frac{1}{4}$ kleiner als das Quadrat; ein diesem Kreise eingeschriebenes Quadrat hat die Hälfte des ersten Quadrates.“

---

Wir entnehmen dem bisher Vorgebrachten, dass bei den Gemarahisten allgemein $\pi = 3$ als Verhältnisszahl zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises galt. Wir entnehmen aber auch, dass die Gemarahisten bereits die Thatsache erkannten, dass Fläche eines einem Kreise umschriebenen Quadrates zur Fläche dieses Kreises in dem Verhältnisse $4:\pi$ ($\pi = 3$ vorausgesetzt) steht [B) und C)] und dass die Fläche eines einem Kreise eingeschriebenen Quadrates halb so gross ist, als die Fläche des diesem Kreise umschriebenen Quadrates [siehe C)].

Es scheint aber auch, dass sie die Begriffe Kreisumfang und Kreisfläche mit einander verwechselten, oder wenigstens glaubten, dass Verhältnisse, die zwischen der Fläche eines Kreises und der eines Quadrates bestehen, auch für die Umfänge gelten; denn anfangs wird nur vom Umfange eines Kreises und Quadrates gesprochen [siehe A)], während der Satz C), der die Worte des Rabbi Jochanan vertheidigt, um so Rabbi Jochanan mit Rabbi in Einklang zu bringen, sich durchaus nur auf Fläche beziehen kann, da nur die Fläche eines Quadrates zur Fläche eines ihm umschriebenen Kreises in dem Verhältnisse $2:\pi$ oder — $\pi = 3$ vorausgesetzt — $2:3$ steht; keineswegs stehen aber die Umfänge in diesem Verhältnisse zu einander. Auch ist die Fläche eines einem Kreise umschriebenen Quadrates zweimal so gross, als die Fläche eines diesem Kreise eingeschriebenen Quadrates; keineswegs gilt dies aber für die Umfänge dieser Quadrate.

Erst die Baleh Tosfeth** erkannten die Thatsache, dass von Fläche auf Umfang nicht zu schliessen sei, und begründen ihre diesbezügliche

---

* Rabbi (d. i. Rabbi Jehudah Hannassi, auch Rabbenuh hakodausch genannt) sagt, ein Succha in Form eines Quadrates soll eine Seitenlänge von 4 Ellen haben.

** Die Baleh Tosfeth waren nächst Raschi die hervorragendsten und bedeutendsten Commentatoren des babylonischen Talmuds; sie lebten 4900 – 5100 n. E. d. W., d. i. 1140 – 1340 n. Chr. Geb. Wer der Verfasser jener Tosfeth-Stelle ist, ist nicht erwähnt, aber im Allgemeinen ist es Rabbi Jitzchak (Ri genannt), der deshalb auch Rabbi Jitzchak Baal Tosfeth heisst. Er studirte in Cordova und galt in ganz Spanien als hervorragende Persönlichkeit. Er lebte 4890

Anschauung damit, dass der Umfang eines Kreises, dessen Diameter $= 4$ ist, gleich ist dem Umfange eines Quadrates mit der Seitenlänge 3, während die Flächen dieser beiden Figuren nicht gleich sind.

Interessant, ja von grösster Wichtigkeit für die Geschichte der Mathematik ist der Beweis, den die Baleh Tosfeth für den Satz liefern, dass Fläche eines Quadrates zur Fläche des ihm eingeschriebenen Kreises in dem Verhältnisse $4:\pi$ oder ($\pi = 3$ vorausgesetzt) $4:3$ steht.

Denken wir uns — sagen die Baleh Tosfeth — einen Punkt und um diesen einen unendlich kleinen unendlich dünnen kreisförmigen Faden gelegt; unendlich nahe um diesen sei ein zweiter unendlich dünner kreisförmiger Faden gelegt, um welchen wieder unendlich nahe ein dritter unendlich dünner kreisförmiger Faden gehen soll u. s. f., bis man eine kreisförmige Fläche erhält, deren Durchmesser 1 Spanne beträgt; dann hat der Umfang 3 Spannen. Nun denke man sich einen Schnitt geführt vom Rande der Kreisfläche bis zum Mittelpunkte hin und die einzelnen Fäden in ihrer Reihenfolge vom äussersten bis zum innersten in Geraden ausgestreckt übereinander gelegt, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis 3 Sp. und dessen Höhe $\frac{1}{2}$ Sp. beträgt. Nun führe man wieder einen Schnitt von der Spitze dieses Dreiecks bis gegen die Mitte seiner Basis hin, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, die längs ihren Hypotenusen über einander gelegt ein Rechteck geben, dessen Basis $1\frac{1}{2}$ Sp. und dessen Höhe $\frac{1}{2}$ Sp. ist und das durch zwei passende Querschnitte in drei Quadrate von der Seitenlänge $= \frac{1}{2}$ Sp. zerfällt.

Nun denke man sich unendlich viele unendlich dünne Fäden von der Länge $= 1$ Sp. unendlich nahe an einander gelegt, bis man ein Quadrat von einer Seitenlänge $= 1$ Sp. erhält, so kann dies als ein vorigem Kreise umschriebenes Quadrat aufgefasst werden. Nachdem aber dieses Quadrat durch passenden Quer- und passenden Längenschnitt in vier Quadrate von der Seitenlänge $= \frac{1}{2}$ Sp. zerfällt, so ist der Beweis geliefert.

---

Dies ist der Gang des Beweises, den die Baleh Tosfeth lieferten; wenn er auch in der Voraussetzung $\pi = 3$ gipfelt, so ist derselbe doch nennenswerth und für die Geschichte der Mathematik von grösster Wichtigkeit, da er das Summiren von unendlich vielen unendlich kleinen Elementen, das Zerlegen eines Flächenstückes in unendlich viele unendlich kleine Flächenstreifen, also das Wesen des Integrirens bringt.

Von Interesse mag auch die Bemerkung sein, die die Baleh Tosfeth auf den Satz der Gemarah:

---

bis 4980 n. E. d. W., d. i. 1130—1220 n. Chr. Geb. Einige behaupten, der Ri sei im Jahre 4863, d. i. 1103 n. Chr. Geb., im Alter von 90 Jahren gestorben.

D) „Jeder Elle in der Richtung der Seitenlänge eines Quadrates entsprechen $1\frac{2}{5}$ Elle in der Richtung der Diagonale"

machen.

Denken wir uns — sagen die Baleh Tosfeth — ein Quadrat mit der Seitenlänge = 10 Einheiten, so hat dasselbe einen Inhalt von 100 Quadrateinheiten. Durch einen passenden Quer- und passenden Längenschnitt kann man das Quadrat in vier Quadrate von 5 Einheiten Seitenlänge zerlegen. Wäre nun der Satz der Gemarah richtig, so würde die Diagonale eines solchen Quadrates, welche gleichzeitig die Seite des dem gegebenen Quadrate eingeschriebenen Quadrates ist, 7 Einheiten und somit das eingeschriebene Quadrat 49 Quadrateinheiten haben, während es in der That 50 Quadrateinheiten hat.

Was die weitere Frage nach dem Alter der betreffenden Talmudstelle betrifft, so giebt uns das Buch „Sepher hadaurauth" (Buch der Geschlechter), das die Männer aufzählt, die sich an der Discussion einer bestimmten Hallachah (rituelles Gesetz) betheiligten, und die Zeit angiebt, in der dieselben hervorragend wirkten, einige Aufklärung. Nach den Angaben dieses Buches soll Rabbi Jochanan im Jahre 3948 n. E. d. W. (d. i. 188 n. Chr. Geb.) Nassi (d. i. Fürst) geworden sein; also stammt die im Eingange erwähnte Hallachah jedenfalls aus dem 2. Jahrhundert n. Chr. Geb.

Schliesslich erachte ich es als angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem vielgeliebten Vater, dem ehrwürdigen Herrn Salam. Mahler (Rabbiner in Pressburg), meinen innigsten Dank für die Mühe auszusprechen, die er sich gelegentlich einer Rücksprache bezüglich dieser Talmudstelle nahm. Auch glaube ich, diesen Dank im Namen aller Fachgenossen abstatten zu dürfen.

---

# Recensionen.

---

Schlegel, Victor, **Lehrbuch der elementaren Mathematik.** 4 Hefte. Wolfenbüttel, bei Zwissler.

Die grosse Zahl der mathematischen Lehrbücher, welche in der letzten Zeit erschienen sind, spricht dafür, dass das Bedürfniss nach Umgestaltung des mathematischen Unterrichts von sehr vielen Lehrern gefühlt wird, dass aber über die Art der Umgestaltung keine Einigung erreicht ist. Dabei ist es besonders erfreulich, dass Männer, welche in der Wissenschaft selbst bereits Tüchtiges geleistet haben, ihre Zeit und Mühe der Abfassung von Lehrbüchern widmen. Schon aus diesem Grunde muss das Erscheinen des vorliegenden Werkes freudig begrüsst und dasselbe einer eingehenderen Besprechung gewürdigt werden. Referent bedauert, durch äussere Umstände an der früheren Abfassung der Anzeige gehindert zu sein.

Herr Schlegel will dem Unterricht nicht einen Leitfaden, sondern ein Lehrbuch zu Grunde gelegt wissen, und vertheidigt seine Ansicht mit schwerwiegenden und, wie uns scheint, unwiderleglichen Gründen. Weil aber der mathematische Unterricht vor Allem „mathematische Bildung anstrebt, bestehend in klarer Erkenntniss des innern Zusammenhanges und der Bedeutung der mathematischen Wahrheiten, in Uebersicht über das Ganze und Einsicht in die einzelnen Theile“, so soll auch das Lehrbuch „vor Allem der wissenschaftlichen Seite ihr Recht werden lassen, ohne sich ängstlich an Pensa zu klammern“. Demgemäss wird die strengste Eintheilung im Ganzen und im Einzelnen, vielfach im Anschluss an Grassmann, durchgeführt. Die Definition der Mathematik und die Begrenzung der einzelnen Zweige, womit das erste Heft beginnt, ist vielleicht selbst für einen Primaner noch zu schwer, gehört aber gewiss zum Besten, was hierüber bis jetzt geleistet ist. Von den aufgestellten vier Zweigen enthält das erste Heft die Arithmetik und die Combinatorik; jede zerfällt in eine reine und angewandte, die reine Arithmetik wieder in die Lehre von den einfachen und den zusammengesetzten Zahlen. Die erste behandelt die sieben Grundrechnungen, und

zwar zuerst für die ganzen positiven oder, wie der Verfasser sagt, die absoluten Zahlen. Erst nachdem diese Lehren vollständig erschöpft sind, treten die „relativen" Zahlen: die Null und die negativen, die Eins und die umgekehrten, sowie die irrationalen Zahlen hinzu. Die complexen Zahlen kommen in diesem Abschnitte noch nicht vor, sondern schliessen sich den quadratischen Gleichungen an. Die Lehre von den zusammengesetzten Zahlen zerfällt in die fünf Abschnitte: Polynome, Proportionen, Gleichungen, Reihen und Kettenbrüche. Ich gehe auf die Einzelheiten, sowie auf die Combinatorik nicht näher ein, obwohl manche Eigenthümlichkeit lobend zu erwähnen wäre; nur glaube ich auf die gemeinschaftliche Methode zur Lösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades aufmerksam machen zu müssen; der einfache Grundgedanke, nämlich die Einführung einer linearen gebrochenen Function der Unbekannten, muss dem Schüler sofort klar werden und sein dauernder Besitz bleiben, während die, auch mitgetheilten, mehr künstlichen Methoden erfahrungsmässig leicht wieder vergessen werden.

Das zweite Heft behandelt die Geometrie, nämlich denjenigen Theil der Raumlehre, welcher den in den Gebieten der Geraden und der Ebene vorkommenden Gebilden gewidmet ist. Wie später in der Stereometrie finden wir die Eintheilung: reine und rechnende Geometrie. Die Berechtigung dieser Eintheilung möchten wir sehr bezweifeln; die Darstellung des Flächenraumes als eines Productes von Strecken und die Kreisrechnung sind unseres Erachtens auf's Engste mit der „reinen" Geometrie verbunden und finden in derselben ihre naturgemässe Stellung. Die reine Geometrie zerfällt in eine Geometrie der bewegten und der ruhenden Gebilde. Nachdem in der Einleitung der Begriff der Richtung vorausgesetzt und darauf die Parallelentheorie begründet ist, wird die Bewegung meisterhaft durchgeführt; dieselbe dient nicht nur zur wesentlichen Vereinfachung der Beweise, sondern bietet auch ein ganz vorzügliches Eintheilungsprincip, und wir bedauern nur, uns dieser Begründung der Parallelensätze nicht anschliessen zu können. Die Geometrie der ruhenden Gebilde baut sich auf der Projectivität und diese auf der perspectivischen Lage auf. Kurz, aber klar und einfach werden Congruenz, Affinität, Aehnlichkeit und Collineation unterschieden, jedoch werden nur die beiden letzten genauer behandelt. Da zunächst die ähnlichen Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt zum Aehnlichkeitspunkt haben, so ergeben sich ihre Eigenschaften mit besonderer Einfachheit. Daran schliesst sich die Aehnlichkeit bei verkehrt-perspectivischer Lage, die Lehre von den ähnlichen Polygonen und die Anwendung auf Kreise. Die Mehrzahl der bei der Collineation behandelten Sätze könnte vielleicht ebenso gut der Aehnlichkeitslehre zugeordnet werden.

Auch das dritte Heft: die ebene Trigonometrie, nebst einer (auch einzeln verkäuflichen) vierstelligen Logarithmentafel, bietet, theilweise

im Anschluss an Grassmann, viele Eigenthümlichkeiten, welche grösstentheils für Vorzüge erklärt werden müssen. Zwar können wir es nicht billigen, dass zuerst der Cosinus spitzer Winkel allseitig behandelt und sogar das Additionstheorem für denselben abgeleitet wird, ehe die übrigen Functionen definirt sind. Wir verkennen die Bedeutung der Gründe nicht, welche der Verfasser für diese Behandlung anführt, glauben aber, dass die Wichtigkeit dieser Functionen gerade in ihrer Verbindung beruht. Abgesehen hiervon, hat uns dieser Abschnitt sehr gut gefallen. Nachdem die Functionen des spitzen Winkels vollständig erschöpft sind, wird der Cosinus eines beliebigen Winkels, dessen Schenkel gleich lang sind, definirt als die „Projection eines Schenkels auf den andern, dividirt durch den andern". Die anderen Functionen ergeben sich durch einfache Rechnung, und neben den hohen wissenschaftlichen und pädagogischen Vorzügen, welche dieser Methode eigen sind, fällt es wenig ins Gewicht, dass auf die Anschaulichkeit für die anderen Functionen verzichtet werden muss. Im Weitern enthält dieses Heft eine gründliche Theorie der einfacheren unendlichen Reihen, bei den Dreiecksberechnungen genaue Berücksichtigung der Radien der Kreise, die trigonometrische Lösung der quadratischen und kubischen Gleichungen und unter den Aufgaben Grassmann's Verfahren, rationale schiefwinklige Dreiecke zu bestimmen, nebst einer Tafel von je 100 rationalen rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecken.

Das vierte Heft, die Stereometrie und sphärische Trigonometrie enthaltend, reiht sich den früheren würdig an. Namentlich muss hervorgehoben werden, dass es dem Verfasser gelungen ist, die Eintheilung und die Beweisverfahren genau dem im zweiten Hefte befolgten Gange nachzubilden, ein Umstand, welcher unbedingt einen wesentlichen Vorzug vor der gebräuchlichen Behandlungsweise bildet. Nur die Stereometrie der ruhenden Gebilde ist mit Recht weggelassen. Gleichwie das zweite Heft im Anhange eine elementare Theorie der Kegelschnitte bietet, welche sich auf die Grundeigenschaft der Brennstrahlen gründet, so ist dem vierten Hefte eine elementare Beschreibung der Flächen zweiten Grades beigegeben.

Schliesslich müssen wir noch erwähnen, dass der gebotene Stoff äusserst reichhaltig ist, dass das erste und dritte Heft zum Schluss eine Uebersicht über alle Formeln und Regeln enthält, häufig verbunden mit Anleitungen zur Rechnung, dass dem zweiten und vierten Hefte reichliche Aufgabensammlungen beigegeben sind und dass ein Anfangs- und ein alphabetisches Schlussregister in jedem Hefte genau über den Inhalt orientirt.

Was nun die Form anbetrifft, so ist die starre euklidische Behandlung, in welcher jeder Satz für sich ein kleines Ganze bildet, vollständig verlassen. Wie in den Beweisen die Bewegung in ihrem ganzen Ver-

laufe beschrieben wird, so schreitet auch die Entwickelung in stetigem Gange fort und der Lehrsatz erscheint stets als das letzte Glied in einer äusserst knappen, aber doch klaren Darlegung. Nur wenn die Beweise des Verfassers sich wesentlich von den gebräuchlichen unterscheiden, sind die letzteren in Anmerkungen beigegeben.

Wir sehen, es sind hier ganz einschneidende Aenderungen in der Anordnung des Stoffes, in der Beweisführung und in der Darstellungsweise vorgenommen. Die Frage, ob der Herr Verfasser zuweilen nicht zu weit gegangen ist, vermögen wir nicht zu entscheiden. Gewiss sind die in den Vorreden entwickelten Ansichten vollständig richtig, wenn sich auch über Einzelnes noch rechten lässt. Aber wie der Unterricht selbst, so muss auch das Lehrbuch auf die menschlichen Schwächen Rücksicht nehmen; vor Allem muss das Verständniss erleichtert werden, und wenn dabei der systematische Aufbau nicht ganz gewahrt werden kann, so darf in dieser Hinsicht dem Lehrer am ehesten etwas überlassen werden. So möchten wir den Verfasser bitten, diejenigen Gesetze der Arithmetik, welche nur für positive ganze Zahlen gelten, äusserlich kenntlich zu machen, damit sie der Schüler von den allgemein giltigen Gesetzen unterscheiden könne. Die irrationalen Zahlen sind unserer Ansicht nach zu kurz behandelt; namentlich hätten wir eine Begründung der Möglichkeit gewünscht, mit irrationalen Zahlen zu rechnen, da wir hierin wesentlich ein Rechnen mit Ungleichheiten erblicken.

Einige Beweise haben wir trotz des eifrigsten Bemühens nicht verstehen können, z. B. den Beweis des Satzes (H. II S. 21): Werden zwei Gerade von einer Anzahl Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf der einen Geraden, wie die auf der andern; ebenso den ersten Beweis für den Fundamentalsatz der Stereometrie (H. IV S. 21), während der zweite unrichtig ist. In H. II, S. 86, Satz 189, wird ohne Beweis angenommen, dass congruente Polygone immer durch Drehung um einen Punkt zur Deckung gebracht werden können. Aehnliche Bedenken haben wir bei den Beweisen der Sätze 201, 255, 123 und 172; in den letzten Fällen gilt der Beweis nicht für alle Lagen der Gebilde.

Diese kleinen Ausstellungen können dem Werthe des Ganzen keinen Abbruch thun. Kein Lehrer darf es unterlassen, in die eigenthümlichen Methoden und Gruppirungen des Buches einzudringen, und sehr viele werden mit dem Referenten erkennen, wie grosse Förderung dieses Buch unter der Leitung eines tüchtigen Lehrers dem Unterricht zu gewähren vermag.

Brilon. Dr. Killing.

Schendel, Leopold, **Beiträge zur Theorie der Functionen.** Halle, bei H. W. Schmidt.

Das vorliegende Werkchen darf auf eine um so freundlichere Aufnahme rechnen, da der Herr Verfasser, soviel wir wissen, noch in Japan weilt* und durch diese schöne Arbeit das Band, welches ihn mit den Mathematikern seines Vaterlandes verbindet, noch fester knüpft.

Der Inhalt steht in nahem Zusammenhang mit dem dreier Abhandlungen, welche der Verfasser in Borchardt's Journal (Bde. 80, 82, 84) veröffentlicht hat. Namentlich ist es die letzte, unter demselben Titel erschienene Abhandlung, welche hier weiter ausgeführt ist, und das dort aufgestellte allgemeine Gesetz, welches lehrt, wie man eine Function durch eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede $(x+y)(x+qy)(x+q^2y)\ldots$ $\ldots(x+q^{n-1}y)$ darstellen könne, liegt auch den Entwickelungen dieser Arbeit zu Grunde. Wie diese Reihe eine Verallgemeinerung der Taylorschen darstellt, so steht mit ihr eine Verallgemeinerung der Differentialquotienten, der Binomialcoefficienten u. A. in engster Verbindung. Diese neuen Betrachtungen, deren Keime sich allerdings in früheren Arbeiten finden, lassen, wie das Werkchen zeigt, zahlreiche Anwendungen zu, namentlich auf die Darstellung der elliptischen und der Kugelfunctionen.

Die Beweise kommen ihrem Wesen nach meistens nur auf eine Verification hinaus. Darum begnügt sich der Verfasser auch, zu zeigen, dass die gewonnenen Resultate den gestellten Bedingungen formell genügen, ohne auf Convergenzbedingungen u. dergl. näher einzugehen. Das war indessen um so weniger nothwendig, als die erhaltenen Formeln meistens bekannt sind und das Interesse vor Allem durch den Zusammenhang mit der neuen Theorie und durch die besonders einfache Herleitung bedingt wird. Auf S. 25 und 26 entwickelt der Verfasser eine neue Auffassung der unendlichen Reihe, nach welcher dieselbe als eine stetige Folge von Elementen angesehen und deshalb mit einer Geraden verglichen wird. Wir haben uns indessen, abgesehen von der Künstlichkeit dieser Auffassung, nicht überzeugen können, dass dieselbe besondern Vortheil biete; wir glauben doch nicht, dass er die Darstellung einer beliebigen Function der Lage eines Punktes in einem Gebiete von $\nu$ Dimensionen durch harmonische Kugelfunctionen von $\nu$ Dimensionen hiermit zusammenstellen will.

Brilon. Dr. Killing.

---

J. C. Maxwell, **An elementary Treatise on Electricity.** Edited by W. Garnett. Oxford 1881. 208 S.

Das Werk ist ein Fragment aus dem Nachlass Maxwell's, welches durch Abschnitte seines grössern Werkes über Elektricität und Magnetis-

* Herr Schendel ist inzwischen nach Europa zurückgekehrt. (D. Red.)

mus von dem Herausgeber möglichst ergänzt wurde, so dass eine vollständige Abhandlung über die elektrischen Erscheinungen entstanden ist, soweit diese nicht auf der Wechselwirkung zwischen bewegten elektrischen Massen beruhen.

In der fragmentarischen Vorrede des Verfassers sagt derselbe, dass er seither die Ueberlegenheit der Methode Faraday's über diejenige der Gründer der mathematischen Theorie der Elektricität erkannt habe. Demgemäss findet man in dem Werke manche Gesetze an der Hand von Experimenten nachgewiesen, die man gewohnt ist nur als Resultate analytischer Operationen angeführt zu sehen.

Nachdem der Verfasser an einzelnen Versuchen die Wirkungen der Elektricität gezeigt und einige Apparate erklärt hat, beschäftigt er sich eingehend mit dem Potential und leitet Sätze über dasselbe her. Dabei stellt er interessante Betrachtungen an über Potential, Temperatur und über Pressung in Flüssigkeiten, indem er auf Uebereinstimmung und Abweichung hinweist. Auch sucht er verschiedene Sätze Green's auf elementare Weise plausibel zu machen. Eingehend beschäftigt er sich mit der Untersuchung des elektrischen Feldes; er untersucht die Gleichflächen und Kraftlinien und giebt geometrische Constructionen derselben an, die auf elementarer Grundlage beruhen. Verschiedene interessante Beispiele sind auf Steindrucktafeln dem Werke beigegeben. Weiter untersucht der Verfasser die Faraday'schen Inductionsröhren (Kraftlinienröhren) und zieht die elektrischen Bilder in Betracht. Die Fortpflanzung der Elektricität (Strom) in Leitern, Elektrolyten und Nichtleitern wird eingehend untersucht. Sowohl die Wärmeerzeugung durch Elektricität, als auch die Erzeugung von Elektricität durch Wärme wird besprochen. Hieran reihen sich die Erzeugung und Erhaltung elektrischer Ströme, sowie die Messung derselben. Mit der Untersuchung des elektrischen Widerstands schliesst das Werk ab.

Pilgrim.

---

**Der Hydromotor** von Dr. Fleischer. Kiel 1882.

**Die Physik des Hydromotors** von Dr. Fleischer. Kiel 1882.

In zwei kleinen Schriften giebt der Verfasser Auskunft über die Einrichtung und Theorie seiner Erfindung, den Dampfdruck unmittelbar auf eine Wassersäule einwirken zu lassen, um Fortbewegung und Steuerung von Schiffen aller Art zu erzielen. Es wird dabei die lebendige Kraft des Ausflusswassers nach Analogie der Reactionsmaschinen verwerthet. Der Verfasser rechnet auf grösseren Nutzeffect und Ersparniss an Gewicht, Raum und Unterhaltungskosten.

P. Zech.

---

**Rottok, Die Deviationstheorie.** Berlin, Reimer. 1881.

Der Verfasser giebt eine vollständige Theorie der Einwirkung des Schiffsmagnetismus auf die Compassnadel, hauptsächlich zum Gebrauch an Navigationsschulen. Bedeutet $\delta$ den Deviationswinkel der Nadel und $\zeta$ den Winkel des magnetischen Meridians mit der Kursrichtung, so lässt sich $\delta$ als Function der Sinus und Cosinus von $\zeta$ und $2\zeta$ ausdrücken. Die Coefficienten, die dabei auftreten, werden durch Beobachtungen von $\delta$ für verschiedene $\zeta$ bestimmt, wie an einigen Beispielen gezeigt wird. Da dieselben von der Intensität des Magnetismus abhängen, so werden die Aenderungen der Deviation von Ort zu Ort ausführlich dargelegt. Ferner wird die Deviationsänderung bei einer Seitenneigung des Schiffes berechnet.

Nachdem auf diese Weise die Deviation nach allen Seiten hin bestimmt ist, wird gezeigt, wie man den Fehler durch passende Aufstellung von Magneten beseitigen kann. Endlich wird nachgewiesen, wie man das Deviationsmagnetometer zu allen nöthigen Messungen verwenden kann. Die klare Darstellung, die einfache Behandlung und die Uebersichtlichkeit rechtfertigen vollkommen die Erwartung des Verfassers, bei den Fortschritten im Eisenschiffbau einem Bedürfniss nach einer solchen Arbeit entgegenzukommen.

P. Zech.

---

**Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus.** Leipzig, Teubner. 1881.

Die im Sommer 1857 von dem berühmten Physiker in Königsberg gehaltenen Vorträge über Magnetismus werden hier von seinem Sohne, dem Leipziger Professor der Mathematik, veröffentlicht. Es wird darin die Theorie der magnetischen Induction gegeben, die allgemeinen Differentialgleichungen aufgestellt, einige Beispiele aufgestellt und zum Schluss das allgemeine Problem der magnetischen Induction auf die Ermittelung einer „charakteristischen Function" zurückgeführt.

P. Zech.

---

**Krebs, Grundriss der Physik für höhere realistische Lehranstalten.** Leipzig, Veit. 1882.

Der Verfasser ist den Physikern als Mitarbeiter am zweiten Theile des Lehrbuchs der Physik von Fliedner bekannt. Er giebt hier einen Grundriss der Physik, welcher als Lehrbuch für Schüler von Realschulen erster Ordnung und von höheren Gewerbeschulen dienen soll. Wir besitzen auf diesem Gebiete schon eine ganze Reihe von Lehrbüchern, so dass ein Bedürfniss für ein neues nicht vorliegt, um so weniger, wenn es sich ganz auf dem hergebrachten Wege der Behandlung des Stoffes

bewegt. Allerdings glaubt der Verfasser den Anforderungen der neueren Wissenschaft Rechnung getragen zu haben, er verweist z. B. auf die Einführung des „absoluten“ Systems statt des „irdischen“. (Unter dem letzten ist natürlich das conventionelle, wie es Herwig genannt hat, zu verstehen; die Bezeichnung „irdisch“ ist wenig glücklich.) In dem ganzen Buche finden sich aber nur S. 32 einige Sätze darüber, die einen klaren Unterschied nicht begründen, da von den Einheiten und Dimensionen der Einheiten Nichts gesagt ist. An anderen Stellen, z. B. bei der Schwingungsdauer (§§ 184 und 274), ist keine Rücksicht darauf genommen. Es ist dem Verfasser kein Vorwurf darüber zu machen: für die Stufe, auf die das Buch berechnet ist, passt wohl die volle Einführung des absoluten Maasses nicht. Ebenso wenig scheinen die Reuleaux-schen Aufstellungen über Maschinen hierher zu gehören. Auch kann man eine Abhandlung der Meteorologie auf 15 Seiten eine „eingehende“ wohl nicht nennen, wie es der Verfasser thut.

Doch von alledem liesse sich absehen: was an Stoff vorgebracht werden soll, hängt von der Individualität des Lehrers und der Art der Schüler ab; jedenfalls aber kann man heutzutage Exactheit in Aufstellung der Begriffe verlangen. Ich habe früher Gelegenheit gehabt, darauf aufmerksam zu machen, wieviel Verstösse in dieser Richtung bei den gewöhnlichen Lehrbüchern noch immer vorkommen, und finde auch im vorliegenden Falle nichts Besseres. Sucht man sich über die Begriffe Masse, Gewicht, Schwere zu orientiren, so findet man S. 7 die Masse mit Hilfe des Druckes auf die Unterlage definirt und diesen Druck S. 8 als Gewicht bezeichnet. Im Folgenden wird dann (S. 30) die Masse als die Summe des Trägen am Körper bezeichnet und das Gewicht mit Anziehung der Erde oder Schwerkraft identificirt und daraus abgeleitet, dass die Masse gleich Gewicht dividirt durch die Erdbeschleunigung sei. Wenn dann noch der Satz kommt: „Gleiche Massen haben an allen Orten der Erde gleiche Gewichte“, so wird man wohl nicht weiter nach klaren Worten suchen und sich auch nicht wundern, dass der Verfasser sich die Schwere gegen den Erdmittelpunkt gerichtet denkt, die Anziehung dagegen nicht (vergl. S. 6 und 120), während vorher beide gleich gesetzt wurden. Sieht man sich nach den Schwingungen um, z. B nach der Formel für die Schallgeschwindigkeit (S. 247), so findet man $a\sqrt{\frac{e}{d}}$ und wird auf § 163 verwiesen: was $a$ sein soll, steht dort nicht, und wenn man auf § 81 zurückgeht, auf welchen wieder verwiesen wird, so findet man abermals zwei verschiedene Formeln ohne Andeutung, woher diese Verschiedenheit kommt, und die Definition einer Kraft, die deutlich zeigt, dass dem Verfasser die absoluten Maasse noch fremd sind. — Die Ausstattung des Buches ist sehr zu loben.

P. Zech.

**Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene**, von Dr. ADOLF HOCHHEIM, Professor. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. *A.* Aufgaben, 79 S. *B.* Auflösungen, 102 S. Leipzig 1882, bei B. G. Teubner.

Wenn in jeder Wissenschaft das Wissen von dem Können bis zu einem sichern Grade zu unterscheiden ist, wovon jenes durch den theoretischen Unterricht eines Lehrers, dieses nur durch eigene Thätigkeit des Schülers erworben werden kann, so ist diese Unterscheidung in der Mathematik ganz besonders zu machen. Es kommt hinzu, dass hier das Können neben dem Wissen durchaus unentbehrlich ist, und zwar in um so höherem Grade, als das betreffende Gebiet der Mathematik häufiger in andere eingreift; das haben die Verfasser der vielverbreiteten Uebungsbücher über Algebra, über Geometrie, über Differential- und Integralrechnung wohl eingesehen. Eine Aufgabensammlung der analytischen Geometrie ist unseres Wissens seit der von Ludwig Immanuel Magnus (Berlin 1833) nicht erschienen. Die Verfasser der meisten umfangreicheren Lehrbücher ersetzten den nicht zu leugnenden Mangel durch eingestreute, meistens an das Ende der einzelnen Capitel verwiesene Aufgaben, die, an sich ganz vortrefflich, nur den Umstand gegen sich hatten, einzig von dem Besitzer des ganzen Werkes benutzt werden zu können. Herr Hochheim hat darum, wie uns scheint, das Gefühl für ein wirkliches Bedürfniss an den Tag gelegt, indem er Aufgaben zur analytischen Geometrie und Auflösungen derselben in je einem besondern Heftchen der Oeffentlichkeit übergab. Für's Erste sind Aufgaben über Gerade, Punkte und Kreislinie gewählt. Da naturgemäss vom Einfacheren zum Verwickelteren fortgeschritten wird, so mag die durch den Titel verrathene Anordnung des Stoffes zunächst überraschen, sie erklärt sich aber dadurch, dass bei den auf Punkte bezüglichen Aufgaben die Anwendung von Liniencoordinaten vorausgesetzt ist, welche erst nach genügender Uebung im Gebrauche der Punktcoordinaten bei Sätzen über die Geraden erlernt zu werden pflegt. Bei den Kreisaufgaben sind wieder ausschliesslich Punktcoordinaten benutzt; wer also auf die Einübung dieser sich beschränken will, wird die Aufgaben 314—366 (S. 45—52 der Aufgaben, S. 60—70 der Auflösungen) überschlagen. An irgend ein bestimmtes Lehrbuch schliesst die Sammlung nicht an. Sie setzt nur, wie aus dem soeben Bemerkten leicht erschlossen werden kann, voraus, dass die modernen Methoden der analytischen Geometrie dem Benutzer bekannt sind. Die Sammlung wird also beispielsweise neben den Lehrbüchern von Joachimsthal und Hesse ihre Dienste nicht versagen. Zur Beurtheilung des Werthes einer jeden Aufgabensammlung ist naturgemäss auch die Zuverlässigkeit der angegebenen Auflösungen in Betracht zu ziehen. Nach dieser Richtung haben wir die uns vorliegenden Heftchen noch nicht prüfen können. Herr Hochheim hat sich übrigens

gerade mit analytisch-geometrischen Abhandlungen von zu vortheilhafter Seite bekannt gemacht, als dass nicht die Vermuthung im Voraus dafür spräche, er werde gewusst haben Rechenfehler zu vermeiden.

Cantor.

---

**Récréations mathématiques** par M. Édouard Lucas. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire. 1882. XXIII, 251 S.

Von Herrn Lucas, dem auch in Deutschland besonders durch seine Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und der einfach periodischen Functionen wohlbekannten französischen Mathematiker, erschienen seit einigen Jahren in der Zeitschrift „La revue scientifique" kleine in losem Zusammenhang stehende Aufsätze unter obigem Titel. Dieselben erscheinen nunmehr in neuer Redaction und mit nicht unwesentlichen Erweiterungen abermals in Buchform. Die Bezeichnung mathematischer Ergötzungen war in früheren Zeiten eine ganz übliche; in Frankreich selbst gab, nachdem Bachet de Méziriac mit seinen „Problèmes plaisants et délectables"* die Bahn eröffnet hat, Ozanam seine gleichbenannte inhaltsreiche Schrift heraus, und wir Deutsche können uns der „Deliciae mathematico-philosophicae" des Altdorfer Professors Schwenter rühmen, welche allerdings auch nach einem französischen Vorbilde gearbeitet sind, dabei aber des Originellen und Verdienstlichen recht viel enthalten. Man wird von vornherein annehmen dürfen, dass dieses neue Buch einen höheren Standpunkt einnimmt, als alle seine Vorgänger, und in der That kann die Aufschrift hier nicht mehr wörtlich genommen werden: es sind ausschliesslich ernste wissenschaftliche Aufgaben, mit welchen sich der Verf. beschäftigt, und nur die Einkleidung dieser Aufgaben ist es noch, welche an bekannte Spielzeuge, Räthsel und Scherzfragen erinnert. Die mathematischen Hilfsmittel, welche zur Verwendung gelangen, gehören hauptsächlich der elementaren Zahlentheorie, der Combinationslehre und jener Gattung räumlicher Probleme an, welche der Franzose als „géométrie de position", der Deutsche aber vielleicht zutreffender als „Analysis situs" zu bezeichnen pflegt.

Die Einleitung enthält eine Reihe geschichtlicher Nachweisungen über solche ältere Untersuchungen, deren Gegenstand mit den im Buche selbst behandelten Dingen in einem gewissen Zusammenhange steht. Leibniz's Versuch einer „Lagerechnung" beginnt den Reigen, dann folgt eine grössere Anzahl von Arbeiten über das sogenannte Rössel-

---

* Wir machen bei diesem Anlasse darauf aufmerksam, dass ungefähr 8 Jahre vor der Vorlage und im gleichen Verlage dieses für die Geschichte der älteren Zahlenlehre unschätzbare Werk zum dritten Male aufgelegt worden ist (1. Aufl. 1612, 2. Aufl. 1624). Professor Labosne hat diese neue Ausgabe besorgt und zugleich die allerdings sehr nöthigen Erläuterungen hinzugefügt.

sprungproblem, die Königsberger Brückenaufgabe, die magischen Quadrate und endlich jene Art geometrischer Betrachtungen, für welche unlängst vom Ref. die zusammenfassende Bezeichnung „Geometrie der Gittersysteme" in Vorschlag gebracht worden ist. Der Leser ist somit, wenn er diese „Introduction" gelesen hat, über den Charakter dessen, was ihm im Folgenden geboten wird, so ziemlich ins Klare gesetzt. Wir wollen jetzt die acht Capitel, in welche das Ganze zerfällt, einer kurzen Besprechung unterziehen.

I. Le jeu des traversés en bateau. Dem Sinne nach ist dieses Spiel bereits in der erwähnten Sammlung Bachet's enthalten, über dessen Leben und Leistungen demzufolge einige Mittheilungen gemacht werden. Die Fassung dieser Aufgabe ist bei uns in Deutschland gewöhnlich diese: Drei Herren kommen mit ihren Dienern, welche gegen erstere böse Absichten hegen, an einen Fluss, über den eine Fähre führt, in welcher nur zwei Personen Platz finden. Wie gelangen nun alle sechs hinüber, ohne dass jemals irgendwo zwei Diener mit einem der Herren zusammen allein sind? Herr Lucas verallgemeinert die Aufgabe, die Zahl 3 durch $n$ ersetzend, macht dabei gelegentlich auf einen Irrthum aufmerksam, welchen Tartaglia eben bei diesem Räthsel begangen hat, und fügt schliesslich noch die Erschwerung hinzu, dass er das Boot auf einer Insel im Flusse Halt machen lässt. Zum Verständniss dieses ersten Abschnittes, der eigentlich nur ein Probestück strenger Logik darstellt, sind mathematische Vorkenntnisse nicht erforderlich, um so mehr aber für den zweiten, der nunmehr an die Reihe kommt.

II. Le jeu des ponts et des iles. Im Jahrgang 1759 der preussischen Akademieschriften findet man eine Abhandlung von Leonhard Euler über die Brücken der Stadt Königsberg i. Pr.* Das Centrum derselben ist die Insel Kneiphof, von welcher aus mehrere Brücken zum Festlande, sowie zu benachbarten Inseln führen, und Euler warf nun die Frage auf: Welche Bedingungen giebt es für die Anzahl der Inseln und Brücken, damit man bei einem Gange sämmtliche Brücken ein einziges Mal, keine aber mehrere Male zu überschreiten brauche? Um hierauf die Antwort zu finden, studirt Herr Lucas das Wesen der Figuren, deren Umfassungslinie in Einem Zuge beschrieben werden kann, wie dies z. B. bei den Sternpolygonen der Fall ist, und kommt so zur Aufstellung der nöthigen Regeln, um ein Kriterium aufzustellen. Es scheint dem Verf. entgangen zu sein, dass L. Kunze in seinem trefflichen Lehrbuche der Planimetrie dem Gegenstande eine so äusserst einfache Fassung

* Da wir Deutsche doch gern in geographischer Beziehung unseren westlichen Nachbarn etwas am Zeuge flicken, so möge unser geehrter College sich hier auch die kleine Berichtigung gefallen lassen, dass Königsberg, die Hauptstadt Ostpreussens, nicht zu Pommern gerechnet werden darf.

ertheilt hat, um ihn sogar geometrischen Anfängern zugänglich zu machen (vergl. auch Th. Schroeder's Lehrbuch der Planimetrie, Nürnberg 1882, S. 14).

III. Le jeu des labyrinthes. Eine sehr interessante Anleitung, sich durch Schlüsse aus einem Wirrsal zusammenhängender Gänge — der Verf. nennt als Beispiel die berühmten Katakomben von Paris — herauszufinden. Besonders wichtig auch in wissenschaftlicher Hinsicht wird diese Aufgabe dadurch, dass sie von Lucas mit der durch verschiedene französische Geometer ausgebildeten Theorie der Verzweigungen („ramifications") in Beziehung gesetzt wird. Wir möchten jedoch daran erinnern, dass ausser Listing auch noch andere deutsche Mathematiker, nämlich Hierholzer und Wiener (im 6. Bande der Clebsch'schen Annalen), sich mit der Entwirrung eines Labyrinthes beschäftigt haben.

IV. Le problème des huit reines au jeu des échecs. Wir erhalten zunächst eine kurze Geschichte dieser interessanten combinatorisch-geometrischen Aufgabe: Anzugeben, wie und wie oft auf einem regelmässigen Plangitter von $n^2$ Zellen je $n$ Zellen so gewählt werden können, dass sie unter sich weder in vertikaler, noch in horizontaler, noch endlich in diagonaler Richtung zusammenhängen. Mit ihr hat sich bereits Gauss beschäftigt, Bellavitis, Parmentier, La Noë, Laquière, Glaisher und der Berichterstatter haben Vorschriften zu ihrer Lösung gegeben. Diese Methoden werden durchgesprochen und analysirt. Den Vorzug unter ihnen verdient zweifellos diejenige des jetzt in Algier als Beamter lebenden ehemaligen Pariser Polytechnikers Laquière, welcher es möglich gemacht hat, die 92 verschiedenen Lösungen, deren die Aufgabe bei Zugrundelegung des gewöhnlichen Schachbrettes fähig ist, durch einen der Sache ganz Unkundigen in überraschend kurzer Zeit hinschreiben zu lassen. Zum Schlusse wird gezeigt, in welch' enger Beziehung dieses Schachproblem zu der von E. Lucas in einer selbstständigen Monographie abgehandelten „Geometrie der Gewebe" steht, welch' letztere selbst wieder eine einfache Consequenz zahlentheoretischer Wahrheiten ist.

V. Le jeu du solitaire. Ueber die mathematische Bedeutung des Einsiedlerspieles, welches bereits von Leibniz als ein sehr geistreiches erkannt ward, ist besonders durch Vandermonde und späterhin durch Reiss Licht verbreitet worden, auf deren Arbeiten natürlich auch hier mehrfach Bezug genommen wird. Zum Spiele gehört ein Schachbrett von meistentheils 25 Zellen; auf jede Seite sind symmetrisch gegen den Mittelpunkt drei weitere Zellen aufgesetzt, so dass deren mithin im Ganzen 37 vorhanden sind. In der Mitte einer jeden solchen Zelle befindet sich ein kleines mit einem Pflöckchen verschlossenes Loch. Ein solcher Pflock wird herausgezogen, und nunmehr tritt die Spielregel in Geltung, welcher zufolge ein Stift dann einen zweiten wegschlagen darf, wenn er,

sei es in der Zeilen-, sei es in der Colonnenrichtung, über einen andern Stift weg in eine freie Oeffnung gelangen kann. Man sieht, dass sich je nach der Lage der zuerst gemachten Oeffnung und nach der Beschaffenheit der ersten Fortbewegung die mannigfachsten Abwechselungen ergeben, bis es endlich gelingt — oder auch nicht gelingt —, das Brett von allen Pflöcken bis auf einen zu befreien. Eine grosse Anzahl dieser Möglichkeiten wird erörtert und auf bestimmte — dem Wesen nach natürlich auch wieder zahlentheoretische — Sätze zurückgeführt.

VI. La numération binaire. Nach kurzer Erwähnung des von Stevin befürworteten Duodecimalsystems setzt Herr Lucas die Eigenthümlichkeiten der binären Zählung auseinander, welche, lediglich von den Zahlzeichen 0 und 1 Gebrauch macht, dabei auch Leibniz' irrthümlicher Identificirung der chinesischen Kua's mit diesem System gedenkend. Hierauf weist er nach, dass mit Gewichtsstücken von 1 bis $2^{n-1}$ Gewichtseinheiten sämmtliche Wägungen von Körpern vorgenommen werden können, die nicht mehr als $2^n$ derartige Einheiten wiegen, und widmet auch dem sogenannten „mysteriösen Fächer“ einige Worte. Ein Excurs über die „vollkommenen“ Zahlen, deren Theilersumme der Zahl selbst gleich ist, beschliesst diese Abtheilung.*

VII. Le jeu du baguenaudier. Eine Anzahl Ringe ist auf einem Stabe aufgereiht und durch Drähte, die in einer Metallplatte befestigt sind, verbunden; es gilt, dieselben sämmtlich von dem Stabe loszumachen. Dieses originelle Spielzeug, welches in Süddeutschland unter dem Namen „Zankeisen“ bekannt ist und der Volkssage nach von einem zum Tode verurtheilten Mechaniker als Bedingung seiner Begnadigung erfunden sein soll, dankt, wie uns des Verf. bibliographische Angaben belehren, seine Entstehung in Wirklichkeit dem ebenso scharfsinnigen, als excentrischen Cardanus. Höchst elegant ist das Verfahren, welches dieses anscheinend recht wenig mathematische Geduldspiel ebenfalls auf das binäre Zahlensystem und weiterhin auf gewisse combinatorische Gruppenbildungen zurückführt.

VIII. Le jeu du taquin. Dies ist das neuerdings in die Mode gekommene Fünfzehnerspiel, von den Engländern „*boss puzzle*“ genannt. Herr Lucas theilt die von den Amerikanern Wolsey Johnson und Story aufgestellte combinatorische Theorie dieses Spieles mit, bringt aber an demselben noch gar manche Erweiterungen an und zeigt, in welchen Fällen diesen verallgemeinerten Anordnungen genügt werden kann, in welchen nicht. Zur Ergänzung sei auch zweier deutscher Schriften ge-

---

* Es hätte sich empfohlen, an dieser Stelle näher auf den im Register allerdings kurz erwähnten Hindenburg'schen Aufsatz über das Dechiffriren solcher Geheimschriften einzugehen, welche durch Gitter geschrieben sind. In seinen Erläuterungen dieser Art Kryptographie macht der Erfinder der combinatorischen Analysis von der dyadischen Zahlenschreibung einen umfassenden Gebrauch.

dacht, in welchen ebenfalls eine abschliessende theoretische Behandlung dieser Aufgabe enthalten ist und deren eine von Herrn Schubert in Hamburg, die andere von einem Professor D. D. herrührt, hinter welcher Chiffre sich, wenn wir nicht sehr irren, eine bekannte Capacität verbirgt. In dieser kleinen Schrift (Dresden, Jaenicke) wird die Lösung in sehr einfacher Weise mittelst ebensolcher Inversionalabzählungen erbracht, wie man deren beim Ausrechnen einer Determinante benöthigt. —

Den Beschluss unseres Werkes machen einige mathematische Anhänge, unter denen besonders Nr. 4 hervorragt, eine Methode zur Prüfung sehr grosser Zahlen von der Form $(2^n - 1)$ auf ihre Primzahleigenschaft enthaltend, und sodann ein bibliographischer Index von grosser Reichhaltigkeit. Wenn sich derselbe auch, wie unsere Bemerkungen ersehen lassen, noch in einigen Punkten vervollständigen lassen wird, so ist doch dadurch eine sehr dankenswerthe Grundlage für weitere Studien auf diesem bisher nicht genug beachteten Grenzgebiete des Exacten gegeben.

Wir nehmen von dem schönen Buche Abschied mit der Hoffnung, bald einer Fortsetzung der darin niedergelegten Untersuchungen zu begegnen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

**Sechs Karten zur mathematischen Geographie** von Dr. A. Steinhauser, k. k. Regierungsrath. Wien, Verlag von Artaria & Co.

Wir haben in einem der letzten Hefte dieser Zeitschrift das ausgezeichnete populäre Lehrbuch der mathematischen Geographie und Projectionslehre Steinhauser's besprochen und lassen nunmehr dieser Besprechung auch noch die Anzeige eines Lehrmittels folgen, welches zunächst allen Jenen, die sich des genannten Leitfadens beim Unterrichten und Lehren bedienen, weiterhin aber auch jedem Lehrer der Mathematik, wie der Erdkunde in hohem Grade erwünscht sein muss. Einige astronomisch-geographische Diagramme enthalten allerdings die meisten unserer grösseren Atlanten, doch keine dieser Tafeln ist wohl so unmittelbar dem Lehrzweck angepasst, wie diese Garnitur des Herrn Steinhauser, die allerdings auch nur aus einem so guten Rufes sich erfreuenden Kunstverlag in dieser Vollendung hervorgehen konnte. Leider fehlt den einzelnen Karten jede Numerirung, so dass wir bei unserer Beschreibung derselben willkürlich eine Reihenfolge einzuführen gezwungen sind. Wir wählen dieselbe so, wie sie sich bei der Verwendung der Karten in der Schule als die natürlichste ergeben würde.

Die auf Karte I vereinigten Gegenstände sind sehr mannichfaltiger Natur. Den Mittelpunkt nimmt eine orthographische Aequatorealprojection der Erdkugel ein, auf welcher nicht nur die Meridiane und Parallelkreise, sondern auch die Dämmerungs- und Beleuchtungsgrenzen für

einen gewissen Sonnenstand sehr deutlich zum Ausdruck kommen. Daneben versinnlichen 24 kleine Kugeln in verschiedenen Farbentönen die Bestrahlung der Erde durch die Sonne im Verlaufe eines Jahres. Ausserdem finden wir hier als Beispiel des sogenannten graphischen Calculs ein Schema zur Auffindung der Zeitgleichung auf zeichnendem Wege, eine Schaar concentrischer Kreise zur Versinnlichung der gewissen Bergspitzen entsprechenden Gesichtskreise, ein genaues Bild der Mondellipse mit all' ihren Elementen, eine Figur zur Darstellung der Erdzonen in zweierlei Projection und endlich zwei Zahlentafeln für die Länge von Tag und Nacht für äquidistante Breiten und für die Grösse der von erhabenen Punkten überblickten Kugelcalotten. Die zweite Karte enthält je ein Planiglobium für den nördlichen und südlichen Himmel, Grundton blau, Sterne weiss, mit einer trefflichen Wiedergabe der Aeste der Milchstrasse, ein stereographisches Abbild der nördlichen Ekliptik-Halbkugel mit allen wichtigen Kreisen und zwei Sternverzeichnisse beider Hemisphären in photometrischer Anordnung (nach Herschel). Das Hauptstück von Nr. III ist eine Cylinderprojection der himmlischen Aequatorealzone mit eingezeichnetem Sonnenlaufe, desgleichen ein Diagramm der Mondbewegung. Ferner begegnen wir hier vorzüglichen Abbildungen der bemerkenswerthesten Sternhaufen und Nebelflecke (Kohlensäcke, Orionnebel u. s. w.). Die vierte Karte ist den Planeten gewidmet; auf zwei gleichgrossen Kreisen ist die äussere und innere Planetengruppe abgebildet, und zwar mit einer Menge von Einzelheiten, ohne dass doch von Ueberladung die Rede sein könnte. Zumal der Gürtel der Planetoiden, von welchen nicht weniger als acht Bahnen aufgenommen sind, tritt hier klarer als in vielen anderen Darstellungen hervor, so dass man sich besonders auch von dem annähernden Zutreffen der d'Arrest'schen Regel durch den Augenschein überzeugen kann. Ferner trifft man hier an eine Uebersicht der Grössenverhältnisse der Wandelsterne, ein graphisches Schema für die Neigung ihrer Bahnen und eine perspectivische Zeichnung des Systems der Jupiterstrabanten. Karte V enthält in erster Linie eine fein detaillirte Mondkarte (die Berge nur durch eingezeichnete Zahlen gekennzeichnet), sodann einige Specialkarten von Mondgebirgen, zu deren besserer Uebersicht ein Kärtchen der Umgebung von Wien in gleichem Massstabe beigegeben ist, weiterhin Zeichnungen der Mondphasen und der verschiedenen Formen von Finsternissen, ein paar auffallende Sonnenflecke mit Grössenangabe und endlich ein Erdbild, auf welchem die Wanderung des Kernschattens einer Sonnenfinsterniss mustergiltig verzeichnet ist. Am verdienstlichsten in der ganzen Sammlung erscheint uns jedoch die sechste und letzte Karte, auf welcher nicht weniger als 30 Figuren zur Erläuterung der bekannten Projectionsarten sich vorfinden, und zwar theilweise als Netze, theilweise als wirkliche Erdbilder. Um nur Einzelnes anzuführen, so ist hier vertreten Mollweide's äquivalente,

Jaeger-Petermann's sternförmige, Sanson's rhombische Projection, die Erweiterung der von dem alten Peter Apian vorgeschlagenen Manier, über deren Besonderheit man sich ebenfalls hier unterrichten kann, indem das Netz der Weltkarte von 1524 gleichfalls ein Plätzchen gefunden hat. Wer da gefühlt hat, wie sehr der Mangel von Figuren die Lecture z. B. der trefflichen Kartographie von Tissot beeinträchtigt, der wird Herrn Steinhauser für diese musterhafte Sammlung von Paradigmen ganz besondern Dank wissen.

Wir hoffen, dass diese kurze Beschreibung uns besonderer Lobsprüche überheben, wohl aber weitere Kreise zur Kenntnissnahme der Steinhauser'schen Tafeln anregen werde.

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

**Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten** von Dr. Karl Israel-Holtzwart, Oberlehrer an der Musterschule zu Frankfurt a. M. Nach des Verfassers Elementen der sphärischen Astronomie. Mit einer Tafel der astronomischen Dreiecke und Coordinaten. Wiesbaden, Verlag von J. F. Bergmann. 1882. VII, 40 S.

Der Unterzeichnete war jüngst veranlasst, an einem andern Orte (im „Humboldt“) die Elemente der sphärischen Astronomie des nämlichen Verfassers zu besprechen, an welche sich das vorliegende Werkchen dem Titelblatte zufolge unmittelbar anschliesst. Er konnte dort sowohl den Grundsätzen, nach welchen dieser für Studirende bestimmte Lehrbegriff gearbeitet ist, als auch der Durchführung dieser Grundsätze nur ungetheiltes Lob spenden. Bis zu einem gewissen Grade gilt dieses Lob allerdings auch noch im gegenwärtigen Falle, allein da wir an ein Elementarbuch und an ein Compendium für akademische Vorträge doch ziemlich verschiedenartige Anforderungen stellen zu sollen glauben, so müssen wir es tadeln, dass der Verf. diesem Gegensatze so gar wenig Rechnung getragen hat. Nach unserem Ermessen durfte sich Ersterer nicht darauf beschränken, einfach einen Auszug aus seiner grössern Schrift seinen Primanern in die Hände zu geben; er musste vielmehr dieselbe gründlich durcharbeiten und die ganze Anlage ändern, wenn er die astronomische Geographie nicht lediglich als eine Aufgabensammlung für sphärische Trigonometrie, sondern als selbstständige Disciplin von geistesbildender Kraft betrachtet wissen wollte. Jeder Lehrer, der nicht unter ganz aussergewöhnlich günstigen Verhältnissen arbeitet, wird uns Recht geben, wenn wir behaupten, dass selbst mathematisch geübte Schüler nur schwer dazu gebracht werden können, die Phänomene der täglichen und jährlichen Bewegung richtig aufzufassen, dass somit der Unterricht inductorisch von diesen Erscheinungen selbst zu deren Erklä-

rung aufsteigen muss. Diese pädagogische Grundregel, über welche alle neueren Schriftsteller auf dem Gebiete der Schulastronomie einig sind, ward nun aber von Herrn Israel nicht beobachtet, wie die nachfolgende Inhaltsübersicht beweisen wird.

Es werden zuerst die drei üblichen Coordinatensysteme geschildert, deren Wesen richtig zu verstehen die am Schlusse beigefügte treffliche Uebersichtstafel einen guten Anhalt bietet. Darauf folgen sofort Präcession und Nutation, zwei Erscheinungen, die gleich beim Beginn des Pensums einen um so verblüffenderen Eindruck machen müssen, als die zu ihrer numerischen Berechnung dienenden Formeln nicht abgeleitet, sondern mit Bezug auf Laplace einfach mitgetheilt werden. Nunmehr begegnen wir einer ausführlichen und an sich musterhaft durchgeführten Discussion der beiden Fundamentaldreiecke, von denen die Transformation der sphärischen Coordinaten abhängig ist; diese Aufgaben werden jedem Lehrer sehr willkommen sein. Im unmittelbaren Anschluss an die entwickelten Formeln werden verschiedene Methoden der geographischen Ortsbestimmung auseinandergesetzt, und zwar bezüglich der Länge mit besonderer Betonung des Verfahrens der Monddistanzen. Einer wohl etwas zu kurzen, wenn auch durch eine sehr instructive Zeichnung veranschaulichten Skizze der Gradmessungsarbeit auf der kugelförmigen Erde reiht sich die Bestimmung der Distanz und Parallaxe eines Himmelskörpers an; die Venusdurchgänge finden, wie wir gern zugeben, eine klarere Darstellung, als sie in den meisten Lehrbüchern zu finden pflegen. Den Schluss bildet eine hübsche mathematische Theorie der Dämmerung in Verbindung mit der bekannten Alhazen'schen Lösung der Aufgabe, jene Höhe des Luftkreises zu finden, bis zu welcher noch eine Reflexion des Lichtes stattfindet.

Diese Analyse wird unser Urtheil bestätigen. Das Büchlein ist ein sehr guter Leitfaden für den Unterricht in gewissen Theilen der angewandten Mathematik, allein da es eben nur Bruchstücke und kein System liefert, wird seine Verwendung in der Schule selbst nur eine beschränkte sein können. Die Ausstattung ist untadelhaft.

Ansbach. Dr. S. Günther.

---

## Entgegnung.

In der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Jahrg. 27 H. 4 S. 129 der hist.-lit. Abthlg.) behauptet Herr Prof. H. Zech-Stuttgart, meine Schrift „Einführung in die Mechanik“ (Freiberg, Craz & Gerlach, 1881) sei eine Ver- oder Zerarbeitung der Mechanik von Holtzmann (Stuttgart, Meltzer, 1861) mit Einschiebung von Figuren und Aufgaben.

Zur Richtigstellung erlaube ich mir hierzu zu bemerken, dass bei der Bearbeitung meines Buches, wie bei jedem Lehrbuche, nothwendiger-

weise existirende Literatur zu verwerthen war; — in den vielen anderen, zum grossen Theil sehr anerkennenden Kritiken über mein Buch ist mir hieraus auch kein Vorwurf gemacht worden.

Verschieden von Holtzmann bot ich lediglich Principien der Mechanik und vorbereitende Aufgaben als Unterlage für Vorträge und weitergehende analytische oder technische Studien (vergl. die Vorrede meiner Schrift) unter Benutzung der Werke von Newton, Poncelet, Coriolis, Delaunay, Duhamel, Tresca, Maxwell, Dühring, Redtenbacher, Weisbach, Antenheimer, Holtzmann, Ritter und der vorzüglichen Vorträge des auch Bergleute schulenden Professors C. M. Guldberg in Christiania.

Da es nicht üblich ist, in einem Lehrbuche Citate anzuführen, vermied ich dieselben, wie Holtzmann und Andere; um dem Studirenden aber Quellen zu liefern, verfasste ich gleichzeitig mit dem Lehrbuche einen Literaturnachweis, welcher — bereits im Anfang dieses Jahres in einem Artikel erwähnt — noch nicht zur Veröffentlichung gelangt ist.

Schon vor der Fertigstellung und dem Druck meiner Schrift von dem Erscheinen ungünstiger Besprechungen unterrichtet, beschloss ich, denselben unter bestem Dank bei der Herausgabe des Quellennachweises entsprechende Berücksichtigung zu schenken und der Bemängelung auf diese Weise nur in durchaus sachlicher Form zu begegnen.

Hier erlaube ich mir aber zu bemerken, dass heutzutage Niemand ein Recht hat, für das Holtzmann'sche Buch, soweit es die Principien der Mechanik, welche vom ersten Viertel dieses Jahrhunderts ab fest begründet sind, behandelt, Anspruch auf geistiges Eigenthum zu erheben; auch Herr Professor Zech wird vielmehr zugestehen müssen, dass sich die dem Anfänger wenig, dem in die Wissenschaft Eingeführten recht gut dienende Holtzmann'sche analytische Mechanik bezüglich der Principien ebenfalls an die Werke früherer Schriftsteller anlehnt.

Freiberg, 1882. H. Undeutsch.

# Bibliographie

vom 16. August bis 31. October 1882.

## Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissensch. Math.-phys. Classe. Jahrg. 1882, 4. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Math.-naturw. Cl. Abth. II. 85. Bd. 1.—5. Heft. Wien, Gerold. 16 Mk. 90 Pf.

Publicationen d. astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 10 (3. Bd. 2. St.), Untersuch. üb. d. Masse d. Jupiter. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Beobachtungen, angestellt am astrophysikal. Observatorium zu O-Gyalla. 4. Bd. (1881), herausgeg. v. N. v. Konkoly. Halle, Schmidt. 12 Mk.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums. Jahrg. 1881, herausgegeb. von H. Wild. Petersburg und Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.

Verhandlungen der sechsten allgem. Conferenz der europ. Gradmessung, redig. v. C. Bruhns u. A. Hirsch. Zugleich mit d. Generalbericht f. 1880, redig. v. Centralbureau. Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Nautisches Jahrbuch f. d. J. 1885, herausgeg. vom Reichsamt d. I., redig. v. Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann. Jahrg. 1880, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. 7. Série. Tome 30, Nr. 6—8. Leipzig, Voss. 10 Mk. 70 Pf.

## Reine Mathematik.

Kaiser, H., Die Anfangsgründe der Determinanten; Theorie u. Anwendungen. Wiesbaden, Bergmann. 2 Mk. 40 Pf.

Hanel, J., Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Holzmüller, G., Einführung in die Theorie d. isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildgn. Mit Anwend. auf mathem. Physik. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

Pasch, M., Einleitg. i. d. Differential- u. Integralrechn. Ebdas. 3 Mk. 20 Pf.

Igel, B., Ueber eine Classe von Abel'schen Gleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Winckler, A., Ueber Reihenentwickelungen für einige von Euler'schen Integr. II. Art abhängige Ausdrücke. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Dedekind, R., Ueber die Discriminanten endlicher Körper. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Hermes, J., Gleichungen 1. u. 2. Grades, schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Königsberger, L., Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Köster, T., Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. I. Thl. Oldenburg, Schmidt. 80 Pf.

Schlepps, F., Die Logarithmen. Leipzig, Scholtze. 1 Mk. 50 Pf.

Becker, E., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch (fünfstellig). Leipzig, Tauchnitz. 1 Mk. 20 Pf.

Jordan, M. C., Cours d'analyse de l'école polytechn. Tome I. Paris, Gauthier-Villars. 11 Frcs.

Holl, W., Lehrbuch der Geometrie. Stuttgart, Kohlhammer. 1 Mk. 20 Pf. Auflösungen dazu 40 Pf.

Hossfeld, C., Construction der Kegelschnitte aus fünf zum Theil imaginären Elementen. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 2 Mk.

Schmidt, A., Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Schuster, P., Bestimmungen der quadratisch-involutorischen Transformation. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Thl.: Perspectivische Abbild. i. d. Ebene; Berechn. d. planimetr. Grössen. Pensum d. Secunda. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Enneper, A., Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven. Göttingen, Dieterich. 3 Mk. 60 Pf.

Ameseder, A., Geometrische Untersuchg. d. Plancurven 4. O., insbes. ihrer Berührungskegelschnitte. 1. Mitth. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Cremona, L., Elemente der projectivischen Geometrie; unter Mitwirk. d. Verf. übers. v. R. Trautvetter. Stuttgart, Cotta. 5 Mk.

## Angewandte Mathematik.

Hauck, G., Die malerische Perspektive. Berlin, Springer. 80 Pf.

Schmidt, A., Elemente der darstellenden Geometrie. Wiesbaden, Bergmann. 5 Mk. 25 Pf.

Morgenbesser, A., Die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens. Berlin, Puttkammer & Mühlbrecht. 20 Mk.

Beling, O., Zur Theorie d. Bifilaraufhängung. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Schmidt, Th., Ueber die innere Reibung v. Flüssigkeiten. Ebendas. 1 Mk.

Pscheidl, W., Bestimmung der Elasticitätscoefficienten durch Biegung eines Stabes. Ebendas. 40 Pf.

Struve, H., Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 3 Mk.

Gyldén, H., Versuch einer mathemat. Theorie zur Erklärung d. Lichtwechsels veränderl. Sterne. Helsingfors u. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Mayenberg, J., Aufgaben d. sphär. Astronomie. Hof, Grau & Co. 60 Pf.

Klein, F., das Brachyteleskop der k. k. Marinesternwarte zu Pola, nebst einer Geschichte d. Spiegelteleskops. Wien, Seidel & S. 2 Mk. 40 Pf.

ISRAEL-HOLTZWART, Elementare Darstellung d. Gauss'schen Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnelemente. Halle, Schmidt. 60 Pf.

GINZEL, F., Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. 1. Abhdlg. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

HAERDTL, E. v., Bahnbestimmung des Planeten Adria. Ebendas. 30 Pf.

GRUSS, G. u. K. KÖGLER, Ueb. d. Bahn der Oenone (215). Ebendas. 20 Pf.

HOLETSCHEK, J., Ueber die Bahn d. Planeten Ate (111). 2. Thl. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

HEPPERGER, J. v., Bahnbestimmung des Kometen 1874, III (Coggia). (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

## Physik und Meteorologie.

BAUERNFEIND, M. v., Gedächtnissrede auf J. S. Ohm, den Physiker. München, Franz. 2 Mk.

HELMHOLTZ, H., Wissenschaftliche Abhandlungen. 2. Bd. 1. Abth. Leipzig, Barth. 10 Mk.

JACOB, C., Die Kräfte in der Natur, insbes. über Cohäsion, Adhäsion, Elektricität und Magnetismus. Würzburg, Stahel. 2 Mk. 20 Pf.

BOLTZMANN, L., Zur Theorie der Gasdiffusion. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

EXNER, F., Ueber einige auf die Contacttheorie bezügliche Experimente. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

SCHMIDT, G., Ueber die innere Pressung und Energie überhitzter Dämpfe. (Akad.) Ebendas. 45 Pf.

HAMMERL, H., Ueber Regenbogen, gebildet von Flüssigkeiten verschiedener Brechung. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

LECHER, E., Ueber die Absorption strahlender Wärme in Wasserdampf und Kohlensäure. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

MÜLLER, P., Ueber das Verhältniss der specifischen Wärmen bei Gasen und Dämpfen. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

STEPHAN, C., Ueber die Beziehungen zwischen Fluidität und galvanischem Leitungsvermögen. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

STREINTZ, F., Experimentaluntersuchungen über d. galvan. Polarisation. 1. Abh. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

WASSMUTH, A., Ueb. d. Anwend. d. mechan. Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

GLASER DE CEW, Die magnetelektr. u. dynamoelektr. Maschinen u. die sogen. Secundärbatterien. Wien, Hartleben. 3 Mk.

PULUJ, J., Strahlende Elektrodenmaterie und der sogen. vierte Aggregatzustand. Wien, Gerold. 2 Mk. 80 Pf.

WEBER, H., Der Rotationsinductor, seine Theorie und Anwendg. zur Bestimmung d. Ohm i. absol. Maassen. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1881.

### Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

## A.

**Abbildung.**

295. Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Holzmüller. Mathem. Annal. XVIII, 289.
296. Ueber die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einem Kegelschnitte. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 429.

**Akustik.**

297. On the measure of the intensity of sound. Bosanquet. Phil. Mag. LIX, 174.
298. On the beats of consonances of the form $h:1$. Bosanquet. Phil. Mag. LXI, 420, 492.
299. Theoretical explanations of the rectilinear transmission and spontaneous diffusion of sound and light. Challis. Phil. Mag. LXI, 249.

**Analytische Geometrie der Ebene.**

300. Notiz über die rationalen Curven. Pasch. Mathem. Annal. XVIII, 91.
Vergl. Kegelschnitte. Geometrie (höhere).

**Analytische Geometrie des Raumes.**

301. Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben. Brill. Mathem. Annal. XVIII, 95.
Vergl. Geometrie (höhere). Hyperboloid. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

**Astronomie.**

302. Sur un point de la théorie analytique du système du monde. Abel Souchon. Astr. Nachr. XCVII, 209.
303. Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn nach einer neuen Methode. M. Wilh. Meyer. Astr. Nachr. XCIX, 359.
304. Ueber den Fall des grössten Kreises bei Bahnbestimmungen aus drei beobachteten Oertern. W. Fabritius. Astr. Nachr. XCVI, 279.
305. Ueber einen geometrischen Satz, der bei drei rasch aufeinanderfolgenden Planetenbeobachtungen mit grosser Genauigkeit zutrifft. A. Lehmann-Filhés. Astr. Nachr. XCVIII, 307.
306. Sur la variation de la longitude du noeud, de l'inclinaison et du demi-paramètre dans les orbites planétaires. A. de Gasparis. Astr. Nachr. XCVI, 205.
307. Einige Bemerkungen über die anomalen Bewegungserscheinungen einiger Cometen und über das widerstandleistende Medium. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. XCVII, 225.
308. Passage de Mercure du 6 Mai 1878. C. F. Pechüle. Astr. Nachr. XCVIII, 161.
309. A new approximate solution of Kepler's problem. H. A. Howe. Astr. Nachr. XCVII, 273.
310. Two new solutions of Kepler's problem. H. A. Howe. Astr. Nachr. XCVIII, 305.
311. Ueber eine Recursionsformel zwischen Hansen's $D^{(1)}$-Coefficienten. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. XCVII, 155.
312. Ueber den Einfluss der Rotation des Erdsphäroids auf terrestrische Bewegungen, insbesondere auf Meeres- und Windströmungen. Jos. Finger. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 1248.

313 Sur la possibilité d'éviter les étoiles circompolaires dans les déterminations de temps local. Nobile. Astr. Nachr. XCVI, 65
314. On the figures of the planets H. Hennessy. Phil Mag. LXI, 283.
315. Ueber die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarmes mit Hilfe eines neuen Meteoroskops. R. Lehmann-Filhés. Astr. Nachr. XCVI, 241.
316. Ueber die Vertheilung der Radiationspunkte au der Himmelskugel. R. Lehmann-Filhés. Astr. Nachr. XCVII, 353.
317. Zur Theorie des Passageninstruments im ersten Vertical. M. Löw. Astr. Nachr. XCIX, 289.
318. Sur une nouvelle méthode de déterminer la flexion astronomique dans les instruments meridiens. Nobile. Astr. Nachr. XCVI, 9.
319. Theorie der Theilungsfehler am Meridiankreise. Alex. Schmidt. Astr. Nachr. XCIX, 305.
Vergl. Geschichte der Mathematik 382, 383.

## B.

### Bestimmte Integrale.

320. Ueber Darstellungsfunctionen. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XVIII, 593.
321. An integrating-machine. C. V. Boys. Phil. Mag. LXI, 342.

## C.

### Combinatorik.

322. An analysis of relationships. A. Macfarlane. Phil. Mag. LVI, 436.
Vergl. Logikcalcul.

### Crystallographie.

323. The dilatation of crystals on change of temperature. L. Fletcher. Phil. Mag. LIX, 81.

## D.

### Determinanten.

324. Ueber die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von $n^2$ willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren. Mertens. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 260.
325. On skew determinants. Thom. Muir. Phil. Mag. LXII, 391.
326. Ueber ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante. Pasch. Mathem. Annal. XVIII, 93.
327. Sur le Jacobien des formes binaires. Faà de Bruno. Mathem Annal. XVIII, 283.
328. Théorème général sur les déterminants fonctionnels. Faà de Bruno. Mathem. Annal. XVIII, 286.

### Differentialgleichungen.

329. Ueber den letzten Multiplicator der Differentialgleichungen höherer Ordnung. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 943.
330. Supplementary paper on primary forms. J. Cockle. Phil. Mag. LIX, 348.
331. Inverse problem of criticoids. J. Cockle. Phil. Mag. LXII, 189.

### Differenzengleichungen.

332. On an equation in finite differences. J. Sylvester. Phil. Mag. LVIII, 120.

### Diffusion.

333. Researches on the elementary law of Hydrodiffusion. H. F. Weber. Phil. Mag. LVIII, 478, 523.
334. Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 161.

## E.

### Elektricität.

335. Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern. Mehler. Mathem Annal XVIII, 469.
336. On the measuring of electrical conductivities. G. Kirchhoff. Phil. Mag. LXI, 81.

337. A contribution to the theory of so-called electrical expansion or electrostriction. Boltzmann. Phil. Mag. LXI, 75.
338. On the principle of the conservation of electricity. G. Lippmann. Phil. Mag. LXI, 474; LXII, 151.
339. On the conservation of electricity and the absolute scale of electric potential. Silv. P. Thompson Phil. Mag. LXII, 13.
340. On the molecular vortex theory of electromagnetic action. Glazebrook. Phil. Mag. LXI, 397.
341. On the law of force between electric currents. H. W. Watson & S. H. Burbury. Phil. Mag. LXI, 451.
342. On a general theorem advanced by Prof. Clausius in reference to electrical influence. G. J. Legebeke. Phil. Mag. LIX, 458.
343. A new demonstration of Riemann's Theorem. Croullebois. Phil. Mag. LXII, 447.
344. On Professors Ayrton & Perry's new Theory of the Earth's Magnetism, with a note on a new Theory of the Aurora. H. A. Rowland. Phil. Mag. LVIII, 102.
345. On the theory of induction-currents. Mascart. Phil. Mag. LIX, 452.
346. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. J. J. Thomson. Phil. Mag. LXI, 229.
347. On the Law of magnetoelectric machines. J. Joubert. Phil. Mag. LX, 298, 384.
348. On the theory of faults in cables. Heaviside. Phil. Mag. LVIII, 60, 163.
349. On intermittant currents and the theory of the induction-balance. Ol. J. Lodge. Phil. Mag. LIX, 123.
350. On a method of comparing the electrical capacities of two condensers. Glazebrook. Phil. Mag. LXI, 370.
351. On the graduation of the sonometer. Poynting. Phil. Mag. LIX, 59.
352. On the construction of the photophone. Silv. P. Thompson. Phil. Mag. LXI, 286.
353. On the best arrangement of Wheatstone's bridge for the measurement of a particular resistance. Thom. Gray. Phil. Mag. LXII, 283.

Vergl. Kegelfunctionen. Kugelfunctionen. Magnetismus. Optik. Potential 467.

### Elliptische Transcendenten.

354. Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe. Hurwitz. Mathem. Annal. XVIII, 528.
355. Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module. Hermite. Astr. Nachr. XCVI, 321.

Vergl. Modulargleichungen. Riemann'sche Fläche 470.

## F.

### Formen.

356. Sur un théorème général dans la théorie des formes binaires. Faà de Bruno. Mathem. Annal. XVIII, 280.

Vergl. Determinanten 326, 327, 328. Invarianten.

### Functionen.

357. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Mertens. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 988.
358. Theorie der allgemeinen Periodicität. Rausenberger. Mathem. Annal. XVIII, 378.

Vergl. Abbildung. Bestimmte Integrale 320. Elliptische Transcendenten. Geschichte der Mathematik 386. Invarianten. Kegelfunctionen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Lamé'sche Functionen. Riemann'sche Fläche. Sturm'sche Functionen.

## G.

### Geodäsie.

359. Note sur un procédé pratique pour etablir l'accord entre plusieures bases d'une triangulation. A. Ferrero. Astr. Nachr XCVII, 177.
360. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung. Albrecht. Astr. Nachr. XCVI, 209.

361. Ueber den Einfluss verbesserter Sternörter auf die Polhöhen der Gradmessung in Ostpreussen. M. Löw. Astr. Nachr. XCVI, 353.
362. Ueber den Einfluss der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen. Börsch. Astr. Nachr. XCVII, 181.
363. Réduction des observations astronomiques et des angles géodésiques d'une surface de niveau à une autre. E. Pucci. Astr. Nachr. XCIX, 161.
Vergl. Astronomie 314.

**Geometrie (descriptive).**

364. Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis. J. Tesař. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 453.

**Geometrie (höhere).**

365. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Schur. Mathem. Annal. XVIII, 252.
366. Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen. Schur. Mathem. Annal. XVIII, 1.
367. Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 715.
368. Ueber Polargruppen. Emil Weyr. Wien Akad.-Ber. LXXXI, 841.
369. Ueber harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 1213.
370. Weitere symmetrische Beziehungen am vollständigen Vierecke. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 757.
371. Ueber das räumliche vollständige Fünfeck. Gust. Kohn. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 7.
372. Ueber Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 169.
373. Ueber rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 487.
374. Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 787.
375. Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 472.
376. Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 241.
377. Ueber ebene rationale Curven vierter Ordnung. C. Bobek. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 361.
378. Ueber eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 159. — Emil Weyr ibid. 162.
379. Bemerkungen über cubische Involutionen. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 845.
380. Ueber biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 1007.
381. Ueber Involutionen $n^{ten}$ Grades und $k^{ter}$ Stufe. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 680.
Vergl. Kegelschnitte. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

**Geschichte der Mathematik.**

382. Ueber Ulugh Beg's Sterngrössen. C. H. F. Peters. Astr. Nachr. XCIX, 235.
383. Nonius oder Vernier? Breusing. Astr. Nachr. XCVI, 129.
384. Zu Herrn Prof. Oudemans' Notiz über den Erfinder der negativen Oculare nebst einigen Bemerkungen über die von Schyrlaeus de Rheita angeblich entdeckten Marsmonde. Winnecke. Astr. Nachr. XCVI, 184.
385. On Newton's „Regula tertia philosophandi". Challis. Phil. Mag. LIX, 21.
386. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. O. Stolz. Mathem. Annal. XVIII, 255.
387. Nekrolog von Christ. Aug. Friedr. Peters, † 8. Mai 1880. Astr. Nachr. XCVII, 113.
388. Nekrolog von William Lassell, † 4. October 1880. Astr. Nachr. XCVIII, 207.
389. Todesanzeige von Benjamin Peirce, † 8. October 1880. Astr. Nachr. XCVIII, 303.
390. Nekrolog von H. v. Dembowski, † 19. Januar 1881. Astr. Nachr. XCIX, 111.

**Gleichungen.**

391. Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen. Bachmann. Mathem. Annal. XVIII, 449.

392. Bemerkung über Abel'sche Gleichungen. Netto. Mathem. Annal. XVIII, 247.
393. Zur Theorie der Resolventen. J. König. Mathem. Annal. XVIII, 78.
Vergl. Functionen 357. Invarianten. Sturm'sche Functionen.

## H.

### Hydrodynamik.

394. Supplement to researches on the hydrodynamical theory of the physical forces, including a theory of the microphone. Challis. Phil. Mag. LIX, 448.
395. Ueber discrete Wirbelfäden. M. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 810.
396. Vortex statics. Will. Thomson. Phil. Mag. LX, 97.
397. On gravitational oscillations of rotating water. Will Thomson. Phil. Mag. LX, 109.
398. Vibrations of a columnar vortex. Will. Thomson. Phil. Mag LX, 155.
399. On steady motion in an incompressible viscous fluid. Th Craig. Phil. Mag. LX, 342; LXI, 304. — Oberbeck ibid. LXI, 153.
Vergl. Diffusion.

### Hyperboloid.

400. Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid. H. Schroeter. Mathem Annal. XVIII, 428
401. Ueber die Strictionslinie des Hyperboloids als rationale Raumcurve vierter Ordnung. Migotti. Wien. Akad. Ber. LXXX, 1023.
402. Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloids und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide. Ruth. Wien. Akad. Ber. LXXX, 257.

## I.

### Interpolation.

403. Bemerkung über die allgemeine Cauchy'sche Interpolationsmethode. Seeliger. Astr. Nachr. XCVI, 235.

### Invarianten.

404. Ueber endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen. J. König. Mathem. Annal. XVIII, 69.

## K.

### Kegelfunctionen.

405. Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme. C. Neumann. Mathem. Annal. XIX, 195.

### Kegelschnitte.

406. Die Projectiv-Constructionen der Curven zweiter Ordnung. W. Binder. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 648.
407. Beziehungen der Geraden zu Linien zweiter Ordnung, welche durch einen Diameter und eine conjugirte Sehne gegeben sind. Barchanek. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 712.
408. Ueber die Reduction eines Büschels von Curven zweiter Ordnung auf ein Strahlenbüschel. Mich. Trebitscher. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 913.
409. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte einer ebenen Curve dritter Ordnung und vierter Classe. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 1040.
410. Die Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe. M. Trebitscher. Wien Akad. Ber. LXXXI, 1080.
411. Ueber vierfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 187.
412. Ueber vollständige eingeschriebene Vielseite. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 80.
413. Charakter, Axen, conjugirte Durchmesser und conjugirte Punkte der Kegelschnitte einer Schaar. Jos. Mautner. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 973.
Vergl. Astronomie 305.

### Kettenbrüche.

414. Ueber Kettenbrüche. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 763.

### Kugelfunctionen.

415. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. Mehler. Mathem. Annal. XVIII, 161.

## L.

**Lamé'sche Functionen.**

416. Ueber Lamé'sche Functionen. F. Klein. Mathem. Annal. XVIII, 237.

**Logikcalcul.**

417. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings. J. Venn. Phil. Mag. LX, 1.
418. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings. H. M'Coll. Phil. Mag. LX, 168.
419. Implicational and equational logic. H. M'Coll. Phil. Mag. LXI, 40.
420. On Mr. Venn's „Symbolic logic". A. Macfarlane. Phil. Mag. LXII, 61.
421. On logical diagrams for $n$ terms. All. Marquand. Phil. Mag. LXII, 266.

## M.

**Magnetismus.**

422. Ueber die Abweichungen der Ampère'schen Theorie des Magnetismus von der Theorie der elektromagnetischen Kräfte. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 659.
423. On Mr. E. H. Hall's experiments on the „action of magnetism on a permanent electric current". J. Hopkinson. Phil. Mag. LX, 430.
424. On the new theory of magnetic attractions and the magnetic rotation of polarized light. H. A. Rowland. Phil. Mag. LXI, 254.
425. Ueber eine neue Art, die Inclination aus den Schwingungen eines Magnetstabes zu bestimmen. Pscheidl. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 11.
426. Ueber die Tragkraft der Magnete. Stefan. Wien. Akad.-Ber LXXXI, 89.
427. Ueber die auf Diamagnete wirksamen Kräfte. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 687.
428. Complete theory of the bifilar-magnetometer and new methods for the determination of the absolute horizontal intensity of the Earth's magnetism, as well as of the temperature and induction-coefficients of magnets. H. Wild. Phil. Mag. LIX, 443.

Vergl. Elektricität.

**Mannichfaltigkeiten.**

429. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von $n$ Dimensionen stattfinden. Veronese. Mathem. Annal. XVIII, 448.

**Mechanik.**

430. Ueber die Lösung von dynamischen Problemen mittelst der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung. Hočevar. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 567.
431. Theorie der Bewegung auf developpablen Flächen. Ferd. Wittenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 697.
432. Ueber die Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper. Aug. Weiler. Astr. Nachr. XCVI, 161.
433. Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie. Aug. Weiler. Astr. Nachr. XCVII, 97, 129, 161, 193.
434. Sopra una relazione di distanze nel problema dei tre corpi. A. de Gasparis. Astr. Nachr. XCVI, 337.
435. Sui rapporti delle variazioni simultanee di alcuni elementi di ellissi istantanee. A. de Gasparis. Astr. Nachr. XCIX, 65, 81, 97.
436. On a neglected principle, that may be employed in Earthquake Measurements. Perry & Ayrton. Phil. Mag. LVIII, 30.
437. On the forms of the vibrations of twitched an stroked strings. F. Lindemann. Phil. Mag. LIX, 197.
438. Messungen über das Mitschwingen. A. v. Ettinghausen. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 215.
439. Remarks on a simplification of theory of vibratory motions. C. Cellérier. Phil. Mag. LX, 57.
440. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. Rayleigh. Phil. Mag. LX, 73.

441. The vibrations of a film in reference to the phoneidoscope. W. Baily. Phil. Mag. LX, 79.
442. Ueber eine Erweiterung der Giltigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 399.
Vergl. Akustik. Astronomie. Diffusion. Elektricität. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Wärmelehre.

**Modulargleichungen.**

443. Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. Gierster. Mathem. Annal. XVIII, 319.
Vergl. Riemann'sche Fläche 470.

## O.

**Oberflächen.**

444. Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpabeln Flächen. v. Mangoldt. Mathem. Annal. XVIII, 604.
445. Beitrag zur Theorie der Normalflächen. Gust. Peschka. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 1128, 1163.
446. Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Rohn. Mathem. Annal. XVIII, 99.
447. Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven. Rupp. Mathem. Annal. XVIII, 366.
448. Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt. Ameseder. Wien. Akad. Ber. LXXXI, 271.
449. Die Regelflächen vierten Grades, deren Erzeugende sich zu Quadrupeln gruppiren. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 615.
450. Bemerkung über Flächen vierter Ordnung F. Klein. Mathem. Annal. XVIII, 160.
451. Ueber zwei besondere Flächen sechster Classe. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 768.
452. Ueber einen besondern Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen. Krey. Mathem. Annal. XVIII, 82.
453. Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen. Pelz. Wien. Akad. Ber. LXXIX, 447.
Vergl. Geodäsie. Geometrie (höhere) 366. Mechanik 431.

**Oberflächen zweiter Ordnung.**

454. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Zeuthen. Mathem. Annal. XVIII, 33.
455. Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung. H. Drasch. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 254.
Vergl. Hyperboloid. Potential 466. Sphärik.

**Optik.**

456. On Maxwell's theory of light. J. J. Thomson. Phil. Mag. LIX, 284.
457. On the electromagnetic theory of light. Rayleigh. Phil. Mag. LXII, 81.
458. Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung. v. Lang. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 369.
459. On Nicol's prism. Glazebrook. Phil. Mag. LX, 247.
460. On the opacity of tourmaline crystals. Silv. P. Thompson. Phil. Mag. LXII, 112.
461. Ueber den Gang der Lichtstrahlen in einer homogenen Kugel. Lippich. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 516.
462. On images formed without reflection or refraction. Rayleigh. Phil. Mag. LXI, 214.
463. Ueber die Aenderungen der Refractionsconstante und Störungen der Richtung der Lothlinie im Gebirge. R. v. Sterneck. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 61.
464. Die Aenderung des Moleculargewichts und des Molecularrefractionsvermögens. Janovsky. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 539.
465. Investigations in optics with special reference to the spectroscope. Rayleigh. Phil. Mag. LVIII, 261, 403, 477; LIX, 40.
Vergl. Akustik 299. Geschichte der Mathematik 384.

## P.

### Potential.

466. Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. F. Klein. Mathem. Annal. XVIII, 410.
467. On the employment of the electrodynamik potential for the determination of the ponderomotive and electromotive forces. Clausius. Phil. Mag. LX, 255.
Vergl. Kugelfunctionen.

## R.

### Rechenmaschine.

468. On a calculating apparatus based on Napier's rods. J. Bridge. Phil. Mag. LIX, 191.
Vergl. Bestimmte Integrale 321.

### Riemann'sche Fläche.

469. Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören. Thomae. Mathem. Annal. XVIII, 443.
470. Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Modulargleichungen entspricht. W. Dyck. Mathem. Annal. XVIII, 507.

## S.

### Sphärik.

471. Beitrag zur Sphärik. Meissel. Astr. Nachr. XCVI, 139.

### Sturm'sche Functionen.

472. Ueber Sturm'sche Reihen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 576.

## W.

### Wärmelehre.

473. Zur Theorie der Gasreibung. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 117.
474. On the specific heat and conductivity of bodies. Morisot. Phil. Mag. LIX, 386.
475. On thermal conductivity and on the effect of temperature-changes of specific heat and conductivity on the propagation of plane heat-waves. Tait. Phil. Mag. LXII, 147.
476. On the determination of the variation of the thermal conductivity of metals with temperature by means of the permanent curve of temperature along a uniform thin rod heated at one end. Ol. J. Lodge. Phil. Mag. LVIII, 510.
477. On the theoretic determination of vapour-pressure and the volumes of vapour and liquid. Clausius. Phil. Mag. LXII, 381.
478. Ueber die Wirksamkeit der Sicherheitsventile bei Dampfkesseln. Ad. v. Burg. Wien. Akad.-Ber. LXXX, 872.
479. On the tension of vapours near curved surfaces of their liquids. Fr. Fitzgerald. Phil. Mag. LVIII, 382.
480. On Professor Osborne Reynolds's paper „On certain dimensional properties of matter in the gaseous state". Fr Fitzgerald. Phil. Mag. LXI, 103.
481. Certain dimensional properties of Matter in the gaseous state; an answer to Mr. Fitzgerald. Osb. Reynolds. Phil. Mag. LXI, 335.
482. Ueber die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 391.
483. Zur Theorie der Metallthermometer. Jüllig. Wien. Akad.-Ber. LXXIX, 349.
Vergl. Crystallographie.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

484. Das Fehlergesetz und die Genauigkeit geometrischer Nivellements, aus Beobachtungen abgeleitet. Börsch. Astr. Nachr. XCVI, 33, 81.
485. Ueber die Vertheilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. Seeliger. Astr. Nachr. XCVI, 49.
486. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler. Seeliger. Astr. Nachr. XCVII, 289.

Wurzelausziehung.

487. Evolution by subtraction. F. H. Hummel. Phil. Mag. LX, 190.

## Z.

Zahlentheorie.

488. On unitation. Walenn. Phil. Mag. LIX, 121, 271.
489. On a systematic interruption in the order of numerical values of vulgar fractions, when arranged in a series of consecutive magnitudes. G. B. Airy. Phil. Mag. LXII, 175.
490. Note on a method of checking calculations. Walenn. Phil. Mag. LIX, 56.
491. Ueber das cubische Reciprocitätsgesetz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 436.
492. Ueber die Auflösung der unbestimmten Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in rationalen Zahlen. O. Schier. Wien. Akad.-Ber. LXXXI, 392.

Vergl. Wurzelausziehung.

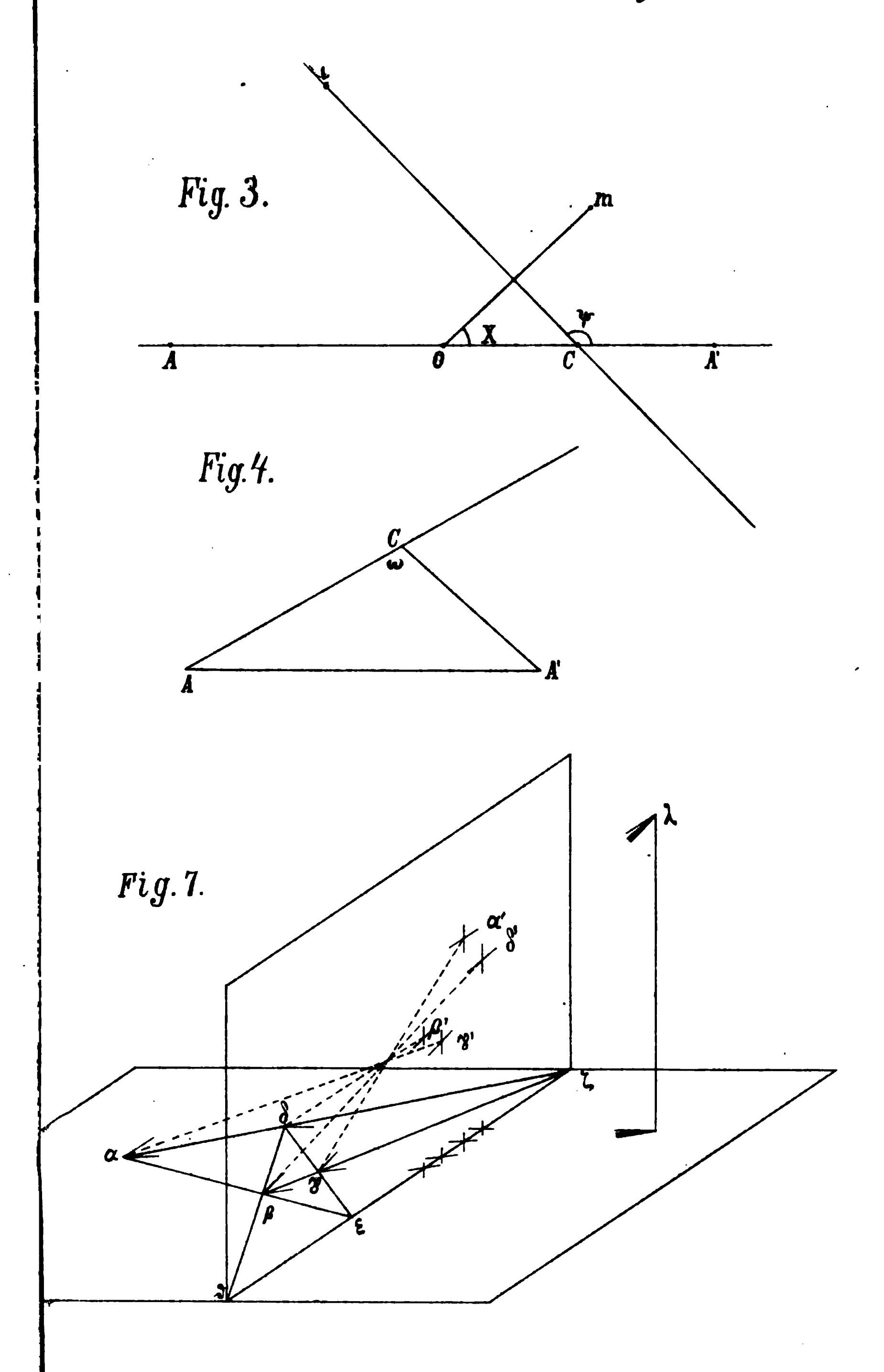


Fig. 3.
m
X
ψ
A
O
C
A'
Fig. 4.
C
ω
A
A'
Fig. 7.
λ
α'
δ'
β'
γ'
ζ
δ
α
γ
β
ε

## Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
### 1882.

Soeben sind erschienen:

**Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.** Viertes Heft. A. u. d. T.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung des XXVII. Jahrgangs. [278 S. mit einer lithogr. Tafel.] gr. 8. geh. n. ℳ. 6. 40.

Inhalt: Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Dr. *Siegmund Günther.* (Mit einer lithogr. Tafel.) — Der Traktat Franco's von Lüttich: „die quadratura circuli". Herausgegeben von Dr. *Winterberg.* — Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer. Aus dem Jahre 1630. Von *Eugen Gelcich,* Direktor der nautischen Schule in Lussinpiccolo. — Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Von Dr. *P. Kramer* in Halle a. d. S.

**Haeussler, J. W., Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie, insbesondere die mathematische Behandlung der von der Wärme geleisteten inneren Arbeiten.** [76 S.] gr. 8. geh. n. ℳ. 1. 20.

**Henrici, J.,** Professor in Heidelberg, **vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln.** [12 S.] 16. gebunden n. ℳ. —. 80.

**Hermes, Dr. Johann,** ordentlicher Lehrer am Progymnasium des Königl. Waisenhauses zu Königsberg in Preussen, **Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen.** Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VII u. 87 S.] gr. 8. geh. n. ℳ. 1. 60.

**Königsberger, Leo,** Professor an der Universität zu Wien, **allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen.** [XII u. 246 S.] gr. 8. geh. n. ℳ. 8. —.

**Scheffler, Dr. Hermann, die magischen Figuren.** Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthume stammenden Problems. Mit zwei lithographirten Tafeln. [III u. 112 S.] gr. 8. geh. n. ℳ. 2. 40.

**Weber, Dr. Heinrich,** Professor der Physik an der Herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig, **der Rotationsinduktor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm in absoluten Maassen.** Mit zwei lithographierten Tafeln und in den Text gedruckten Holzschnitten. [IV u. 76 S.] gr. 8. geh. n. ℳ. 2. 40.

**Zahn, Dr. W. von, Untersuchungen über Contactelectricität.** Mit einer lithogr. Tafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. —.

---

Wie auf dem Umschlag des I. Bandes (4. Aufl.) von

## Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik

angezeigt ist, können die folgenden Bände noch nicht in neuer Auflage erscheinen. Es ist daher für Abnehmer des ganzen Werkes ein neues Gesamtregister gedruckt worden, welches sich über die 4. Auflage des I. und die 3. Auflage des II., III. und IV. Bandes erstreckt und den Abnehmern des ganzen Werkes gratis geliefert wird.

**B. G. Teubner.**

---

Zu

**Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften** ist ein Nachtrag zum Druckfehlerverzeichnis gedruckt worden. Die Abnehmer des Buches werden gebeten, denselben von ihrer Sortimentsbuchhandlung oder auch direkt von mir zu verlangen.

**B. G. Teubner.**

# INHALT.

Seite

XIII. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurve dritter Ordnung. Von Dr. L. Geisenheimer in Tarnowitz (Taf. V Fig. 1) . . . . . . . 321

XIV. Grundzüge der mathematischen Chemie. Von Prof. Dr. W. C. Wittwer in Regensburg (Schluss) . . . . . . . . . . . . . . 329

XV. Grundzüge einer Dipolargeometrie. Von Dr. G. Leonhardt in Colberg (Taf. V Fig. 2—5) . . . . . . . . . . . . . . . . . 346

### Kleinere Mittheilungen.

XX. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner nebst einigen daraus fliessenden geometrischen Relationen. Von Ad. Schumann in Berlin . . . . . . . . . . . . . 363

XXI. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes. Von Ad. Schumann in Berlin . . . . . . . . . . . . . . . 368

XXII. Ueber die Krümmung der Flächen. Von Dr. O. Böklen in Reutlingen 369

XXIII. Ueber eine Transformation der Differentialgleichung $\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. Von Woldemar Heymann in Dresden . . . . . . 374

XXIV. Zwei projectivische Sätze. Von Schlömilch . . . . . . . . . 380

XXV. Beweis der vorigen Sätze Von Dr. Arnold Sachse in Strassburg i. E. (Taf. V Fig. 6 u. 7) . . . . . . . . . . . . . . . . . 381

XXVI. Ein elementargeometrischer Satz als Beitrag zur Theorie der stereographischen Projection. Von Fritz Hofmann in München . . . 383

### Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Zu F. Klein's Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen". Von Prof. Dr. M. Noether in Erlangen 201

Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Dr. Eduard Mahler in Wien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207

**Recensionen:**

Schlegel, Victor, Lehrbuch der elementaren Mathematik. Von Dr. Killing in Brilon . . . . . . . . . . . . . . . 211

Schendel, Leopold, Beiträge zur Theorie der Functionen. Von Dr. Killing in Brilon . . . . . . . . . . . . . . . 215

Maxwell, J. C., An elementary Treatise on Electricity. Von Pilgrim. 215

Fleischer, Dr., Der Hydromotor. Von P. Zech . . . . . . . 216

Fleischer, Dr., Die Physik des Hydromotors. Von P. Zech . . . 216

Rottok, Die Deviationstheorie. Von P. Zech . . . . . . . . 217

Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Von P. Zech . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217

Krebs, Grundriss der Physik für höhere realistische Lehranstalten. Von P. Zech . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217

Hochheim, Dr. Prof. Adolf, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von Cantor . . . . . . . . . . . 219

Lucas, M. Édouard, Récréations mathématiques. Von Dr. S. Günther 220

Steinhauser, Regierungsrath Dr. A., Sechs Karten zur mathematischen Geographie. Von Dr. S. Günther . . . . . 224

Israel-Holtzwart, Dr. Karl, Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten. Von Dr. S. Günther . . 226

Entgegnung. Von H. Undeutsch in Freiberg . . . . . . . . . 227

**Bibliographie** vom 16. August bis 31. October 1882:

Periodische Schriften . . . . . . . . . . . . . . . . . 229

Reine Mathematik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229

Angewandte Mathematik . . . . . . . . . . . . . . . . 230

Physik und Meteorologie . . . . . . . . . . . . . . . . 231

**Mathematisches Abhandlungsregister.** 1881. Zweite Hälfte. 1. Juli bis 31. December . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232

---

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

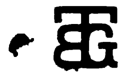
unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



## Supplement

zur historisch-literarischen Abtheilung

des XXVII. Jahrgangs.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1882.

# Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
## 1882.

**Abel, Niels Henrik,** oeuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 tomes. 4. geh. n. ℳ 24.—.

Tome premier [VIII u. 621 S.] contenant les mémoires publiés par Abel.
Tome second [IV u. 341 S.] contenant les mémoires posthumes d'Abel.

**Dronke, Dr. Adolf,** Direktor der Realschule I. O. zu Trier, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung. Unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker. [IV u. 97 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—.

**Durège, Dr. H.,** ord. Professor an der Universität in Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Dritte verbesserte Auflage [X u. 268 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—.

**Fiedler, Dr. Wilhelm,** Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lithogr. Tafeln. [XVI u. 264 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 9.—.

**Fuhrmann, Dr. Arwed,** ordentl. Professor am Königlichen Polytechnikum zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Ein Übungsbuch für Studierende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Teilen. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. [VI u. 222 S.] geh. n. ℳ 3.60.

Der I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper [VI u. 138 S.] n. ℳ 2.40, erschien 1879 in zweiter Auflage.

**Günther, Dr. Siegmund,** Professor am K. Gymnasium zu Ansbach in Bayern, parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung. [IV u. 99 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.80.

**Heiberg, Dr. J. L.,** litterargeschichtliche Studien über Euklid. [IV u. 224 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 5.60.

**Henrici, J.,** Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Zweiter Teil. Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum der Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem Kärtchen. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.80.

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik.

---

## Supplement

zur

historisch-literarischen Abtheilung

des XXVII. Jahrgangs.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1882.

# Abhandlungen

zur

# Geschichte der Mathematik.

---

## Viertes Heft.

I. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. (Mit einer lithogr. Tafel.)

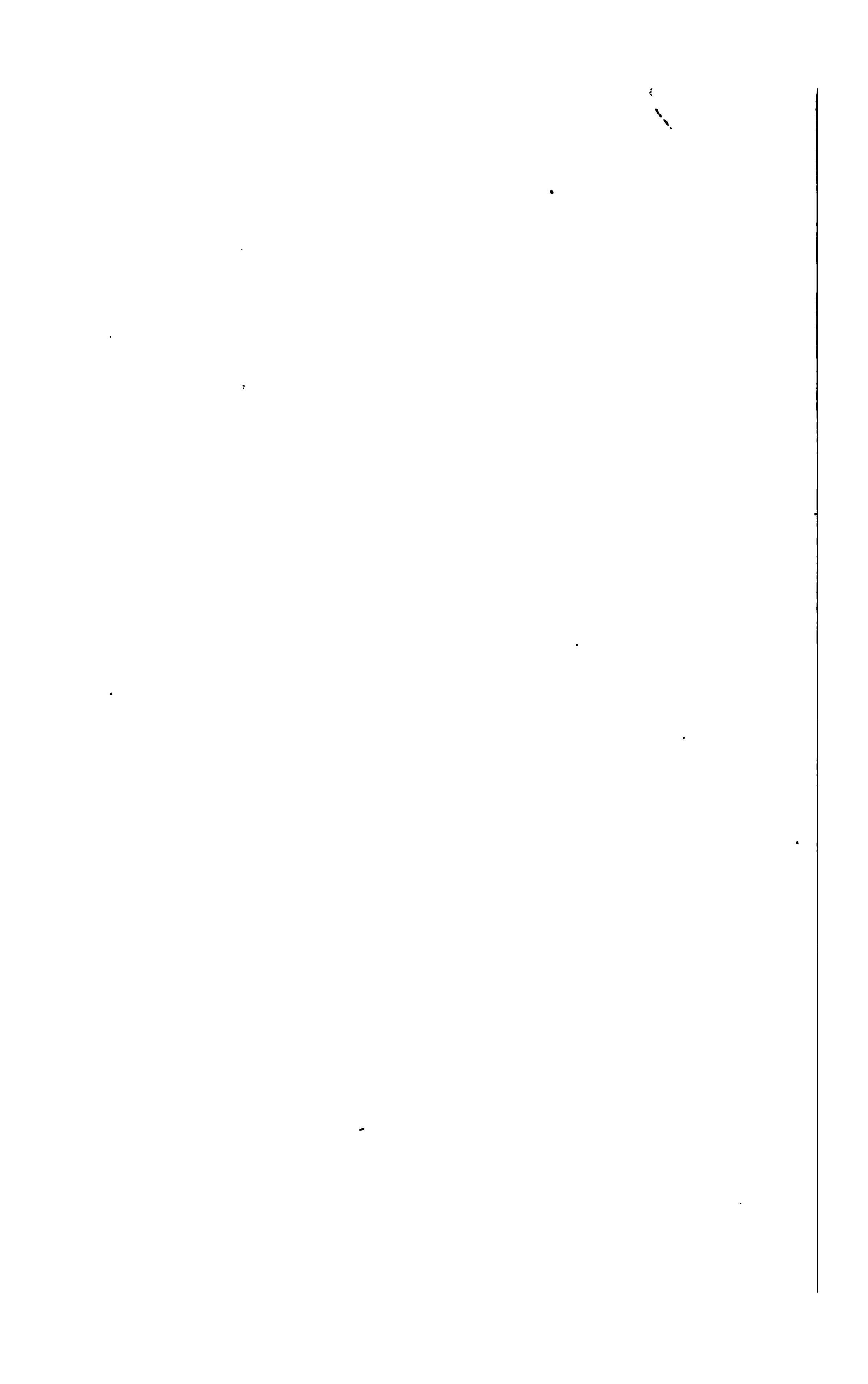
II. Der Traktat Franco's von Luettich: „de quadratura circuli.“ Herausgegeben von Dr. WINTERBERG.

III. Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer. Aus dem Jahre 1630. Von EUGEN GELCICH, Direktor der nautischen Schule in Lussinpiccolo.

IV. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Von Dr. P. KRAMER in Halle a. d. S.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1882.



DIE

# QUADRATISCHEN IRRATIONALITÄTEN

## DER ALTEN

## UND DEREN ENTWICKELUNGSMETHODEN.

VON

**Dr. Siegmund Günther.**

# Einleitung.

Die lange Zeit fast vollständig ausser Acht gelassene Frage, mit welchen Hülfsmitteln die Mathematiker des Alterthums die mancherlei exakten und angenäherten Werthe von Quadratwurzeln aufgefunden haben mögen, welche sich in ihren Schriften da und dort nachweisen lassen, ist in jüngster Zeit in ein ganz neues Stadium getreten und, wie man wohl sagen darf, eine brennende geworden. In rascher Folge erschienen und erscheinen noch Schriften und Abhandlungen in den verschiedensten Sprachen, welche die Lösung dieser Streitfrage anstreben, und über welche sich zu orientiren ebenso ein unabweisbares Bedürfniss des Forschers ist, als es auf der anderen Seite durch die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten erschwert wird. Dieser Aufgabe nun soll die nachfolgende Arbeit gerecht zu werden suchen; sie will das gesammte, beträchtliche Material dem Leser vorführen und durch eine sorgfältige, kritische Musterung den Leser in den Stand setzen, sich selbst darüber ein Urtheil zu bilden, welche Art und Weise der Ausziehung von Quadratwurzeln als die für das Alterthum natürlichste und damit wahrscheinlichste betrachtet werden könne. Es gewinnt so diese Untersuchung mehrfache Berührungspunkte mit einer anderen ähnlichen, welche vom Verf. bereits vor einigen Jahren veröffentlicht worden ist 1), allein Tendenz und Inhalt weisen nichtsdestoweniger auch sehr erhebliche Verschiedenheiten auf. Damals sollte in keiner Weise divinatorisch zu Werke gegangen werden, vielmehr ward mit den eben zur Verfügung stehenden Mitteln nach Möglichkeit blos das Problem zu lösen versucht 2): „Es soll nachgewiesen werden, dass und wie sämmtliche approximative Werthe, welche im Alterthum an den verschiedensten Stellen ohne irgendwelche nähere Bezeichnung ihrer Entstehungsweise sich vorfinden, lediglich mit Hülfe der in der Mathematik der Jetztzeit heimisch gewordenen Kettenbruch-Algorithmen einfach und sicher berechnet werden können." Nun werden selbstverständlich im Folgenden auch die mit den Kettenbrüchen in Verbindung stehenden Methoden keineswegs vernachlässigt werden, wie diess schon aus der Kapitel-Eintheilung hervorgeht, allein die Berücksichtigung wird keine exklusive sein dürfen, und im Gegentheile sollen nun-

mehr die früher ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossenen Kettenreihen (aufsteigenden Kettenbrüche) diessmal zu ihrem vollen Rechte gelangen. Wenn aber sonach die gegenwärtige Tendenz in der einen Richtung eine ungleich allgemeinere ist, als diess ehedem der Fall war, so tritt auf der anderen Seite eine sehr wesentliche Inhalts-Beschränkung doch wieder dadurch ein, dass in jener älteren Schrift sämmtliche Näherungsmethoden zur Sprache gelangten, sowohl diejenigen, welche sich auf die möglichst genaue Wiedergabe eines rationalen Zahlenverhältnisses in kleineren Zahlen beziehen, als auch diejenigen, deren man sich zur angenäherten Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln bediente, während jetzt eben nur von den quadratischen Irrationalitäten die Rede sein soll. Was den Zeitraum anbelangt, innerhalb dessen unsere Untersuchung sich zu bewegen hat, so darf wohl das Wort „Alterthum" nicht in einem zu engen Sinne gemeint sein; dass Alles, was etwa von byzantinischer Mathematik für unsere Zwecke Interesse bieten könnte, herbeigezogen werden muss, versteht sich ganz von selbst, allein auch andere Kulturvölker des Mittelalters werden wir in Betracht nehmen müssen, wenn wir zu wirklich abschliessenden Ergebnissen zu gelangen hoffen. Wir wissen, dass Inder und Araber ihre Bildung grossentheils aus griechischen, die christlichen Abendländer die ihrige fast einzig und allein aus römischen Quellen schöpften, und wenn sie die überkommenen Wissenselemente auch durchweg mit Zuthaten von eigener Erfindung zu versetzen pflegten, so tritt in der Mehrzahl der Fälle doch der wahre Ursprung — wenn auch erst bei genauerem Zusehen — zu Tage, und jedenfalls muss, wer von mathematischen Dingen bei Griechen und Römern handelt, auch auf deren wissenschaftliche Epigonen Rücksicht nehmen. Die untere Grenze ist für den Occident wenigstens von selbst mit Leonardo Pisano gegeben, der nicht blos in dieser Angelegenheit die Neuzeit einleitet und seinen sämmtlichen Leistungen auf arithmetischem Gebiete einen wahrhaft modernen Geist einzuflössen verstanden hat. — Unserem Programme gemäss wird unsere Darlegung sich nach drei grossen Unterabtheilungen zu gliedern haben. Die erste derselben begreift in sich alles wirklich vorhandene Material, alle Angaben, die sich aus den zeitgenössischen Schriftstellern über angenäherte Werthe quadratischer Irrationalzahlen und deren Entwickelungsmethoden entnehmen lassen. Auf dieser sozusagen empirischen Grundlage fusst zunächst der zweite Abschnitt, in welchem sämmtliche ältere und neuere Versuche Platz finden sollen, die uns verborgenen Näherungsmethoden der Alten irgendwie mit den uns bekannten Darstellungen einer Quadratwurzel durch einen absteigenden Kettenbruch in Beziehung zu setzen. Die dritte und letzte Abtheilung endlich soll jener Klasse von Divinationsversuchen gewidmet sein, welche darauf

abzielen, das Verfahren der Alten als ein nicht eben wesentlich von dem heutzutage noch in unseren Schulen gelehrten Berechnungsmodus verschiedenes hinzustellen. Die Gesammtliteratur, welche allmählich über diesen Gegenstand angewachsen ist, soll in diesen letzten beiden Abschnitten zur Besprechung gelangen, und wenn es auch vermessen wäre, zu sagen, dass nichts Hierhergehöriges vergessen worden sei, so darf vielleicht doch der Vermuthung Ausdruck gegeben werden, es treffe diese unbeabsichtigte Vernachlässigung wenigstens keine literarische Erscheinung von grossem Belang. Dass in dem zweiten und dritten Theile auch manche geschichtlich gleichgültige, wohl aber für Zahlentheorie und algebraische Analysis wichtige Nebenfragen eine Erörterung finden, wird wohl keiner besonderen Rechtfertigung bedürfen.

## Kapitel I.

### Unmittelbare Zeugnisse des Alterthums.

§. 1. *Das Irrationale bei den Griechen.* Dass schon in den ältesten Zeiten ein gewisses Bedürfniss sich geltend machte, die Zahl kennen zu lernen, welche mit sich selbst multiplicirt eine andere gegebene Zahl ergiebt, diess möchte wohl aus der Thatsache hervorgehen, dass Rawlinson auf einer assyrischen Thonplatte eine zum Theil im decimalen, zum Theil im sexagesimalen System gehaltene Tafel der sechzig ersten Quadratzahlen entdeckte 3). Derartige Tabellen mochten wohl auch noch für die Griechen des vorpythagoräischen Zeitalters dem Bedürfnisse vollkommen genügen; man war zufrieden, zu wissen, dass, wenn $m$ zwischen $a^2$ und $(a+1)^2$ lag, nun auch $\sqrt{m}$ zwischen $a$ und $(a+1)$ enthalten sein müsse, und hatte zunächst keine Veranlassung, eine Einschliessung zwischen näher an einander liegenden Grenzen anzustreben. Die Entdeckung — dieser Ausdruck dürfte in einer Angelegenheit von so hervorragender Wichtigkeit wohl am Platze sein — des Irrationalen denkt sich Cantor 4) in der Weise, dass man*) die Erfahrungswahrheit, wonach die drei Seiten 3, 4, 5 ein rechtwinkliges Dreieck liefern, zu verallgemeinern suchte: man hatte erkannt, dass für die Seiten dieses rechtwinkligen Dreiecks die Relation $3^2 + 4^2 = 5^2$ bestehe, und verfiel nun darauf, zu untersuchen, ob etwas Aehnliches auch bei anderen rechtwinkligen Dreiecken statthabe. Zunächst nahm man wohl das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck vor, prüfte mit dem Maassstab dessen Seitenlängen und überzeugte sich so, dass ein ge-

*) In ähnlicher Weise ward schon früher vom Verf. 4) die Auffindung des pythagoräischen Lehrsatzes auf ein Experimentiren mit rechtwinkligen Dreiecken von bestimmter Form zurückgeführt.

meinschaftliches Maass für Hypotenuse und Katheten wenigstens nicht ohne Weiteres zu finden sei. „Man erhielt", so spricht sich Cantor (a. a. O.) aus, „wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maasse der Hypotenuse nahe kamen, Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ würden wir heute sagen, aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schliessen, und diesen Schritt vollzog Pythagoras. Er fand, dass die Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit messbaren Katheten selbst unmessbar sei, dass sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei; er entdeckte das Irrationale, worauf das alte Mathematikerverzeichniss*) ein so sehr berechtigtes Gewicht legt." $\sqrt{2}$ ward demgemäss als die irrationale Zahl erkannt, und zwar offenbar von dem Meister selbst, denn im Gegensatz hierzu wird in Platon's „Theaetet" dem Pythagoräer Theodoros von Cyrene nachgerühmt, er habe auch die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ und $\sqrt{17}$ nachgewiesen 6). Indess gingen die griechischen Tendenzen schon damals viel weniger dahin, diesen Irrationalitäten eine rechnerisch brauchbare Seite abzugewinnen — das Irrationale war ja noch nicht dem eigentlichen Zahlbegriffe untergeordnet —, als vielmehr dahin, solche Grössen nach Möglichkeit bei der Rechnung zu vermeiden. Aus diesem Streben gingen die pythagoräische und die platonische Methode der ganzzahligen Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ hervor. In wieweit die unmittelbaren Nachfolger des Pythagoras, mochten sie nun zu seiner Schule gehören oder nicht, die Theorie des Irrationalen förderten, wissen wir nicht. Von dem bekannten Philosophen Demokrit wird eine Schrift „περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν" in zwei Büchern angeführt 7), von deren Inhalt der alte Berichterstatter wohl selbst nicht näher unterrichtet war; ein neuerer, sehr gründlicher Kenner der griechischen Geometrie, Allman, glaubt bei Demokrit bereits ganz zutreffende Anschauungen über das Mathematisch-Unendliche vorzufinden 8), und es würde dann die Annahme naheliegen, dass in der genannten Schrift zuerst eine über die Erfahrungsthatsachen hinausgehende, mehr wissenschaftliche Behandlung des Irrationalen enthalten gewesen sei.

Völlig klar über den tiefgreifenden Gegensatz zwischen Rational und Irrational, der nur in der Zahlenlehre, ganz und gar nicht aber in der Raumlehre hervortritt, war sich jedenfalls Platon, der ja überhaupt mit

*) So nennen wir mit Cantor 5) jene leider nur bruchstückweise auf uns gekommene Liste altgriechischer Mathematiker, die ursprünglich dem Werke des Eudemos über die Geschichte der Geometrie entstammt, uns aber lediglich durch die von dem Neuplatoniker Proklos in seinen Euklid-Commentar aufgenommenen Bestandtheile bekannt ist.

Vorliebe die philosophische Basis der Mathematik zum Gegenstande seines Studiums machte. Wir erwähnen als für uns bemerkenswerth nur der Stellen im „Theaetet“ (s. o.) und in der „Epinomis“, welche Rothlauf sogar zu der Ueberzeugung brachte 9), dass Platon auch vom Kubisch-Irrationalen Kenntniss gehabt habe, und sodann der merkwürdigen Betrachtung im „Timaeos“, durch welche die Wurzel eines Produktes aus sechs Faktoren als irrational dargethan wird, sofern nicht etwa je zwei dieser Faktoren einander gleich werden 10). Allein Platon ging anscheinend noch einen gewissen Schritt weiter, indem er sich nicht mit dieser allgemeinen Erkenntniss begnügte, sondern in einem Spezialfall wenigstens die Möglichkeit einer approximativen Ersetzung irrationaler durch rationale Zahlen in's Auge fasste. Im achten Buche seiner berühmten politischen Abhandlung „vom Staate“ erörtert er die Beschaffenheit einer gewissen ganzen Zahl, der er eine übersinnliche Einwirkung auf das staatsbürgerliche Leben zuschreibt, und die unter dem Namen „platonische Heirathszahl“ eine Menge der verschiedenartigsten Deutungen hervorgerufen hat*). Der bezügliche Text ist eben ein verderbter und schwer lesbarer, doch sind alle Ausleger über einen bestimmten Passus desselben einig, und dieser Passus ist es allein, mit welchem wir hier uns zu beschäftigen haben. Wird in einem Quadrate von der Seite 5 die Diagonale gezogen, so ist dieselbe $= \sqrt{50}$, also irrational; wird von dieser Zahl 50 eine Einheit abgezogen, so erhält man die Rationalzahl $\sqrt{49} = 7$, werden dagegen zwei Einheiten in Abzug gebracht, so ergiebt sich wiederum eine Irrationalzahl, nämlich $\sqrt{48}$. Diess ungefähr ist der Sinn der platonischen Stelle, an welche dann Cantor 13) noch die folgenden Ausführungen knüpft: „Platon hat, wie wir sehen, unzweifelhaft gewusst, dass $\sqrt{50}$ oder $5\sqrt{2}$ nur wenig von 7 sich unterscheidet. Ist er so weit gegangen, in der Praxis des Rechnens $\sqrt{2}$ annähernd gleich $\frac{7}{5}$ zu setzen? Darüber fehlt uns die Sicherheit, aber das steht fest, dass jenes Bewusstsein bei Platonikern und deren Schülern sich fortwährend erhalten hat.“ Ein Ausspruch des Proklos, auf welchen wir eben von Cantor hingewiesen werden, scheint zu Gunsten dieser Annahme zu sprechen: dieser gelehrte Scholiast sagt nämlich, es gäbe keine dem Doppelten irgend einer Quadratzahl genau gleiche Quadratzahl, wohl aber sei $2 . 5^2$ nur um 1

*) Man kann hierzu die erst vor Kurzem erschienene Monographie von Dupuis 11) oder auch einen Aufsatz 12) des Schreibers dieser Zeilen vergleichen. Dupuis giebt ausser einer neuen, sehr geistreichen Hypothese über den wahren Werth der mystischen Zahl auch eine umfassende Uebersicht über die zahlreichen früheren Erklärungsversuche, und diese Uebersicht ist in der zweitgenannten Arbeit bis auf die neueste Zeit ausgedehnt und zugleich mit einer Aufzählung der durch Dupuis' Interpretation veranlassten Kritiken verbunden worden.

von 7 verschieden 14). Da nun Proklos, der mit $\frac{7}{5}$ als mit einem Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ zu rechnen gewohnt ist, gleichwohl einer ganz an diejenige Platon's anklingenden Ausdrucksweise sich bedient, so mag man wohl vermuthen, der letztere sei sich ebenfalls völlig des Sachverhaltes bewusst gewesen.

Jedenfalls aber ist für den nächsten Zeitraum von irgendwelchen Bemühungen, Irrationalzahlen wirklich nach Thunlichkeit auszurechnen, nichts zu verzeichnen. Wohl aber machte die Theorie und begriffliche Durchbildung anerkennenswerthe Fortschritte, Aristoteles gab einen sinnreichen Beweis für die Thatsache, dass $\alpha^2$ nicht gleich $2\beta^2$ sein kann 15), dabei vielleicht auf einen bereits vorgefundenen Gedankengang Bezug nehmend. Eudoxos, der universellste Denker unter den älteren hellenischen Geometern, begründete die Proportionenlehre in systematischer Form, und zwar wird uns in dem sogenannten „Scholion des Adelos" ausdrücklich berichtet, dass er darauf gesehen habe, seinen Beweisen für rationale und irrationale Grössen gleiche Schärfe zu verleihen 16). Auf den Schultern dieser seiner sämmtlichen Vorgänger stehend, errichtete endlich Euklides sein berühmtes Lehrgebäude, in welchem auch die Lehre von den irrationalen Strecken resp. Zahlen eine vollkommen entsprechende Unterkunft fand. Das zehnte Buch der „Elemente", obwohl gewiss das wenigst gelesene von allen, trägt trotzdem vielleicht am Meisten den Stempel euklidischer Originalität. Was wir „irrational" nennen, führt bei Euklid allerdings den Namen „incommensurabel", und sein ἄλογος hat einen etwas anderen Sinn, als bei den späteren Arithmetikern des Alterthums, indess dürfen wir doch das bezügliche Buch als das Organon der antiken Lehre vom Irrationalen mit Recht bezeichnen. Nesselmann, auf dessen treffliche Inhalts-Analyse 17) wir hier verweisen müssen, bemerkt am Schlusse derselben 18): „Diese Formeln, welche wir meistens aus sehr complicirten und in einander geschobenen Quadratwurzeln gebildet in unserer Darstellung vor Augen gestellt haben, behandelt Euklid, ohne auch nur einer Quadratwurzel zu erwähnen." Darin jedoch hat Nesselmann (a. a. O.) Unrecht, dass er annimmt, die abstrakte Behandlung des Irrationalen habe nach Euklid vollständig brach gelegen und im Alterthum selbst gar keine Förderung mehr erfahren. Im Jahre 1853, also elf Jahre nach Veröffentlichung des Nesselmann'schen Buches, machte Woepcke, wie aus dem Berichte der zur Prüfung der Einsendung niedergesetzten Mitglieder Lamé und Chasles hervorgeht 19), der Pariser Akademie die Mittheilung, dass er in der arabischen Uebersetzung eines gewissen Abû Othmân von Damaskus einen Commentar zum zehnten Buche des Euklides aufgefunden habe, der von einem gewissen Valens (griechisch Βάλης), vermuthlich dem bekannten Astronomen Vettius Valens im II. nachchristlichen

Jahrhundert, herrühre. Darin sei auch von einer bis dahin unbekannten Arbeit des Apollonius Pergaeus über irrationale Grössen die Rede, und zwar stelle derselbe den ἄλογοι des Euklides als etwas Neues seine ἄλογοι ἄτακτοι gegenüber. Es scheine die betreffende Verallgemeinerung eine zwiefache zu sein, indem Apollonius nicht mehr blos, wie sein Vorgänger, Binome von der Form $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, sondern auch Binome $(\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b})$ und weiterhin willkürliche Polynome aus Wurzelgrössen der Betrachtung unterzogen habe. Unter dem Titel „Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles, d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe" reichte dann Woepcke seine tief durchdachte Divination der Akademie ein, die beiden früheren Ausschussmitglieder statteten ihren Auftraggebern einen äusserst günstig lautenden Bericht darüber ab 20) und veranlassten den Abdruck im „Recueil des savants étrangers." Cantor meint 21), aller Scharfsinn des Bearbeiters habe der ursprünglichen und höchst mangelhaften Darlegung des Valens nicht zu dem wünschenswerthen Grade der Sicherheit verhelfen können, und das ist gewiss wahr, indessen hat der Fund Woepcke's doch soviel unter allen Umständen bewiesen, dass Nesselmann's Ansicht (s. o.), zwischen Euklides und Pacioli habe sich Niemand mehr unter principiellen Gesichtspunkten mit der Lehre vom Irrationalen beschäftigt, nicht haltbar ist. —

Immerhin ist soviel wahr, dass die sechste Rechnungsoperation, die inverse des Potenzirens, von den griechischen Mathematikern der grossen Mehrzahl nach wesentlich anders aufgefasst ward, als von den zwei abstraktesten Denkern Euklides und Apollonius. Zwei verschiedene Richtungen sind hier deutlich zu unterscheiden. Da mit den Wurzelgrössen auch im besten Falle nur schwer und unbequem zu rechnen war, so suchten die mehr theoretisch angelegten Geister nach Rechnungsmethoden, durch welche ein für allemal und grundsätzlich das Irrationale überhaupt ausgeschlossen werden sollte, und diesen Bestrebungen, als deren Anfänge des Pythagoras und Platon Vorschläge zur Bildung rationaler Dreiecke anzusehen sind, dankte eine neue, schöne Disciplin, die unbestimmte Analytik, ihre Entstehung und Ausbildung.*) Andere Gelehrte wieder, die nicht sowohl

*) Xylander, der im Jahre 1575 zuerst in Deutschland eine Diophant-Uebersetzung herausgab, schildert in sehr bezeichnender Weise seine Verwunderung über die eigenartigen Betrachtungen des Arithmetikers. Er habe, nachdem er das zehnte euklidische Buch und alle neueren Arbeiten über „surdische" Zahlen sorgfältig studirt hatte, sich nunmehr im Besitze aller Kenntnisse geglaubt, deren man zum Lesen der alten mathematischen Klassiker bedürfe, und nun müsse er sich überzeugen, dass ihm das Alles beim Diophant gar nichts helfe, da derselbe alle irrationalen Zahlen zu vermeiden lehre. Diese seine Wahrnehmung habe ihn sehr unangenehm enttäuscht 22).

Arithmetik als vielmehr Logistik (Rechenkunst) treiben und arithmetische Anwendungen auf Geometrie, Geodäsie, Astronomie oder Mechanik machen wollten, mussten darauf ausgehen, das Irrationale nicht sowohl zu eliminiren, weil diess in der Praxis doch nur ganz ausnahmsweise anging, als vielmehr es durch rationale Näherungswerthe mit möglichst geringem Fehler zu ersetzen. Alles das nun, was auf diesem Gebiete einer annähernden thatsächlichen Berechnung quadratischer Irrationalitäten während des ganzen Alterthums geleistet worden ist, suchen wir in den folgenden Paragraphen zusammenzustellen.

§. 2. *Die Quadratwurzeln des Archimedes.* Der erste griechische Mathematiker, der, was keiner vor ihm gethan, mit irrationalen Grössen rechnen musste und sich nicht damit begnügen konnte, über dieselben zu spekuliren, war Archimedes. Wie man weiss, hat sich derselbe in seiner κύκλου μέτρησις die Aufgabe gestellt, die Seiten gewisser um und in einen Kreis beschriebener regelmässiger Vielecke in Theilen des Kreishalbmessers auszudrücken. Bekanntlich ist, wenn $AC$ (Fig. 1) diesen Radius $r$, $BC$ die halbe Seite $\frac{a}{2}$ des umbeschriebenen regelmässigen Sechseckes bedeutet,

$$r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1.$$

Archimedes kann hier also nicht umhin, die Quadratwurzel durch eine rechnerischer Behandlung zugänglichere Zahl zu ersetzen 24), und da er durch einen für uns vorläufig noch ganz verborgenen Gedankengang gefunden hat, dass $r : \frac{a}{2}$ ein wenig grösser als 265 : 153 ist, so substituirt er obiger Proportion die mit einer Gleichung sehr nahe zusammentreffende Ungleichung

$$\text{I. } r : \frac{a}{2} > 265 : 153.$$

Da ferner $a : \frac{a}{2} = 306 : 153$, so findet er durch die den Griechen sehr geläufige Zusammensetzung der Verhältnisse

$$(r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153.$$

Wird dann $D$ auf $BC$ so gewählt, dass $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$ wird, so ist nach einem bekannten Elementarsatze

$$\text{II. } r : CD = (r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153.$$

Um den nämlichen Satz ein zweitesmal anwenden zu können, nachdem $\sphericalangle CAD$ durch die Gerade $AE$ halbirt ist, berechnet Archimedes zunächst

$$r^2 : \overline{CD}^2 > 571^2 : 153^2,$$

$$(r^2 + \overline{CD}^2) : \overline{CD}^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2,$$

und, mit Zuziehung des pythagoräischen Lehrsatzes,

$$\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 > 349450 : 153^2.$$

Jetzt müsste sonach $\sqrt{349450}$ ermittelt werden; Archimed weiss, dass diese Irrationalzahl nur wenig grösser als $\left(591 + \frac{1}{8}\right)$ ist, und hat mithin

$$AD : CD > 591 \frac{1}{8} : 153$$

erhalten. Durch seine Proportionen erhält er aber auch

$$(r + AD) : CD = r : CE$$

und durch erneute Zusammensetzung, mit Rücksicht auf II.,

$$\text{III} . r : CE = 1162 \frac{1}{8} : 153.$$

Mit Hülfe dieser 3 Proportionen I, II, III ... lassen sich die Seiten des umbeschriebenen regulären Sechseckes, Zwölfeckes, Vierundzwanzigeckes u. s. w. lediglich durch den Radius $r$ ausdrücken, und identificirt man etwa den Umfang des $3 . 2^n$-Eckes mit der Kreisperipherie selbst, so findet man — modern gesprochen — durch Division mit $2r$ die Zahl $\pi$ selbst, resp. eine obere Grenze derselben. Der grosse Syrakusaner ging bis zum Sechsundneunzigeck und erhielt so $\pi < 3 \frac{10}{70}$; dabei hatte er noch mehrere Quadratwurzeln auszuziehen. Nachdem die obere Grenze gewonnen war, fand Archimedes durch eine Reihe analoger Schlüsse und analoger Wurzelausziehungen 24) auch die untere Grenze, indem er $\pi > 3 \frac{10}{71}$ setzte; im Ganzen musste er auf diese Weise acht Quadratwurzeln durch approximirte Werthe ersetzen, und zwar fand er — das Zeichen $\sim$ soll nach Cantor's Vorgang 25) für „annähernd gleich" gebraucht werden — nachstehende Werthe:

$$\sqrt{3} \sim \frac{265}{153}; \sqrt{349450} \sim 591 \frac{1}{8}; \sqrt{1373943 \frac{33}{64}} \sim 1172 \frac{1}{8};$$

$$\sqrt{5472132 \frac{1}{16}} \sim 2339 \frac{1}{4}, \sqrt{9082321} \sim 3013 \frac{3}{4}, \sqrt{3380929} \sim 1838 \frac{9}{11};$$

$$\sqrt{1018405} \sim 1009 \frac{1}{6}, \sqrt{4069284 \frac{1}{36}} \sim 2017 \frac{1}{4}.$$

Ausserdem giebt er auch für $\sqrt{3}$ noch einen zweiten Näherungswerth, indem er

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

setzt. Was die Genauigkeit dieser verschiedenen Zahlen anlangt, so ist dieselbe eine sehr verschiedene 26). So ist z. B. $2339 \frac{1}{4}$ ein sehr guter

Werth, dagegen wäre $591\frac{1}{7}$ weit exakter als $591\frac{1}{8}$ und doch auch, wie gefordert wird, $< \sqrt{349450}$. Wir enthalten uns, an dieser Stelle schon näher auf diesen Punkt einzugehen, da wir sonst kaum vermeiden könnten, auch die erst später zu diskutirende Frage, wie denn wohl Archimedes zu seinen Zahlwerthen gelangt sei, vorgreifend mit zu behandeln. Nur dessen sei noch gedacht, dass aus antiken Quellen gerade über jene Frage nicht der allermindeste Aufschluss zu erholen ist. Der Commentator Eutokios begnügt sich nämlich, die ungefähre Richtigkeit dieser Näherungswerthe dadurch in sehr hausbackener Weise nachzuweisen 27), dass er dieselben sämmtlich direkt in's Quadrat erhebt und so seinen Lesern zwar die nothwendigste Beruhigung, gewiss aber nicht wissenschaftliche Befriedigung verschafft. Zu seiner Rechtfertigung dient ihm eine kurze Erklärung, welche wir nach Nesselmann 28) hier wiedergeben wollen: „Wie man aber eine Wurzel findet, deren Quadrat einer gegebenen Zahl sehr nahe gleichkommt, ist von Heron in den *μετρικοῖς* und von Pappos, Theon und Anderen, welche die *μεγάλη σύνταξις* von Claudius Ptolemaeus commentirt haben, gelehrt worden. Daher haben wir nicht nöthig, Untersuchungen hierüber anzustellen, die Freunde der Wissenschaft bei Jenen nachsehen können.“ Leider ist dieser Trost für uns nutzlos, denn die bezüglichen Arbeiten von Heron und Pappos — wenn sie anders wirklich in dem von Eutokios angegebenen Sinne vorhanden waren — sind uns verloren gegangen, und wie wenig des Theon allerdings auf uns gekommene Schrift gerade die vorwürfige Frage zu fördern vermag, wird uns später klar werden. Auch eine andere Notiz des Commentators kann höchstens unser Bedauern erregen, so wichtige Dinge wahrscheinlich für immer verloren geben zu müssen. Er sagt nämlich später noch 29), ein gewisser Poros von Nicaea habe dem Archimedes dessen mangelhafte Bestimmung der Zahl $\pi$ zum Vorwurfe gemacht und dem gegenüber seinen Lehrer Philon Gadarensis gerühmt, welcher in seinem Buche *κηρία* verfeinerte Rechnungsmethoden auf diess Problem anzuwenden gelehrt habe. Von all' dem wissen wir leider gar nichts Genaueres, und nicht besser steht es mit unserer Kenntniss von den Leistungen eines gewissen Magnus, der ebenfalls auf diesem Felde thätig gewesen sein soll 30).

§. 3. *Aristarch von Samos.* Ein Zeitgenosse des Archimedes war der bekannte Astronom Aristarch, dessen Blüthezeit jedenfalls in die erste Hälfte des dritten vorchristlichen Jahrhunderts fällt. Von seinen beiden Schriften ist die eine, in welcher er die übliche geometrische Planetentheorie angriff, nicht auf uns gekommen, denn was Roberval unter dem Namen „Aristarchi Samii de mundi systemate libellus“ als ein griechisches Originalwerk herausgab, ist zu verschiedenen Zeiten von Torricelli, Weidler und Henri Martin

als eine untergeschobene Arbeit erkannt worden 31). Dagegen besitzen wir das unzweifelhaft ächte Werk *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης* des Aristarchos, welches im Alterthum ein Hauptstück in der unter dem Namen *ὁ μικρὸς ἀστρονομούμενος* bekannten Lehrbüchersammlung ausmachte, und zwar ward dieses Buch zuerst von Wallis in der Ursprache herausgegeben*). Die siebente Proposition 33) ist es, mit welcher wir hier es zu thun haben. Aristarch erörtert alldort sein bekanntes schönes Verfahren, die Entfernung der Erde von der Sonne gerade in dem Momente zu bestimmen, wenn der Mond halb erleuchtet und das Dreieck Erde-Mond-Sonne im Mond rechtwinklig ist. Durch direkte Beobachtung glaubt Aristarch den Dreieckswinkel an der Erde gleich $87^0$ — freilich sehr viel zu klein — gefunden zu haben und berechnet dann weiter den gesuchten Abstand der Erde von der Sonne

$$a = b \sec 87^0 = b \operatorname{cosec} 3^0,$$

wenn $a$ die Distanz ♁⊙, $b$ die Distanz ♁☾ bedeutet.**) Fig. 2 stellt uns das bezügliche Verfahren vor Augen, welches eben auch für die Geschichte des Irrationalen eine hohe Bedeutung besitzt; $A$ bedeutet die ⊙, $C$ die ♁ $B$ den ☾. Über $AC$ wird das Quadrat $ADEC$ beschrieben und ausser der Diagonale $CD$ noch die Halbirungslinie $CF$ des $\sphericalangle DCE = 45^0$ gezogen. Die verlängerte $CB$ schneidet die Quadratseite $DE$ in $G$, $\sphericalangle GCE$ ist der Voraussetzung gemäss $= 3^0$. Die ähnlichen Dreiecke $ABC$ und $CGE$ ergeben

$$\sec 87^0 = \frac{AC}{BC} = \left(\frac{GC}{GE} > \frac{HC}{GE}\right),$$

indem unter $H$ der Durchschnittspunkt von $CG$ mit einem dem Quadrate einbeschriebenen Quadranten verstanden wird. Des Ferneren ist

$$\frac{HC}{GE} = \frac{DE}{GE} = \frac{DE}{FE} \cdot \frac{FE}{GE}.$$

Nunmehr kommt die Bestimmung dieser letzten beiden Verhältnisse an die Reihe. Bezüglich des zweiten Verhältnisses wendet Aristarch — natürlich in geometrischer Einkleidung — den Satz an, dass für kleine Winkel die trigonometrischen Tangenten sich wie die Bögen verhalten; demgemäss ist

$$\frac{FE}{GE} \sim \left(\frac{22\frac{1}{2}}{3} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}\right).$$

*) Nach R. Wolf, dessen Darstellung wir bei dieser Sache überhaupt in erster Linie folgen, ist neuerdings auch eine französische Ausgabe des aristarchischen Traktates von Fortia d'Urban und eine deutsche Ausgabe von Nokk besorgt worden 32).

**) Vgl. hierzu einen das aristarchische Problem mit den Mitteln der neueren Analysis behandelnden Aufsatz von Grunert 34).

An Stelle des Zeichens $\sim$ wäre eigentlich $>$ zu setzen, wie es ja auch sein muss, weil es zunächst auf die Angabe einer oberen Grenze für sec 87° ankommt. Zur Bestimmung von $DE : FE$ dient dagegen, ganz wie bei Archimedes (§. 2) das Theorem, dass, wenn in einem Dreieck ein Winkel halbirt wird, die auf der Gegenseite entstehenden Abschnitte sich wie die anstossenden Seiten verhalten. Man hat nämlich

$$\frac{DE}{FE} = \frac{FE + DF}{FE} = 1 + \frac{DF}{FE} = 1 + \frac{CD}{CE},$$

oder, da $\overline{CD}^2 = 2 \cdot \overline{CE}^2$ ist,

$$\frac{DE}{FE} = 1 + \sqrt{2}.$$

Der praktische Astronom sieht sich nun in die Nothwendigkeit versetzt, mit dieser Irrationalzahl zu rechnen, und setzt demzufolge

$$\frac{DE}{FE} \sim \left(1 + \frac{7}{5} = \frac{36}{15}\right).$$

Durch Zusammensetzen der beiden Verhältnisse ergiebt sich

$$\frac{HC}{GE} > \left(\frac{15}{2} \cdot \frac{36}{15} = \frac{36}{2} = 18\right),$$

und sec $87^0 > 18$. Da Aristarch ferner durch ein noch ungleich einfacheres Verfahren sec $87^0 < 20$ ermittelt hat, so kann er mit völlig genügender Genauigkeit sec $87^0 = 19$ und die Entfernung der Erde von der Sonne gleich dem Neunzehnfachen der Entfernung der Erde vom Monde annehmen.

Wir haben in §. 1 gesehen, dass möglicherweise schon Platon eine Ahnung davon besass, der unechte Bruch $\frac{7}{5}$ lasse sich ohne erheblichen Fehler der Irrationalzahl $\sqrt{2}$ substituiren. Nunmehr erhalten wir die volle Gewissheit, dass ziemlich zu derselben Zeit, in welcher Archimedes $\sqrt{3}$ in rationale Grenzen einzuschliessen lehrte, ein anderer griechischer Mathematiker einen ähnlichen Fortschritt betreffs $\sqrt{2}$ vollzog und auf seine Wahrnehmung eine äusserst elegante Construktion begründete, an welcher nur lebhaft zu bedauern ist, dass sie, auf unrichtiger thatsächlicher Basis beruhend, der astronomischen Wissenschaft selbst keinen eigentlichen Vortheil bringen konnte.

§. 4. *Heron Alexandrinus.* Ganz ebenso wie Archimed für eine geometrische, Aristarch für eine astronomische Frage bedurfte Heron als Geodät bei den verschiedensten Gelegenheiten quadratischer Irrationalitäten; wir wollen dabei gleich erklären, dass wir im Anschluss an die für diesen Autor maassgebenden Forschungen Cantor's alle die verschiedenen Mathematiker, deren unter diesem Namen Erwähnung geschieht, in der Person des älteren Heron (um 100 v. Chr.) vereinigt annehmen 35). Obwohl auch er dem geometrischen Geiste seines Volkes, welches bei der Lösung einer Aufgabe

das plastische Bild des Gesuchten in Form einer construirten Linie oder Fläche mehr befriedigte, als eine herausgerechnete Zahl, nach Möglichkeit Rechnung trug, so z. B. bei seiner geometrischen Darstellung von $\sqrt[3]{2}$ im delischen Problem 36), so nahm er doch auch nicht den mindesten Anstand, mit irrationalen Zahlen im eigentlichsten Wortsinne zu rechnen. Heron's Arbeiten führten ihn auf Quadratwurzeln in allen möglichen Gestalten, sogar das Imaginäre liess ihn einmal ein fehlerhafter Diorismus streifen 37), und schon die nach ihm benannte Dreiecksformel 38)

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

kann beweisen, dass ihm Ausdrücke dieser Art durchaus vertraut waren, obgleich er allerdings für die gewöhnlichen Feldmesser nicht ungerne auch Näherungsformeln ohne Wurzeln an die Hand gab, mochte er auch persönlich von deren unzureichender Genauigkeit voll überzeugt sein 39). Ja Paul Tannery, ein Gelehrter, der neben Cantor und Hultsch neuerdings wohl am Meisten zur Vervollkommnung unserer Kenntnisse vom Wesen griechischer Mathematik beitrug, hebt sogar hervor, dass Heron so wenig vor den Wurzeln sich scheute, dass er sogar Formeln, die sich ohne grosse Schwierigkeit rational hätten herstellen lassen, mit irrationalen Bestandtheilen verbunden lässt. Tannery hat dabei den Umstand 40) im Auge, dass aus der von Heron für die Fläche $F$ eines Kreissegmentes gegebenen Formel ($s$ Sehne, $h$ Sagitte)

$$F = \frac{(s+h)\,h}{2} + \frac{1}{14}\cdot\frac{s^2}{4}$$

nicht die völlig genügende rationale Näherungsformel

$$b = s + h + \frac{h\left(1 - \frac{5}{28}\cdot\frac{s^2}{h^2}\right)}{1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{s^2}{h^2}}$$

für den Kreisbogen $b$ hergeleitet wird; vielmehr setzt Heron entweder

$$b = \frac{h}{4} + \sqrt{s^2 + 4\,h^2}$$

oder

$$b = \sqrt{s^2 + 4\,h^2} + \frac{h}{s}\left(\sqrt{s^2 + 4\,h^2} - s\right).$$

Wie nun freilich der alexandrinische Geometer im einzelnen Falle seine Wurzeln ausgerechnet habe, darüber können wir aus Quellenschriften nichts mittheilen. „Wenn wir“, sagt Cantor 41) „über die Methode der Quadratwurzelausziehung, über welche Heron, wie wir wissen, schrieb, nichts berichten, so unterbleibt es nur aus bedauernswerther Nothwendigkeit, weil diese zu Eutokios' Zeiten allgemein zugänglichen Kapitel aus dem geo-

metrischen Werke des Heron, als dessen Bestandtheile sie von Eutokios ausdrücklich bezeichnet werden, heute durchaus verschwunden sind. Es muss jedenfalls eine gute Methode gewesen sein, über welche Heron verfügte, da die bei ihm massenhaft auftretenden Quadratwurzelausziehungen sehr nahe richtig sind." Wir hoffen, im dritten Kapitel doch einigen Ersatz für den fehlenden Urtext beibringen zu können, doch ist es, wenn unsere spätere Darlegung eine übersichtliche werden soll, erforderlich, gleich hier das vorhandene Material von Thatsachen zusammenzubringen. Wir schliessen uns zu dem Ende an Tannery's Abhandlung an, in welcher alle bei Heron vorkommenden Quadratwurzeln in zwei Gruppen eingetheilt werden, deren erste wir etwa die geometrische, deren zweite 42) wir die goniometrische nennen wollen. Der französische Historiker theilt dann wieder aus gewissen sachlichen Gründen jede dieser Gruppen in gewisse Unterabtheilungen, und wir wollen ihm auch in dieser den Überblick wesentlich erleichternden Anordnung folgen, obwohl die Zweckmässigkeit der Klassifikation uns erst später einleuchten wird. Die uns interessirenden Stellen finden sich theils in der sogenannten Geometrie, theils in der sogenannten Stereometrie, theils endlich im Buche vom Landbau (liber geeponicus). Alle geometrischen Schriften Heron's sind von Hultsch in seiner bekannten trefflichen Ausgabe 43) vereinigt worden, auf welche im Folgenden stets Bezug genommen wird.

*Geometrische Gruppe. Abtheilung I.* Es ist 44)

$$\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16}.$$

Es ist 45)

$$\sqrt{1125} \sim 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}.$$

Es ist 46)

$$\sqrt{1081} \sim 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

Es ist 47)

$$\sqrt{50} \sim 7 + \frac{1}{14}.$$

Es ist 48)

$$\sqrt{75} \sim 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

*Abtheilung II.* Es ist 49)

$$\sqrt{58 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 7 + \frac{2}{3}.$$

Es ist 50)

$$\sqrt{444 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} \sim 21 + \frac{1}{12}.$$

Es ist 51)

$$\sqrt{3400} \sim 58 + \frac{1}{3}.$$

Es ist 52)

$$\sqrt{54} \sim 7 + \frac{1}{3}.$$

*Abtheilung III.* Es ist 53)

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}.$$

Es ist 54)

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

Es ist 55)

$$\sqrt{6300} \sim 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}.$$

Es ist 56)

$$\sqrt{1575} \sim 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51}.$$

Es ist 57)

$$\sqrt{216} \sim 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}.$$

*Abtheilung IV.* Es ist 58)

$$\sqrt{356 + \frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}.$$

Es ist 59)

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

*Abtheilung V.* Es ist 60)

$$\sqrt{5000} \sim 70 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Es ist 61)

$$\sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Es ist 62)

$$\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Es ist 63)

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9}.$$

*Abtheilung VI.* Es ist 64)

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}.$$

Es ist 65)

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

*Abtheilung VII.* Es ist 66)

$$\sqrt{108} \sim 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Es ist 67)

$$\sqrt{2460 + \frac{15}{16}} \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51}.$$

Es ist 68)

$$\sqrt{615 + \frac{15}{64}} \sim 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

*Goniometrische Gruppe.* Heron ist der älteste Geometer, welcher in bewusster Weise trigonometrische Aufgaben in der Ebene auflöste, denn was Hipparch, über welchen der nächste Paragraph zu vergleichen ist, auf diesem Gebiete leistete, gehört ganz der Raumtrigonometrie an. Heron dagegen ging mit Klarheit und Entschiedenheit darauf aus, den Flächeninhalt jedes regulären Vielecks — bis zu einer gewissen Grenze hin — als Funktion der Seite darzustellen, und indem er also den Flächeninhalt $F_n = a_n^2 \cdot \text{Const.}$ setzte, unter $a_n$ die Seite verstanden, musste er diese Constante als eine trigonometrische Funktion darstellen, und in der That ist

$$\text{Const.} = \frac{n}{4} \cdot \text{cotang} \frac{180^0}{n}.$$

Da wenigstens einzelne dieser Formeln in allen drei als echt heronisch anerkannten Büchern vorkommen, so glaubt Cantor 69) diese zur Zeit bekannten ältesten trigonometrischen*) Formeln auch wirklich auf den alexandrinischen Geometer zurückführen zu müssen. Tannery theilt dieselben in vier Unter-Gruppen, je nachdem das obige $n = 3 . 2^m$ oder $= 2 . 2^m$ oder $= 5 . 2^m$ oder gleich einer anderen Zahl ist. Folgendes Schema entspricht Tannery's Eintheilungsprincip, und zwar stehen zur Linken die heronischen Näherungswerthe, zur Rechten dagegen die genauen Werthe, so wie sie mit Hülfe logarithmischer Tafeln berechnet worden sind.

| | | |
|---|---|---|
| *Abtheilung I.* | $F_3 \sim \frac{13}{30} a_3^2 \sim 0{,}433333\, a_3^2,$ | $F_3 = 0{,}433013\, a_3^2;$ |
| | $F_6 \sim \frac{13}{5} a_6^2 \sim 2{,}6\, a_6^2,$ | $F_6 = 2{,}598176\, a_6^2;$ |
| | $F_{12} \sim \frac{45}{4} a_{12}^2 \sim 11{,}25\, a_{12}^2,$ | $F_{12} = 11{,}196152\, a_{12}^2.$ |
| *Abtheilung II.* | $F_4 = a_4^2,$ | $F_4 = a_4^2;$ |
| | $F_8 \sim \frac{29}{6} a_8^2 \sim 4{,}833333\, a_8^2,$ | $F_8 = 4{,}828427\, a_8^2.$ |
| *Abtheilung III.* | $F_5 \sim \frac{5}{3} a_5^2 \sim 1{,}666666\, a_5^2,$ <br> $F_5 \sim \frac{12}{7} a_5^2 \sim 1{,}714285\, a_5^2,$ | $F_5 = 1{,}720477\, a_5^2;$ |
| | $F_{10} \sim \frac{15}{2} a_{10}^2 \sim 7{,}5\, a_{10}^2,$ | $F_{10} = 7{,}694208\, a_{10}^2.$ |

*) Man müsste denn als noch ältere Spur trigonometrischer Rechnung jenes

*Abtheilung IV.* $F_7 \sim \frac{43}{12} a_7^2 \sim 3{,}583333\ a_7^2$, $F_7 = 3{,}633910\ a_7^2$;

$$\left\{\begin{array}{l} F_9 \sim \frac{51}{8} a_9^2 \sim 6{,}375\ a_9^2, \\ F_9 \sim \frac{19}{3} a_9^2 \sim 6{,}333333\ a_9^2, \end{array}\right. \quad F_9 = 6{,}181824\ a_9^2;$$

$$F_{11} \sim \frac{66}{7} a_{11}^2 \sim 9{,}421571\ a_{11}^2, \quad F_{11} = 9{,}365502\ a_{11}^2.$$

Auch über diese merkwürdigen Näherungsformeln können wir hier keine thatsächlichen Aufklärungen beibringen, da sie im Alterthum eine ganz isolirte Stellung eingenommen zu haben und von den späteren griechischen Mathematikern nicht weiter beachtet worden zu sein scheinen.

Von diesen Näherungswerthen dürfte besonders jener für

$$\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

bemerkenswerth sein, der aus $(F_3 = \frac{1}{4} a_3^2 \sqrt{3}) \sim \frac{13}{30} a_3^2$ hervorgeht. Mit ihm werden wir uns in der Folge sehr eingehend zu befassen haben. Für $\sqrt{2}$ findet sich ein Rationalwerth bei Heron wenigstens nicht unmittelbar, wohl aber hat Cantor 71) mittelst einer sehr scharfsinnigen Ueberlegung es wenigstens sehr wahrscheinlich gemacht, dass Jener die uns von Platon und Aristarch her bekannte Relation $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$ gekannt hat. Es wird nämlich im liber geeponicus die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes von den Katheten 30 und 40 das einemal richtig 72) $= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$, das anderemal 73) $= 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot (30 + 40)$ gesetzt, was natürlich keinen rechten Sinn hat. Einen gewissen Sinn ergäbe, so meint Cantor (a. a. O.), die Formel nur dann, wenn man annehme, dass eine falsche Verallgemeinerung einer am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck bemerkten Eigenschaft vorliege. Man habe sich überzeugt, dass wenn zwei Katheten $a$ und $b$ einander gleich sind, die Formel für die Hypotenuse

$$c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = (a + a) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$$

sei und habe daraus den falschen Schluss gezogen, es sei für jedes rechtwinklige Dreieck

$$c = 5 \cdot \frac{1}{7} (a + b) \cdot$$

Heron hat natürlich, wenn sich diess wirklich so verhält, den Sach-

im mathematischen Handbuch des Aegypters Aahmes 70) vorkommende Verhältniss „Seqt“ gelten lassen wollen, welches allerdings eine Winkelfunktion repräsentirte.

verhalt klar durchschaut, allein wir wissen ja, dass er auch unrichtigen Sätzen einen Platz in seinem offiziellen Lehrbuche der Feldmesskunst gönnte, sei es, weil dieselben bereits allzu eingebürgert waren, sei es, weil er wirklich den Routiniers das Ausziehen von Wurzeln möglichst ersparen wollte. Für $a \sim b$ kann ja auch der Formel ein approximativer Charakter nicht abgesprochen werden.

Einen zweiten Anklang an $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$ glaubt Cantor 74) darin erblicken zu sollen, dass Heron im „Landbau" 75) die Seite $a_8$ des regulären Achteckes durch den Durchmesser $d$ des umbeschriebenen Kreises in folgender Weise ausdrückt:

$$a_8 = \frac{5}{12} d.$$

Berechnet man nämlich streng geometrisch $a_8$ aus $d$ und setzt in der resultirenden Formel $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$, so ergiebt sich

$$a_8 \sim \frac{5}{13} d,$$

und hieraus könnte durch ein leicht erklärliches Abschreiber-Versehen der angeblich heronische Werth entstanden sein.

Endlich ist noch anzumerken, dass Heron für die so häufig in seinen Rechnungen auftretende Quadratwurzel aus 3 mit Vorliebe den Werth (s. o.) $\frac{26}{15}$ setzt, wie diess aus verschiedenen Stellen seiner Werke hervorgeht 76). Er drückt diess entweder dadurch aus, dass er sagt, die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck sei gleich

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$

der Seite, oder dadurch, dass er, unter $a$ diese Seite verstanden, für den Flächeninhalt dieses Dreieckes den Werth

$$a^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)$$

angiebt. Namentlich an diese letztere Form haben sich Jene gehalten, die später aus Heron schöpften.

§. 5. *Die Sexagesimalbruchrechnung der Astronomen.* Im Anschlusse an die bei den Mesopotamiern herrschend gewordene Sitte 75), jede Zahl durch eine Reihe von der Form

$$\ldots a \,.\, 60^3 + b \,.\, 60^2 + c \,.\, 60 + d + e \,.\, \overset{-1}{60} + f \,.\, \overset{-2}{60} + g \,.\, \overset{-3}{60} + \cdots$$

darzustellen, bildeten sich die griechischen Astronomen, ganz unabhängig von den am Decimalsystem festhaltenden Vertretern der übrigen mathematischen Wissenschaften, einen selbstständigen Calcul der sechzigtheiligen

Brüche aus. Ein sehr hohes Alter kommt demselben gerade nicht zu; von Autolykos, der nicht sehr lange vor Euklid über die Auf- und Untergänge der Sterne schrieb, wissen wir auf's Bestimmteste, dass ihm die Eintheilung des Kreises in 360 Grade ganz ebenso unbekannt war, wie jede Art trigonometrischer Rechnung, und auch der gelehrte Polyhistor Eratosthenes befand sich, wie der genaueste Kenner seiner Werke, H. Berger, sehr wahrscheinlich zu machen gewusst hat, ganz im gleichen Falle 77). Hipparch muss sonach als der eigentliche Erfinder beider Neuerungen, der Trigonometrie und der astronomischen Logistik, betrachtet werden 78); nur bezüglich der letzteren könnte ihm möglicherweise der ungefähr zur gleichen Zeit lebende Hypsikles den Vorrang streitig machen. Erstere erfordert nun freilich auch Quadratwurzelausziehungen, allein die Auflösung rechtwinkliger Kugeldreiecke, über welche Hipparch nicht hinausging, lässt sich auch ohne jene bewerkstelligen, und mit ebener Trigonometrie hat er sich höchstens ganz ausnahmsweise beschäftigt.*) Jedenfalls aber berechnete er zuerst eine Tafel, welche aus einer gegebenen Sehne auf den zugehörigen Centriwinkel und umgekehrt aus dem Centriwinkel auf die Sehne zu schliessen gestattete, und dabei konnten Quadratwurzeln füglich nicht umgangen werden. Arabische Quellen, die Woepcke 81) namhaft macht, wissen auch, dass Hipparch eine Abhandlung über Theilung der Zahlen und eine zweite über Algebra (quadratische Gleichungen) verfasst habe. Derselbe muss also quadratische Irrationalitäten näherungsweise berechnet haben, und es ist nur auf's Tiefste zu bedauern, dass uns jede Kunde über das Wie fehlt. Mollweide freilich ist der Meinung 82), die von Ptolemaeus gelehrte Methode zur Construktion einer Sehnentafel sei völlig auch die des Hipparch gewesen, und ganz besonders dürfe der gleich nachher zu besprechende wichtige Näherungswerth für $\sqrt{3}$ unbedenklich als hipparchisch angesehen werden.

Treten wir jetzt den bei Ptolemaeus vorkommenden Quadratwurzeln etwas näher. Sehr gross ist die Ausbeute nicht, die wir bei ihm machen, da auch für ihn die ebene Trigonometrie nur ganz im Vorbeigehen Gegenstand des Interesses war, doch findet sich immerhin Manches vor. So ist er, um die Grösse der verfinsterten Sonnenscheibe zu bestimmen 83), ge-

*) Berger freilich, der mit äusserster Sorgfalt alle Nachrichten über den Astronomen von Nicaea gesammelt hat 79), erwähnt 80) bei den verschiedensten Gelegenheiten auch einer in das letztere Gebiet einschlagenden Arbeit desselben, von welcher wir nur leider gar keine Einzelheiten kennen. Eratosthenes nämlich zerlegte der Übersicht halber die Länder der γῆ οἰκουμένη in geometrische Figuren, die σφραγῖδες, und Hipparch soll eben durch trigonometrische Analyse des Umfanges und Inhaltes dieser Figuren den Nachweis geführt haben, dass die Eintheilungsweise des Alexandriners eine willkürliche und unberechtigte sei.

zwungen, in einem Dreieck $ABC$ (Fig. 3), worin $AB = 6$, $BC = 4 + \frac{28}{60}$, $\sphericalangle ACB = 90^0$ ist, die Seite $AC$ zu berechnen und findet demgemäss

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{36 - \left(4 + \frac{7}{15}\right)^2}.$$

Hierbei hilft er sich nun freilich ohne grosse Bedenklichkeit, indem er $\frac{7}{15} \sim \frac{1}{2}$ und somit

$$AC \sim \left(\sqrt{36 - 16 - 4} = 4\right)$$

setzt, den Bruch $\frac{1}{4}$ obendrein vernachlässigend. Für den angestrebten Zweck war dieser Genauigkeitsgrad freilich wohl hinreichend.

In die Berechnung seiner trigonometrischen Tafel hat uns Ptolemaeus einen klaren Einblick verstattet; Ideler hat 84) diesen Calcul in einer neueren Lesern trefflich entsprechenden Form dargestellt. Da der Grundgedanke der ist, aus den zu den Centriwinkeln $\alpha$ und $\beta$ gehörigen Sehnen chord $\alpha$ und chord $\beta$ die Sehne chord $\gamma$ der Differenz $\alpha - \beta = \gamma$ mittelst des nach Ptolemaeus benannten Satzes vom Kreisviereck zu finden, so musste anhaltend ($d$ Kreisdurchmesser) nach der Formel

$$d \,.\, \text{chord}\, \gamma = \text{chord}\, \alpha \sqrt{d^2 - (\text{chord}\, \beta)^2} - \text{chord}\, \beta \sqrt{d^2 - (\text{chord}\, \gamma)^2}$$

gerechnet werden; Quadratwurzelausziehungen standen also recht eigentlich auf der Tagesordnung. Ausserdem kam auch gleich im Anfange vor, chord $120^0$ aus chord $60^0 = r$ zu finden; diess geschieht bekanntlich mittelst der Relation

$$\text{chord}\, 120^0 = r\sqrt{3}.$$

Bei Ptolemaeus wird nun

$$\frac{\text{chord}\, 120^0}{r} = \sqrt{3} \sim \left(103 + \frac{55}{60} + \frac{23}{60^2}\right) : 60$$

gesetzt. Dieser Werth macht auf's Erste einen ganz fremdartigen Eindruck; erwägt man aber, dass die Summe der beiden in der Klammer stehenden Brüche von 1 nur um einen kaum nennenswerthen Betrag abweicht, so erhält man, worauf zuerst von Mollweide 85) aufmerksam gemacht worden zu sein scheint,

$$\sqrt{3} \sim \left(\frac{104}{60} = \frac{26}{15}\right).$$

Gerade dieser Näherungswerth, der uns an dieser Stelle zum zweitenmale begegnet (s. o. § 4), muss aber besondere Beachtung finden.

Ungleich weniger geeignet, diess zu thun, sind die übrigen bei Ptolemaeus vorkommenden Näherungswerthe, und zwar aus dem für den Autor an sich sehr rühmlichen Umstande, dass sie streng methodisch berechnet

worden sind. Und diese Methode kennen wir ganz aussergewöhnlich genau aus einer späteren griechischen Schrift. Ein im vierten Jahrhundert n. Chr. lebender Astronom, Namens Theon, hat in seinem Commentar zum Almagest das Verfahren, dessen man sich beim sechzigtheiligen Calcul zur Ausziehung von Quadratwurzeln zu bedienen pflegte, weitläufig auseinandergesetzt, und prüft man die ptolemaeischen Zahlen auf dieses Verfahren, so stimmt das Ergebniss der Art, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, Ptolemaeus habe wirklich in dieser Art und Weise seine Berechnungen angestellt. Ehe wir jedoch zu diesem Commentator Theon uns wenden können, haben wir zuvor noch eines anderen gleichnamigen Mathematikers zu gedenken, der uns über die Quadratwurzeln bei den Alten ebenfalls Eröffnungen macht, und zwar solche, die kaum minder wichtig für den Geschichtschreiber der exakten Wissenschaften sind, als jene seines Namensvetters.

§. 6. *Theon von Smyrna.* Um 130 n. Chr. lebend — die Zeit lässt sich durch von ihm angestellte Himmelsbeobachtungen ziemlich genau festlegen —, hat Theon Smyrnaeus sich die Aufgabe gestellt, in einem besonderen Werke alle mathematischen Vorkenntnisse zu vereinigen, deren man zur Lektüre der platonischen Schriften bedarf. Dieses Werk, von dem früher nur die einzelnen Theile besonders herausgegeben worden waren, hat neuerdings eine Gesammtausgabe erfahren 86). Es besteht aus einer Arithmetik mit musikalischem Anhang und aus einer Astronomie. Im erstgenannten Theile findet sich 87) die Stelle, an welche wir anzuknüpfen haben; ihre Bedeutung speziell für die Lehre vom Irrationalen scheint zuerst von Unger 88) erkannt worden zu sein, allein diese gelegentliche Wahrnehmung war wieder ganz verschollen, und Cantor gebührt das Verdienst, von Neuem an die Bedeutung der Stelle erinnert zu haben 89).

Theon construirt am angeführten Orte gewisse Zahlen, welche er nach griechischer Sitte als „Seitenzahlen" (πλευραί) und „Diametralzahlen" (διάμετροι) kennzeichnet. Er geht aus von zwei Einheiten und bildet resp.

$$1 . 1 + 1 = 2, \qquad 2 . 1 + 1 = 3$$

als erste Seiten- und Diametralzahl. Damit ist das Bildungsgesetz dieser Zahlen angedeutet; versteht man unter $a_n$ und $d_n$ bezüglich die $n$te Seiten- und Diametralzahl, so ist

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n,$$

so dass mithin $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $a_2 = 2$, $d_2 = 3$, $a_3 = 5$, $d_3 = 7$, $a_4 = 12$, $d_4 = 17$, $a_5 = 29$, $d_5 = 41$ u. s. w. wird. Alsdann gilt der Lehrsatz

$$d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1,$$

den Theon ausdrücklich aufstellt, allerdings ohne ihn mit einem Beweise zu versehen. Indess ist dieser letztere so ungemein einfach, dass man wohl

folgern darf, der griechische Mathematiker habe ihn gekannt und nur seiner Selbstverständlichkeit wegen nicht mitgetheilt. Diess geht aus dem Folgenden unmittelbar hervor. Man hat nämlich

$$d_n^2 - 2a_n^2 = (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2$$
$$= 4a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2 - 4a_{n-1}d_{n-1} - 2d_{n-1}^2$$
$$= -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) = +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2),$$

und da $d_1^2 - 2a_1^2 = -1$ ist, so ist auch die ursprüngliche Gleichung erhärtet. Diess alles wusste man schon früher, allein Cantor hat daraus den schwer anfechtbaren Schluss gezogen, dass Der, dem obiger Lehrsatz geläufig war, doch auch wissen musste, der Quotient $d_n^2 : a_n^2$ unterscheide sich nur wenig von 2, der Quotient $d_n : a_n$ also um noch weniger von $\sqrt{2}$. War dem aber so, dann wusste man auch, dass die unächten Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29} \ldots$$

eine dem wahren Werthe von $\sqrt{2}$ sich mehr und mehr nähernde Reihe bilden, und unter diesen befindet sich, als dritter, jener bequeme Bruch $\frac{7}{5}$, welchem wir bereits dreimal bei Platon, bei Aristarch, bei Heron Alexandrinus begegnet sind. Erst im nächsten Kapitel wird uns die hohe Wichtigkeit dieser eigenartigen und den griechischen Arithmetikern im Uebrigen fremden Gedankenreihe zum vollen Bewusstsein kommen. Nesselmann, dem diese Seite der Sache offenbar nicht aufgefallen ist, und der auf die Stelle deshalb auch kein so hohes Gewicht legt, in ihr sogar ursprünglich nur einen gelegentlichen Einfall Theons erblickt, kann trotzdem nicht umhin, zuzugestehen 90): „Diese Spielerei mit (geometrischen) Analogieen wird wichtiger, wenn wir sie von ihrer wissenschaftlichen Seite in's Auge fassen, und sie wird dann eine Methode, alle Auflösungen in ganzen rationalen Zahlen zu finden, deren die beiden Gleichungen

$$2t^2 + 1 = u^2 \text{ und } 2x^2 - 1 = y^2$$

fähig sind.“ Unter allen Umständen also hat die Geschichte der unbestimmten Analytik von Theon's Betrachtung Notiz zu nehmen.

Freilich macht uns dieser Mann so wenig den Eindruck eines selbstdenkenden Geistes, dass man halb und halb genöthigt ist, ihm die eigentliche Autorschaft abzusprechen. Darauf deutet auch Cantor (a. a. O) sehr bestimmt hin, ohne eine weitere Vermuthung auszusprechen; was er unterliess, hat Paul Tannery gethan, der den Keim dieser Untersuchung eben in jenen platonischen Schriften zu finden glaubt, deren Erläuterung Theon seine Schrift gewidmet hatte. In seiner eingehenden Schilderung

der platonischen Unterrichtsmethoden hebt der französische Forscher 91) die hohe Wahrscheinlichkeit der Annahme hervor, dafs man bereits zu Lebzeiten des Meisters innerhalb der Akademie mit dem Studium der unbestimmten Gleichung

$$2x^2 - y^2 = \pm 1.$$

begonnen habe und wohl auch zu einzelnen Lösungen gelangt sei, wenn auch vielleicht die Auffindung der „vollständigen" Lösung dem Theon vorbehalten bleiben müsse. „Cette solution, qui donne une série de valeurs rationelles et de plus en plus approchées pour l'incommensurable $\sqrt{2}$, était au reste très-facile à obtenir pour les anciens, en poursuivant, d'après leur procédé, l'extraction de cette racine."

§. 7. *Spätere Hinweise auf die Theon'sche Methode.* Auch der Neuplatoniker Jamblichos kennt die Seiten- und Diametralzahlen und deren Berechnung 92), indess geht das, was er darüber mittheilt, in keiner Weise über die Angaben des Theon hinaus. Ebenso scheint Proklos, für den als einen Anhänger der gleichen philosophischen Richtung diese altplatonische Theorie besonderes Interesse gehabt haben müsste, wenigstens einige Kenntniss von der Sache besessen zu haben. Wir reproduciren die Stelle, welche wir im Auge haben 93), wörtlich nach der Nesselmann'schen Uebertragung: „Es giebt zwei Arten rechtwinkliger Dreiecke, gleichschenklige und ungleichseitige; in dem gleichschenkligen ist es nicht möglich, Zahlen zu finden, welche den Seiten entsprechen; denn es giebt keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl wäre, es sei denn, dass Jemand um 1 verschiedene Zahlen meinte; so ist z. B. das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrats von 5 weniger 1." Es bedarf wohl kaum ausdrücklicher Hinweisung auf den Umstand, dass diess eben jene Stelle des Proklos ist, auf welche in §. 1 Bezug genommen ward, und die eben auch mit Erfolg für die Theorie Tannery's vom platonischen Ursprung der Seiten- und Diametralzahlen verwerthet werden könnte.

Es läge gewiss nahe, zu erwarten, dass in dem umfassenden Werke des Diophant, das doch eine wahrhaft erdrückende Masse von Aufgaben aus der unbestimmten Analytik enthält, auch der obige Spezialfall der jetzt — irrthümlich — so genannten Pell'schen Gleichung zur Behandlung gelangte. Dem ist jedoch nicht so*); diese originelle und elegante Lehre tritt im griechischen Alterthum nur ganz vereinzelt auf.

---

*) Beiläufig wollen wir bemerken, dass, wie schon aus den Ausführungen in §. 1 zu schliessen, die ἀριθμητικά des Diophant für uns gar keine Ausbeute gewähren. Nicht, als ob derselbe den Quadratwurzeln als solchen aus dem Wege gegangen wäre, im Gegentheile. In seiner Schrift über die Polygonalzahlen

§. 8. *Theon Alexandrinus.* Die chronologische Entwickelung führt uns nunmehr wieder zu jenem anderen Theon zurück, von welchem bereits in §. 5 in Verbindung mit den bei Ptolemaeus vorkommenden Quadratwurzeln die Rede war. Als bekannt dürfen wir also voraussetzen, dass Theon die den griechischen Astronomen eigenthümliche Methode schilderte, die zweite Wurzel aus solchen Zahlen auszuziehen, welche durch eine nach absteigenden Potenzen von 60 geordnete Reihe dargestellt sind. Ob freilich nicht bereits vor ihm, der unter Theodosius I. lebte, entsprechende Erläuterungen zum Almagest niedergeschrieben wurden, ist fraglich, denn wie wir uns aus §. 2 entsinnen, soll ja Pappos, aus dessen hochwichtiger „mathematischer Sammlung" die arithmetischen Bestandtheile fast gänzlich ausgefallen sind, über die Ausziehung von Quadratwurzeln gehandelt haben, wahrscheinlich also auch über die des Almagestes 98). Man glaubte sogar in einem von dem Pariser Bibliothekar C. Henry herausgegebenen Bruchstück 99) den Commentar zum I. Buche der μεγάλη σύνταξις zu erkennen, doch selbst, wenn sich diess bestätigen sollte, vermögen wir an dieser Stelle keinen Nutzen daraus zu ziehen, denn das Fragment geht nicht über die Division hinaus. Für uns bleibt somit Theon nicht allein die Hauptquelle, sondern — von noch weit späteren Schriften abgesehen — sogar die einzige Quelle.

Theon geht, ganz wie wir, von der euklidischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

aus. Um $\sqrt{4500^0}$ zu erhalten, denkt er sich — wir halten uns hier an die von Nesselmann reconstruirte Figur (Fig. 4), wie auch an dessen Text 100) — ein Quadrat $ABCD$ vom Inhalt 4500 gezeichnet, sucht dann die zunächst an 4500 gelegene Quadratzahl $4489 = 67^2$, macht $AE = 67$

---

kommen sehr complicirte Wurzelausdrücke vor 94); er wusste sehr wohl die Gleichung $ax^2 + c = bx$ mittelst der Relation

$$ax - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$$

aufzulösen 95), und Rodet hat auch 96) die früher von den Meisten acceptirte Thatsache angefochten, dass man aus Diophant's zufälliger Nichterwähnung der Zweideutigkeit einer Quadratwurzel sofort darauf schliessen könne, diese Thatsache sei ihm und den Griechen überhaupt unbekannt gewesen. Allein er wusste es durch Kunstgriffe aller Art so einzurichten, dass die Quadratwurzel unter allen Umständen rational ausfiel, sei es nun, dass er unbestimmte oder bestimmte Aufgaben vor sich hatte. Für ihn, der sonst so unbefangen war, Flächen und Strecken als reine Zahlgrössen zu addiren und zu subtrahiren, hatte, wie Cantor betont 97), das Irrationale noch nicht den Charakter einer Zahl.

und vervollständigt das Quadrat $AEFG = 4489$. Denkt man sich also $4500 = (67 + x)^2$ gesetzt, so hat man jetzt

$$\text{Gnomon } EFGDCB = 134\,x + x^2 = 11.$$

Diese 11 Grade sind gleich 660 Minuten. Indem $x^2$ als eine kleine Grösse vorerst vernachlässigt wird, setzt man

$$134\,x \sim 660,\ x \sim 4.$$

Jetzt trägt Theon von $E$ und $G$ aus die Strecken $EH = GK = 4$ ab und ergänzt das so angedeutete Quadrat $AHLK$. Der Inhalt desselben besteht aus dem Quadrat 4489, den beiden Parallelogrammen $HF$ und $KF$, deren jedes den Inhalt $67 \,.\, 4 = 268$ Minuten hat*), und endlich dem Quadrat $FL = 4^2 = 16$ Sekunden. Da $2 \cdot 268 = 536$ Minuten den Werth $8^0\,56'$ ergeben, so ist

$$\text{Quadrat } AHLK = 4497^0\,56'\,16''.$$

Zieht man dieses vom ganzen Quadrat $ABCD$ ab, so bleibt

$$\text{Gnomon } HLKDCB = 2^0\,3'\,44''.$$

Diese Zahl ist gleichwerthig mit 7424 Sekunden. Abermals werde, wie oben,

$$\text{Gnomon } HLKDCB = 7424'' = [2 \cdot (67^0 + 4')]\,y + y^2$$

gesetzt; mit Beiseitelassung von $y^2$ folgt hieraus

$$(134^0 + 8')\,y \sim 7424,\ y \sim 55.$$

Es ist einleuchtend, wie jetzt fortzufahren wäre: von $H$ und $K$ aus wären auf den betreffenden Quadratseiten zwei Strecken $= 55$ abzutragen, das neue Quadrat ist zu ergänzen, der restirende Gnomon in Tertien zu verwandeln, in den Inhalt mit $2\,(67^0 + 4' + 55'')$ zu dividiren, u. s. f. Theon hält es nicht für nöthig, unter Sekunden herabzugehen, und setzt demnach mit genügender Annäherung

$$4500^0 \sim 67^0\,4'\,55'',$$

wie diess auch Ptolemaeus gethan hatte. Nicht im Mindesten anders gestaltet sich die Procedur, wenn etwa $\sqrt{a^0\,b'\,c''}$ zu suchen wäre, wie diess Theon selber an dem Beispiele von $\sqrt{2^0\,28'}$ nachweist 102).

Man überzeugt sich sofort, dass es sehr leicht ist, diese Einzelvorschriften zu einer allgemeinen Regel zusammenzufassen. Auch kann man

*) Vorher schon hat Theon 101) gezeigt, wie sich zwei Grössen verschiedener Rangordnungen durch Multiplikation oder Division mit einander verbinden; wir können seine sehr wortreiche Regel bequem mittelst der Relation

$$60^{-m} \cdot 60^{-n} = 60^{-(m+n)}$$

abgekürzt darstellen.

das Verfahren unschwer durch eine independente Formel darstellen, wie diess vom Verf. dieses bei einer früheren Gelegenheit geschehen ist 103). Von unserem modernen Verfahren weicht das theonische offenbar nur insoferne ab, als in der Entwickelung

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \frac{d}{m^3} + \cdots$$

die bei uns gebräuchliche Zahl $m = 10$ durch $m = 60$ ersetzt ist. Man möchte also auch vermuthen, dass diejenigen griechischen Mathematiker, welche weniger unter dem Banne des astronomischen Brauches standen, ein ähnliches Verfahren auf Decimalzahlen anwandten. Nesselmann freilich will hiervon nichts wissen; „dass diese Methode", schreibt er 104), „von den Griechen bei Decimalzahlen nicht gebraucht worden ist, beweist Eutokios, der die Ausziehung von Quadratwurzeln geflissentlich vermeidet." Vielleicht gelingt es, im dritten Kapitel diesem doch keineswegs zwingenden Grunde kräftigere Argumente für die zuerst genannte Ansicht zur Seite zu stellen.

§. 9. *Die Byzantiner.* Auch wenn wir des Theon Anmerkungen zum Almagest nicht mehr besässen, so wäre uns trotzdem Gelegenheit geboten, die griechische Methode der Quadratwurzelausziehung aus Sexagesimalbrüchen kennen zu lernen, nämlich durch Vermittelung der oströmischen Mathematiker. Eigenen Erfindungsgeistes fast völlig baar und deshalb auch für den Fortschritt der Wissenschaften ohne jede Bedeutung, haben die Byzantiner immerhin durch ihre Aufbewahrung altgriechischer Leistungen sich ein gewisses Verdienst erworben; so kennt z. B. Pediasimus neben vielem anderen Heronischen auch den Werth $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ 105). Für die griechische Logistik kommen zwei Männer besonders in Frage, beide Mönche, beide vollständig mit den Nachtheilen damaliger gelehrter Thätigkeit behaftet, im Uebrigen Zeitgenossen. Der eine derselben ist Barlaam, freilich aus Unteritalien gebürtig, das damals jedoch noch sehr viele griechische Elemente umschloss, später aber in Thessalien wohnhaft. Für die Lebenszeit dieses Mannes hat mit ziemlicher Sicherheit als untere Grenze das Jahr 1348 festgestellt werden können; seine Blüthezeit dürfte etwa in's Jahr 1330 fallen 106). Sein Lehrbuch der astronomischen Rechnungsweisen ist trotz mehrfacher Bearbeitungen sehr selten und so auch dem Verf. niemals zu Gesicht gekommen; derselbe muss sich also mit Dem begnügen, was C. v. Wolf in seiner Anleitung zur mathematischen Bücherkenntniss über dasselbe sagt 107): „Eine gründliche Theorie, welche zureichet, alle Regeln der ausübenden Rechenkunst, sowohl in ganzen Zahlen, als in gemeinen und sechzigtheiligen Brüchen zu erweisen, hat Barlaam der Mönch in seiner Logistica gegeben, welche ein Engelländer Joannes Chamberus aus dem Griechischen in das Lateinische übersetzet und mit Anmerkungen zu Paris A. 1600. in

4. (1. Alph. 3. Bogen) drucken lassen. Das Buch ist für Anfänger zu hoch geschrieben: welchen lächerlich vorkommet, was gar zu gründlich ausgeführet wird." Aus dieser Schlussbemerkung scheint hervorzugehen, das Barlaam's Schrift*) in der den Verfall wahrer Wissenschaft charakterisirenden Pedanterie Grosses leistet.

Der College des calabrischen Theologen und Mathematikers scheint in jeder Hinsicht Maximus Planudes gewesen zu sein, der den Ersteren um mehrere Jahre überlebte. Er verfasste unter dem Titel ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς eine Anleitung zum Rechnen, die jedoch, wenn wir von der Erwähnung der allerdings aus Indien stammenden Null absehen, sehr wenig Neues bietet, vielmehr einzig und allein die elementaren Rechnungsoperationen mit ganzen und mit Sexagesimal-Zahlen nach älteren Vorbildern abhandelt. Gerhardt hat diese Schrift erstmalig in der Ursprache herausgegeben 109), Uebersichten ihres Inhaltes haben Friedlein 110) und neuerdings Cantor 111) gegeben, und ausserdem giebt es von derselben eine sehr brauchbare Uebersetzung von Wäschke 112), auf welche wir uns im Folgenden mehrfach beziehen werden. Es wird sich herausstellen, dass uns Planudes, grösserer Weitschweifigkeit unerachtet, über die Radicirungsmethode der griechischen Astronomen keine bessern Aufschlüsse giebt, als wir sie bereits dem Theon Alexandrinus zu entnehmen in der Lage waren.

Maximus Planudes beginnt den betreffenden Abschnitt seiner Schrift mit einer allgemeinen Regel zur näherungsweisen Ausziehung der Wurzel aus irgend einer Zahl; allgemein ausgedrückt, sucht er die Quadratzahl $a$, welche zunächst kleiner ist als die gegebene Zahl $A$, bestimmt dann $A - a^2 = b$ und setzt endlich 113)

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{2a}.$$

So wäre z. B.

$$\sqrt{18} = \sqrt{4^2 + 2} = 4 + \frac{2}{8} = 4 + \frac{1}{4}.$$

Zum Beweise solle man die herausgekommene Zahl mit sich selbst multipliciren, wobei sich dann freilich hier der Ueberschuss $\frac{1}{16}$ — allgemein $\frac{b^2}{4a^2}$ — einstelle. Dieses rohe Näherungsverfahren, welches einfach darauf hinausläuft, in der Gleichung

$$a^2 + b = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

das letzte Glied grundsätzlich zu vernachlässigen, scheint nun — darauf

*) In der bekannten anonymen Geschichte der Astronomie wird auch eine von Dasypodius Anno 1572 besorgte Ausgabe des Barlaam'schen Werkes unter dem Titel „Astronomia logistica" namhaft gemacht 108).

hat zuerst Cantor (a. a. O.) aufmerksam gemacht — der byzantinische Schriftsteller für indisch zu halten. Allein man überzeugt sich ohne Weiteres, dass es nichts weiter ist, als das bereits beim ersten Annäherungsgrade unterbrochene Verfahren Theon's, von welchem überdiess, wie wir später zu zeigen hoffen, so ziemlich alle antiken und neueren Mathematiker Kenntniss hatten, die sich überhaupt mit Quadratwurzeln beschäftigten. Jedenfalls hat kein Zweiter so übergründlich dasselbe abgehandelt, wie diess unser Planudes thut; besondere Mühe wendet er daran, die Ungleichung $a^2 < A < (a + 1)^2$ festzustellen. Wer sich für diese für den Geschichtschreiber der Rechenkunst immerhin nicht ganz belanglosen Untersuchungen interessirt, muss besonders das letzte Beispiel sich ansehen, bestehend in dem Nachweise, dass

$$\sqrt{1690196789} \sim 41112 + \frac{245}{82224}$$

zu setzen sei 114).

Nachdem die, wie der Autor glaubt, indische Methode mehr als genügend breitgetreten ist, wendet er sich endlich zu jener, welche er nicht ohne Selbstgefälligkeit als seine eigene bezeichnet — mit welchem Rechte, werden wir nachher sehen. Wie breitspurig er dabei zu Werke geht, mag wohl die eine Thatsache beweisen, dass die Berechnung der Quadratwurzel aus 6 in der Form

$$\sqrt{6} \sim a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3}$$

in der Wäschke'schen Uebersetzung nicht weniger als sieben enggedruckte Seiten einnimmt, den Beweis *a* posteriori allerdings mit einbegriffen 115). Planudes verwandelt die Zahl 6, die er als astronomischer Logistiker nur als Grad-Anzahl auffassen kann, durch Multiplikation mit $60^2$ in 21600 Sekunden, berechnet $146^2 < 21600 < 147^2$ und hat somit als erste Annäherung $146' = 2^0\,26'$. Dann zeichnet er über der Strecke 2 ein Quadrat (Fig. 5), legt an zwei zusammenstossenden Seiten je ein Reckteck vom Inhalt $52'$ an und ergänzt das so entstandene Sechseck durch Zusetzung des Quadrates $26^2 = 676''$ zu einem neuen grösseren Quadrat. Der Inhalt des letzteren beträgt

$$146^2 = 21316 = (21600 - 284) \text{ Sekunden;}$$

der übrig bleibende Gnomon 284 wird in $284 \cdot 60 = 17040$ Tertien umgewandelt und in dieses der Regel gemäss mit $2\ (2 \cdot 60 + 26) = 292$ Minuten dividirt; die grösste dabei herauskommende Zahl ist 58 Sekunden. Ueber der Strecke $(2^0 + 26' + 58'')$ wird jetzt ein neues Quadrat construirt, dessen Inhalt sich aus dem Quadrat $4^0$, dem Quadrat $676''$, dem Quadrat $58^2 = 3364$ Quarten, den beiden congruenten Rechtecken $52'$, den

beiden congruenten Rechtecken $116''$ und den beiden congruenten Rechtecken $26 \cdot 58 = 1568$ Tertien zusammensetzt. Eine neue Division in der vorbezeichneten Weise liefert noch ein Zusatzglied von $9'''$, und dabei lässt unser Gewährsmann es bewenden. Wie Fig. 5 ersehen lässt, ist jetzt in unser ursprüngliches Quadrat von $21600'' = 279936000000^{VI}$ ein neues Quadrat gezeichnet, dessen Inhalt Maximus Planudes in seiner Weise zu berechnen lehrt. Wir kürzen seine Methode durch folgendes Schema wesentlich ab, indem wir von vornherein jedes einzelne Quadrat und Rechteck, durch deren Zusammensetzung das Quadrat von der Seite $(2^0\,26'\,58''\,9''')$ entstand, in Sexten ausdrücken. So erhalten wir:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quadrat $4^0$ | = | 186624000000 | Sexten, |
| 2. Rechteck $52'$ | = | 80870400000 | „ , |
| Quadrat $676''$ | = | 8760960000 | „ , |
| 2. Rechteck $116''$ | = | 3006720000 | „ , |
| 2. Rechteck $1508'''$ | = | 651456000 | „ , |
| 2. Rechteck $18'''$ | = | 7776000 | „ , |
| Quadrat $3364^{IV}$ | = | 12110400 | „ , |
| 2. Rechteck $234^{IV}$ | = | 1684800 | „ , |
| 2. Rechteck $522^{V}$ | = | 62640 | „ , |
| Quadrat $81^{VI}$ | = | 81 | „ , |

Durch Addition erhalten wir 279935169921 Sexten, und dieser Werth ist um $(279936000000 - 279935169921 = 830079)$ Sexten zu klein. Dieser Werth kann mit Vernachlässigung von Brüchen gleich $13835^{V}$ $= 230^{IV} = 4\frac{5'''}{6} = \frac{1''}{12}$ gesetzt werden, die Annäherung ist also wirklich eine sehr grosse.

Allein darüber wird Jedem, der des Planudes „neues" Verfahren mit dem Theon'schen, Fig. 5 mit Fig. 4 vergleicht, auch kein Zweifel mehr obwalten können, dass von irgend welcher Originalität gar nichts zu verspüren ist. Freilich, wenn der „Erfinder" seinem ursprünglichen Gedanken treu geblieben und nicht gleich nach dem ersten Anlauf wieder in die ausgetretenen Spuren seines Vorläufers zurückgefallen wäre, so hätte er immerhin etwas Selbstständiges geschaffen, wenn es auch vor dem bereits Bekannten keinen sonderlichen Vorzug hatte. Er musste nämlich von vorn herein (s. o.) $6^0 = 279936000000$ setzen und nun die nächst kleinere ganze Quadratzahl aufsuchen; entweder eine Tabelle dieser Zahlen, oder, falls eine soweit reichende nicht in seinem Besitze war, sein eigenes, in Vergleichung der Stellenanzahl bestehendes Verfahren musste ihn so zu den Ungleichungen

$$529080^2 < 279936000000 < 529081^2$$

führen, und indem er aus der Relation

$$x \cdot 60^3 + y \cdot 60^2 + z \cdot 60 + u = 529080$$

durch successive Divisionen die ganzzahligen Werthe $x$, $y$, $z$, $u$ berechnete, fand er dieselben resp. gleich 2, 26, 58, 9, also, wie oben,

$$\sqrt{6^0} \doteq \sqrt{279936000000^{VI}} = 2^0\, 26'\, 58''\, 9'''.$$

So aber, wie Planudes wirklich zu Werke ging, macht seine Methode blos den Eindruck stümperhafter Halbheit.

Das mag er wohl selbst gefühlt haben, und zu dem Zwecke, schliesslich noch einen günstigeren Eindruck beim Leser hervorzurufen, bringt er noch einen dritten Weg in Vorschlag 116): „Es giebt noch eine andere, aus der indischen, der des Theon und der meinigen gemischte Methode. Die vorhin auseinandergesetzte nämlich, welche sogleich von Anfang an die Einer in Sekunden auflöst und davon ausgehend die Wurzel der nächst niedrigen Quadratzahl nimmt, ist sehr schwer bei grossen Zahlen, z. B. bei derjenigen, welche Theon als Beispiel gebraucht, bei 4500; denn wenn das in 16200000 Sekunden aufgelöst wird, ist es sehr schwierig, die Wurzel daraus zu ziehen, wie wir uns versuchsweise davon überzeugt haben." Da ist nun der Ausweg der, zunächst $4500 - 67^2 = 11$ zu bilden und diese 11 Grade in 660 Minuten zu verwandeln! Im Uebrigen bleibt Alles so, wie wir es im vorigen Paragraphen kennen lernten, und der krampfhafte Versuch, Neues zu bieten, ist womöglich noch kläglicher gescheitert.*) Und damit können wir denn auch von den Leistungen der Byzantiner auf dem Gebiete der quadratischen Irrationalitäten Abschied nehmen.

§. 10. *Römische Mathematiker.* Ganz ebenso abhängig wie sich die Oströmer von dem Alexandriner Theon erweisen, haben sich ihre westlichen Collegen dem Alexandriner Heron gegenüber gezeigt. Auffallend ist diese Erscheinung keineswegs. Eigentliche Mathematiker im griechischen Sinne sind auf römischem Boden überhaupt nicht entstanden; wer sich dort mit mathematischen Dingen beschäftigte, that es zu einem ausgesprochen praktischen

*) Der Vollständigkeit halber möchten wir noch erwähnen, dass Friedlein (a. a. O.) aus der Darstellung des Maximus Planudes noch eine vierte Methode der Wurzelberechnung herauslesen zu können glaubt, allein, wie es uns scheinen will, mit Unrecht. Denn die Wurzeln, auf welche er anspielt, nämlich

$$\sqrt{235} \sim \left(15\frac{10}{30} = 15\frac{1}{3}\right),\ \sqrt{421354} \sim 649\frac{153}{1298},\ \sqrt{16900963} \sim 4111\frac{642}{8222}\cdots,$$

sind doch sämmtlich nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$ berechnet, und wenn auch der Autor selbst 117) seine Methode bei mehrstelligen Zahlen eine andere nennt als bei zweistelligen, so hätte sich doch Friedlein durch diese falsche Behauptung nicht irre führen lassen sollen.

Zwecke. Die Geschäftsrechnungen des täglichen Verkehrs und allenfalls ein wenig Mathesis forensis, feldmesserische Verrichtungen und elementare Sternkunde waren für den Römer wichtig, allein, um solche Dinge zu betreiben, bedurfte es keiner tiefer gehenden Untersuchung, sondern lediglich der fertigen Resultate. Aus keinem anderen Werke aber waren dergleichen so bequem und leicht zu beziehen, als aus dem geometrischen Compendium des Heron, und so erklärt sich auf's Einfachste der gewaltige Einfluss, welchen dieser Codex der angewandten Geometrie auf das Römerthum und dessen Ausläufer, bis tief ins spätere Mittelalter hinein, ausgeübt hat. Ganz besonders deutlich tritt diese Einwirkung dann hervor, wenn einmal ein Römer mit irrationalen Zahlen zu thun hatte.

An erster Stelle ist hier der agronomische Schriftsteller Lucius Junius Moderatus Columella zu nennen, dessen mathematischen Ausführungen im zweiten Kapitel seines fünften Buches „vom Landbau" bereits Mollweide zu der den mathematisch-philologischen Studien einverleibten Monographie 118) „De formulis ad absolvendam dimensionem trianguli aequilateri et segmenti circularis a Columella lib. V. cap. 2 praescriptis" angeregt hat. Cantor hat durch unmittelbare Nebeneinanderstellung von nicht weniger als neun Stellen erwiesen 119), dass Heron's „Geometria" der Rathgeber war, an den sich Columella eigenem Eingeständniss zufolge in geometrischen Dingen gehalten hat. $\sqrt{3}$ setzt er mit Heron $= \frac{4}{3} + \frac{4}{10} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15}$, er entnimmt seinem Meister also gerade jenen Näherungswerth, welcher für uns aus mannigfachen Gründen ein besonderes Interesse besitzt. Nicht minder finden sich bei dem Römer die uns aus §. 4 wohlbekannten Vorschriften zur Berechnung eines regelmässigen Fünfeckes und Sechseckes aus der Seite vor. Da derselbe jedoch durchgängig mit anderen Zahlenbeispielen rechnet, als diess seine Quelle thut, und da man ihm kaum soviel Initiative zutrauen darf, den vorgefundenen Exempeln aus eigenem Antriebe neue unterlegt zu haben, so muss man wohl zu der Ansicht kommen, dass sich die Römer einer besonderen und mit der uns bekannten nicht immer übereinstimmenden Redaktion des heronischen Textes bedient haben möchten 120). In Cantor's „Agrimensoren" ist durch die Methode der Parallelstellen exakt dargethan, dass alle römischen Gromatiker, Frontinus, Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus und wie sie alle hiessen, auf Heron zurückgegangen sind. Für die Geschichte des Irrationalen allerdings enthalten die dürftigen Schriften dieser Feldmesser keine weiteren Nachweise, denn wenn auch Nipsus eine reine quadratische Gleichung ganz elegant auflöst — er berechnet aus der Fläche $F$ und der Hypotenuse $c$ eines rechtwinkligen Dreieckes die Katheten $a$ und $b$ mittelst der Gleichungen $a \pm b$

$=\sqrt{c^2+4F}$ —, so weiss er seine Werthe doch so zu wählen, dass beidemale die Werthe rational ausfallen.*) Gleicherweise nur für Rationalzahlen ist ein Wurzelausdruck eingerichtet, der in den Untersuchungen des Epaphroditus über figurirte Zahlen auftritt 122). Aus Boethius, dessen Geometrie wir trotz mancher nicht verächtlicher Gegnerschaft für ächt halten, darf wohl die Berechnung des Inhaltes des gleichseitigen Dreieckes angeführt werden, welches, wie bei Heron, über der Seite 30 beschrieben ist. Die nicht weiter erläuterte Regel ist diese 123): „Summa unius lateris per se multiplicata DCCCC numerum complet. Cui si quingenta et X subtrahantur, relinquuntur CCCXC. Tot pedes hujus trigoni isopleuri embadum colligit." Hiernach wäre also die Fläche

$$F = 900 - 510 = 30 \cdot 30 - 30 \cdot 17 = 30^2\left(1 - \frac{17}{30}\right) = 30^2 \cdot \frac{13}{30},$$

und da nach der wahren Formel

$$F = \frac{1}{4} \cdot 30^2 \cdot \sqrt{3}$$

ist, so hätte Boethius

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} \sim \frac{13}{30},\ \sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

gesetzt, wie ihm diess durch sein heronisches Muster vorgeschrieben war. Denselben Werth kennt auch der sogenannte Anonymus von Chartres, doch schreibt er 124), anderen und zwar häufig wiederkehrenden Formulirungen Heron's (§. 4) Folge gebend, $F$ in der Gestalt

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10},$$

wenn $a$ die Dreiecksseite bedeutet.

Ganz auf demselben Boden steht jener andere römische Geometer unbekannten Namens, von dem eine Schrift „Ueber die Ausmessung der Jucharte" auf uns gekommen ist. Derselbe begeht viele und zum Theil sehr abenteuerliche Fehler, nur die Berechnung der Fläche eines regulären Sechseckes von der traditionellen Seitenzahl 30 leistet er mit Zugrundelegung des heronischen Werthes $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ ganz sachgemäss, indem er

*) So wenig für die Logistik, so sehr erscheint uns diese Stelle bei Nipsus bemerkenswerth für die Zahlentheorie. Wir erkennen in ihr den Keim zu jener schönen Unterabtheilung in der unbestimmten Analytik, welche Woepcke als die Lehre von den „congruenten" Zahlen bezeichnet hat. Es handelt sich hier um die ganzzahlige Auflösung der beiden simultanen Gleichungen

$$x^2 + a = y^2,\ x^2 - a = z^2;$$

dass Nipsus eine Einzellösung derselben kannte, haben wir oben gesehen.

fragliche Fläche durch Eckradien in sechs congruente reguläre Dreiecke zerlegt und durch deren Addition

$$6\left(\frac{30^2}{3}+\frac{30^2}{10}\right)=2340$$

findet 125).

§. 11. *Gerbert und seine Zeit.* Wohl der einzige christliche Abendländer, der vor Leonardo Fibonacci eine Stelle in der Geschichte des Irrationalen verdient, ist der Auvergnate Gerbert, als Papst Sylvester II. zu den höchsten Ehren emporgestiegen (gest. 1002). Wie wenig derselbe vor Wurzelgrössen sich scheute, geht schon daraus hervor, dass er eine auf diesen letzteren beruhende Methode zur Messung der Höhe eines zu erstürmenden Bollwerkes angab, die ihres römisch-gromatischen Charakters unbeschadet eben doch noch nirgendwo in einer römischen Schrift nachgewiesen werden konnte 126) und vielleicht also doch geistiges Eigenthum des gewandten Mannes sein kann, dem ja Feldzüge und Belagerungen nichts ungewohntes waren. Gerbert denkt sich aus ein und demselben Punkt des Grabens zwei an Schnüren befestigte Pfeile nach dem Fusse und nach der Krone der Mauer abgeschossen und die Geschosse sofort zurückgezogen, um die Längen $b$ und $c$ der abgewickelten Schnüre messen zu können. Ist diess geschehen, so liefert ihm der pythagoräische Lehrsatz jene Höhe

$$a=\sqrt{(c+b)(c-b)},$$

und es muss sonach eine Quadratwurzel ausgezogen werden.

Dass Heron, wenn auch nicht direkt, von Gerbert benutzt ward, liess sich von Anfang an erwarten, und in der That lassen sich dafür mehrere Belege beibringen. So trägt er in seiner Geometrie ohne Beweis die dem Heron eigenthümliche Construktion des regelmässigen Achteckes vor 127). Ebenso erscheint im 49. Kapitel jenes Werkes der uns wohl bekannte Näherungswerth für $\sqrt{3}$. Es wird nämlich die Fläche $F$ eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite natürlich wieder 30 Längeneinheiten hat, gleich 390 gesetzt, und man hat sonach

$$F=390=\frac{1}{4}\cdot 900\cdot\sqrt{3},\ \sqrt{3}=\frac{156}{90}=\frac{26}{15}.$$

Wahrscheinlich war diese Angabe übrigens der Schrift des Epaphroditus entnommen, nach welcher sich Gerbert mit Vorliebe richtete.

Höchst merkwürdig ist nun aber weiter der Umstand, dass er sich nicht mit dieser überkommenen Zahl beruhigte, sondern — allem Vermuthen nach durch eigene Kraft — noch eine zweite dazu fand. Wie aus dem in mehr als einer Beziehung denkwürdigen Briefwechsel Gerbert's mit seinem Schüler Adelbold hervorgeht, hatte Letzterer, damals Bischoff in Lüttich,

an den bereits die Tiara tragenden Lehrer die Frage gerichtet, wie denn eigentlich der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen sei, und dieser ertheilte gerne den gewünschten Aufschluss in einem ausführlichen Briefe, in welchem, wie Cantor sagt, eine Meinungsänderung des Schreibers ganz deutlich hervortritt. „Während er", so fährt Cantor fort 128), „in dem aus Epaphroditus entnommenen Kapitel der Geometrie noch $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ rechnete, sagt er jetzt im Verlaufe des Briefes, die Höhe des gleichseitigen Dreieckes sei immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite, und darin steckt der Näherungswerth $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$, dessen Vorkommen bei irgend einem früheren Schriftsteller wir nicht zu bestätigen im Stande sind, und welcher, wenn auch bequemerer Rechnung als der heronische Näherungswerth, weniger genau als jener ist." Die Betrachtungen unseres zweiten Kapitels werden einiges Licht auf die Art der Entstehung dieser neu auftretenden Approximativzahl werfen.

Von den Abacisten, welche zu Gerbert's Zeiten tonangebend in der Geschichte unserer Wissenschaft sind, hat keiner weiter bis zum Irrationalen sich verstiegen. Man müsste denn zu demselben jene eigenthümliche falsche Regel für die Inhaltsbestimmung regulärer Vielecke rechnen wollen, bei deren Anwendung nach Chasles' Ansicht 129) die Auflösung von quadratischen Gleichungen nicht umgangen werden konnte. Die Algorithmiker aber und vor Allem deren grosser Vorkämpfer Leonardo Pisano stehen jenseits der Grenze, welche wir uns selbst für diese Untersuchung gesteckt haben.

§. 12. *Die Quadratwurzel aus 2 bei den Rabbinen.* Die alten und mittelalterlichen Juden standen der Mathematik ziemlich ebenso gegenüber wie die Römer und deren Nachfolger: sie betrieben diese Wissenschaft durchaus nicht um ihrer selbst willen, allein sie bedurften derselben viel zu dringend, um nicht das Nothwendigste aus derselben sich anzueignen. Jene Römer, in deren Schriften wir mathematischen Dingen begegnen, waren Landwirthe, Rechtsgelehrte, Feldmesser, Techniker; die Hebräer dagegen mussten hauptsächlich bei ihren strengen Religionsverrichtungen arithmetische und geometrische Sätze verwenden, und so waren folgerichtig denn auch ihre Priester, die Rabbinen, Träger und Bewahrer eines gewissen Schulsackes in mathematischer Hinsicht. Sehr umfangreich war dieser letztere allerdings gerade nicht, wie wir am Besten aus der trefflichen Monographie Zuckermann's 130) ersehen können, allein am Wenigsten dürfte der, welcher sich mit dem Irrationalen im Alterthum beschäftigt, achtlos an diesem interessanten Ausläufer antiker Wissenschaft vorübergehen. Denn

dass gewisse Beziehungen zwischen den Talmudisten und den griechischen Mathematikern bestanden, hat Cantor 131) unmittelbar nach dem Erscheinen der Zuckermann'schen Schrift sehr wahrscheinlich gemacht. Der vorliegende Paragraph ist also schon durch den Gesammtplan dieser Arbeit als nothwendig bedingt, indessen kann auch für den Mathematiker als solchen eine Gruppe gelehrter Männer nicht gleichgültig sein, welcher ein Maimonides angehört, also ein universeller Denker, dessen Namen die Geschichte der Kosmographie mit hoher Achtung nennt 132), der ein Maximum-Problem in ganz zutreffender Weise auflöst 133), der endlich auch gerade mit irrationalen Wurzeln sehr gut umzugehen weiss. Eben dieser letztere Punkt ist freilich noch kaum hervorgehoben worden, und wir hoffen deshalb auch nach dieser Seite hin einiges Neue beibringen zu können.

Der pythagoräische Lehrsatz scheint sämmtlichen Commentatoren des jüdischen Religionsbuches bekannt gewesen zu sein; ja sogar quadratische Gleichungen dürften nicht ganz jenseits des Verständnisses jener Leute gelegen haben, wie denn solche bei der Berechnung der um jede Levitenstadt sich herumziehenden Weideplätze („Migrasch") nicht vermieden werden konnten 134). Bei der Anlegung der Begräbnissplätze war eine kreuzförmige Erdaushebung vorgeschrieben, in deren Gänge die verschiedenen Nischen der Särge einzumünden hatten. Betreffs dieser Nischen, die man ja auch aus den christlichen Katakomben kennt, entstanden nun Meinungsverschiedenheiten zwischen den Gelehrten; um zu verhüten, dass die Höhlungen in einander übergriffen, musste eine gewisse Länge $l$ kleiner als die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieckes von der Seite $\frac{1}{2}$ angenommen werden, also war

$$l < \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

zu wählen 135). Da auch der Ackerbau durch gewisse Kultusvorschriften geregelt war, so wurden in der Mischna Betrachtungen über die durch Fig. 6 gekennzeichnete Bepflanzungsart des Bodens angestellt. Die vier schraffirten Rhomben sollten bebaut sein, und zwischen ihnen sollte ein Rhombus $ABCD$ derart frei bleiben, dass die parallelen Seiten $AB$ und $CD$ zweier Ackerstücke mindestens einen Abstand von $1\frac{1}{2}$ Maasseinheiten besässen. Maimonides glaubte nun zeigen zu können, dass diess eintreffe, wenn die längere Diagonale $AC$ des inneren Rhombus $= 3$, die kürzere $BD = 2$ genommen würde, denn dann wäre, unter $E$ den Diagonalschnittpunkt verstanden,

$$AB = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Maimonides setzt 136) $AB = 1\frac{4}{5}$*); er muss also

$$\sqrt{13} \sim \frac{18}{5}$$

gesetzt haben, und gerade dieser Näherungswerth macht uns, worüber im II. Kapitel Näheres, geradezu einen überraschenden Eindruck.

Abgesehen von diesem Einen merkwürdigen Falle kommt im Talmud und in dessen Auslegungen lediglich $\sqrt{2}$ vor. In der ältesten Zeit scheint man dieser Zahlgrösse etwas rathlos gegenübergestanden zu sein, wenigstens heisst es in der Mischna, die Seite eines Quadrates von 5000 Quadratellen Flächeninhalt sei gleich 70 „und etwas darüber" 137). Zunächst identificirte man dieses „Etwas" mit $\frac{2}{3}$, und im jerusalemitanischen Talmud heisst es (a. a. O.), dieser Zusatz sei freilich etwas zu klein, allein die Weisen wüssten ihn nicht genauer anzugeben; im babylonischen Talmud dagegen heisst es blos, der Zusatz sei noch nicht näher bestimmt worden. Zuckermann ist geneigt 138), in der ersteren Angabe einen gewissen Fortschritt der letzteren gegenüber zu erkennen, indem er annimmt, dass durch jene die Erkenntniss der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ausgesprochen sein sollte. Wenn man nicht dafür eintreten will, dass $\sqrt{5000}$ auch auf eine andere Weise gefunden sein konnte, was immerhin möglich ist, so berechnet sich im vorliegenden Falle

$$\sqrt{2} \sim \left(\frac{1}{50} \cdot 70\frac{2}{3} = 1\frac{31}{75} = 1{,}4133\ldots\right)$$

Von diesem Näherungswerthe ist aber nur ein Schritt zu einem anderen, der für uns eine weit grössere Bedeutung besitzt. Man konnte nämlich, mit Vernachlässigung eines einzigen Fünfundsiebzigstels,

$$\sqrt{2} \sim \left(1\frac{30}{75} = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4142\ldots\right)$$

setzen, und mit diesem Werthe haben uns Platon, Aristarch, Heron bekannt genug gemacht. Diesen kleinen und doch wichtigen Schritt haben denn nun auch die Rabbinen gemacht, denn im Traktat „Erubin" (57a) des

---

*) Maimonides' Methode ist freilich nicht ganz richtig, denn nicht die Seite, sondern die Höhe des Rhombus würde die wahre Entfernung der parallelen Seiten angeben. Indess hat Zuckermann (a. a. O.) gezeigt, dass auch, wenn man für $AB$ den wahren Werth

$$AB \,.\, \sin \measuredangle DAB = AB \,.\, \sin 67^\circ\, 22'\, 48''$$

und für $AB$ die obige Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ setzt, auch dann noch die Entfernung $< 1\frac{1}{2}$ bleibt, wie es der Bedingung gemäss sein sollte.

Talmud lautet eine Stelle nach Zuckermann's Verdeutschung in der That folgendermassen 139): „Jedes Quadrat, dessen Seite eine Elle lang ist, hat eine Diagonale von $1^2/_5$ Ellen Länge." An dieser Ueberlieferung haben die mittelalterlichen Juden offenbar sehr zähe festgehalten, denn, wie wir in Ergänzung der Zuckermann'schen Nachweise noch berichten können, wird noch im späteren Mittelalter, wie Zunz meldet 140), der Wissensstand eines Mathematikers an diesem Satze gemessen: „Rabbi Simon in Sens war nicht weiter gekommen, als zu wissen, dass die Diagonale grösser als $\frac{7}{5}$ der Seite sein müsse." Ein dritter Näherungswerth für $\sqrt{2}$ ist $\frac{4}{3}$; er kommt in dem sehr alten „Seder Tohorot" vor und verdankt seine Entstehung vielleicht blos roher Empirie, nicht mathematischer Ueberlegung, so dass wir ihn auch blos zur Vollständigkeit als geschichtliches Curiosum aufführen. Alles, was die Rabbinen von $\sqrt{2}$ wussten, fasst Zuckermann in einem Schlusssatz zusammen, der auch diesen Paragraph beendigen soll. Er sagt 141): „Der älteste in der Mischna vorkommende Werth der Quadratwurzel aus Zwei ist der aus Mischna Oholot hergeleitete = 1,33 ... Der späteren Mischna Erubin war der genauere Werth = 1,4133 ... bekannt. Schon die Mischna kannte die Irrationalität einer gewissen Quadratwurzel. Dem noch späteren Talmud genügte für die Praxis der Werth 1,4. Von dem genaueren Werthe der $\sqrt{2} = 1,41421$ .. weichen die drei genannten Werthe resp. um 0,08088 ..., 0,00088 ..., 0,01421 ... ab."

§. 13. *Die quadratischen Irrationalitäten bei den Indern.* Dem Hindu-Mathematiker lagen die Skrupel ferne, welche dem Griechen so lange Zeit hindurch den bequemen Zugang zum Irrationalen versperrten; für ihn war Alles, was existirte, von Haus aus mit dem Zahlbegriffe behaftet, und diesem wurden denn auch ohne Weiteres die neuen Formen untergeordnet, auf welche man sich bei der Umkehrung der Operation des Potenzirens geführt sah. Wie früh man sich mit den Wurzeln vertraut machte, geht u. a. schon aus der Thatsache hervor, dass man bereits vor Âryabhatta, der davon wie von einer altbekannten Sache spricht, das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser mit $\sqrt{10}$ identificirte — eine Zahl, deren Entstehung Cantor 142) noch für räthselhaft erklärt, für welche jedoch unseres Erachtens Rodet 143) eine ganz annehmbare Erklärung gegeben hat (vgl. Kap. II). Die indische Trigonometrie, die ersichtlich auch auf ein ziemlich hohes Alter Anspruch machen kann, bediente sich hauptsächlich der Formel 144)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1719\,(3438 - \cos\alpha)},$$

welche im Allgemeinen nur irrationale Werthe ergiebt. Die späteren Mathematiker, deren Schriften auf uns gekommen sind, haben auch die Eigenthümlichkeit des Irrationalen richtig erkannt und für die irrationale Quadratwurzel in dem Worte karaṇa sogar eine eigene Bezeichnung geschaffen 145). Schon Âryabhatta muss die Auflösung einer unreinen quadratischen Gleichung gekannt haben; Brahmagupta, Çrîdhara und Bhâshara Acharya tragen diese Auflösung mit Variationen vor, und der letztere kennt sogar 146) die Doppeldeutigkeit und allfallsige Irrealität der Quadratwurzel, sowie die in der Formel

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ausgesprochene sogenannte Transformation des surdischen Binomes. Nur nebenher sei erwähnt, dass die Inder auch zur Auflösung der uns aus §. 6 erinnerlichen unbestimmten Gleichung $ax^2 + 1 = b^2$ in ihrer „Zerstäubungsregel“ eine Methode besassen, welche sich nach Hankel's Untersuchungen völlig mit jener deckt, die später Lagrange auf seine berühmte Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{a}$ begründete 147).*) Die theoretische Wurzellehre war sonach bei den Mathematikern Hindostans völlig entwickelt, allein, was gerade uns hier am Meisten interessiren würde, die praktische Näherungsberechnung der karaṇa's tritt in den Lehrbüchern weniger deutlich hervor. Zum Glücke hat uns ein gütiges Geschick neuerdings auch mit diesem Theile indischer Mathematik Bekanntschaft schliessen lassen.

§. 14. *Die Näherungsformeln der Çulvasûtra's.* Ein in Indien lebender deutscher Gelehrter, Thibaut in Benares, hat die sogenannten Çulvasûtra's herausgegeben 148), welche sich mit der Anwendung der Geometrie auf die rituellen Verrichtungen des Gottesdienstes beschäftigen, und Cantor hat zuerst 149) auf die hohe geschichtliche Wichtigkeit dieser Publikation hingewiesen.**) In diesen Schriften kehrt nun häufig die an das delische Problem erinnernde, beim Altarbau unentbehrliche, Aufgabe wieder, ein Quadrat mit einer ganzen Zahl $n$ so zu multipliciren, dass die entstehende Figur abermals ein Quadrat werde. Arithmetisch aufgefasst, muss diess zur Berechnung von $\sqrt{n}$ führen, und in der That treten uns denn auch

*) Eine Kettenbruchmethode im eigentlichen Sinne ist jedoch dieses „cyklische“ Verfahren schon deshalb nicht, weil auch Lagrange dasselbe erst in seiner zweiten dem Gegenstande gewidmeten Abhandlung mit einem Kettenbruch-Algorithmus in Beziehung setzte.

**) Eine Uebersicht über das von Thibaut neu erschlossene Material und die von Cantor daraus gezogenen Folgerungen ist, verbunden mit einigen anderen Betrachtungen vergleichender Natur, auch in einem Aufsatze 150) des Verf. zu finden.

Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ ..., also gerade für die uns zumeist am Herzen liegenden Irrationalzahlen entgegen. Das Sanskrit hat sogar eigene Kunstwörter für jede einzelne dieser Wurzeln gebildet.

Die Çulvasûtra-Autoren, deren hervorragendster Baudhâyana heisst, kennen zwei Werthe für $\sqrt{2}$. Der eine derselben wird direkt angegeben; es soll sein 151)

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34};$$

die Genesis dieses Werthes wird sich im II. Kapitel unschwer klarstellen lassen. Einen zweiten Werth muss man aus einer geometrischen Construktion erst mit einiger Mühe herauslesen. Um ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 7) in einen flächengleichen Kreis zu verwandeln, suchen die Inder den Durchschnittspunkt $E$ der Diagonalen auf und fällen von ihm auf $AB$ das Loth $EJ$, welches von einem um $E$ als Mittelpunkt mit $EA$ als Halbmesser beschriebenen Kreise in $F$ getroffen wird. Nimmt man nun $JH = \frac{1}{3} JF$, und beschreibt um $E$ mit $EH$ als neuem Radius einen zweiten Kreis, so ist dieser annähernd gleich dem Quadrate $ABCD$. Hieraus sind nun offenbar zwei unbekannte Werthe zu entnehmen, und da nur eine einzige Gleichung zur Verfügung steht, so muss bezüglich der einen die Hypothese aushelfen. Diese besteht nun bei Cantor darin, $FJ$*) gleich 3 anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$EA = EF = EJ + JF = EJ + 3$$
$$EJ \cdot \sqrt{2} = EJ + 3.$$

Wird beiderseits quadrirt, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\overline{EJ}^2 - 6 \cdot EJ = 9,$$
$$EJ = 3 + 3\sqrt{2}.$$

Wenn nun auch $EJ$ eine ganze Zahl sein soll, so müsste $3\sqrt{2} \sim 4$ und $EJ \sim 7$, sodann aber wieder

$$\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$$

gesetzt werden, „ein in der That gar nicht übler Werth, wenn es auch noch nicht gelungen ist, ihn bei irgend einer anderen Gelegenheit, sei es bei Indern, sei es bei Griechen, nachweisen oder auch nur muthmassen zu können" (a. a. O.). Wir haben gegen diese Schlusskette, so sehr sie auch die Bezeichnung einer scharfsinnigen verdient, hauptsächlich das einzuwenden,

*) Im Cantor'schen Werke steht 152) (S. 10 und 11 v. u.) zweimal durch Druckfehler $EJ$ statt $FJ$.

dass dem indischen Geometer die Willkürlichkeit zugemuthet wird, $\sqrt{2}$ zuerst annähernd gleich $\frac{4}{3}$ und dann annähernd gleich $\frac{10}{7}$ zu setzen. Wir behalten uns vor, in Kap. II eine, wenn unser Vermuthen richtig ist, einfachere Deutung dieser „Cirkulatur des Quadrates" unseren Lesern vorzulegen. Wir dürfen aber nicht verhehlen, dass der mit Hülfe der Cantor'schen Annahme errechnete Werth für $\pi$ auch anderweit sich bestätigt, und dass somit gewiss Gründe für jene sprechen. Es ergiebt sich nämlich, wenn die zuerst erörterte Muthmassung das Richtige trifft, der Satz, dass den Indern die Seite eines dem Kreise vom Durchmesser $d$ gleichen Quadrates gleich $\frac{7d}{8}$ galt, und in der That behauptet Baudhâyana 153), man müsse, um die Seite des dem Kreise gleichflächigen Quadrates zu erhalten, den Durchmesser mit

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8\,.\,29}-\frac{1}{8\,.\,29\,.\,6}+\frac{1}{8\,.\,29\,.\,6\,.\,8}$$

multipliciren, ein Faktor, dessen Erklärung mit Zuhülfenahme des zuerst für $\sqrt{2}$ angegebenen Werthes ohne Schwierigkeit gelingt. Wir erkennen diesen Vorzug der Cantor'schen Hypothese bereitwillig an, können jedoch auch die bereits geschilderten Bedenken nicht ganz unterdrücken und überlassen gerne competenten Beurtheilern die Entscheidung. Wir machen jedoch gleich jetzt darauf aufmerksam, dass das unmittelbar Folgende einiges Gewicht für unsere Meinung in die Wagschaale legt.

Die Quadratwurzel aus 3 kommt, wie erwähnt, ebenfalls in dem indischen Ritual vor. Drei Bearbeiter desselben, darunter auch der uns bereits bekannte Baudhâyana, geben für die Kreisquadratur folgende Regel 154), es sei

$$\left(\frac{13\,d}{15}\right)^2=\frac{1}{4}\,d^2\pi.$$

Hier ist ein Zweifel nicht möglich, es ist $\pi = 3$ gesetzt, wie bei allen alten orientalischen Völkern 155), und wir haben die neuen Relationen

$$3 \sim \frac{13^2}{15^2}\cdot 4,\ \sqrt{3} \sim \frac{26}{15},$$

ganz ebenso wie bei Heron und den römischen Agrimensoren. Andererseits freilich kennt Baudhâyana auch den weit genaueren Werth

$$\sqrt{3} \sim 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3\,.\,5}-\frac{1}{3\,.\,5\,.\,52},$$

über welchen in Kap. II, §. 4 weitere Aufschlüsse zu finden sind.

Rodet huldigt der Ansicht, die ältesten Çulvasûtraregeln entstammten ungefähr dem IV. vorchristlichen Jahrhundert 155). Cantor dagegen legt mit Recht den mannigfachen Beziehungen grosses Gewicht bei, welche ihm

in seinen „Gräko-indischen Studien" zwischen alexandrinischer und indischer Geometrie zu ermitteln gelungen ist; er denkt an eine bereits in die christliche Zeit fallende Uebertragung vom Westen in den Osten. Gewiss ist es auffallend, dass die älteren Inder bereits mit zwei so genauen Näherungswerthen, wie

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}, \sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

bekannt sind, die wir bei Theon und Heron angetroffen haben. Eine spontane Doppel-Entdeckung ist freilich nicht ausgeschlossen, Bethätigung griechischer Einflüsse aber viel wahrscheinlicher.

§. 15. *Die Araber.* Das mathematische Wissen der muhammedanischen Eroberer, welche in verhältnissmässig so kurzer Zeit ihr Reich von Korassan bis an die Grenze Frankreichs ausdehnten, ist zu ziemlich gleichen Theilen aus griechischen und indischen Quellen zusammengeflossen; man kann in vielen Fällen mit Bestimmtheit angeben, ob ein bestimmter Gelehrter mehr der indischen oder mehr der griechischen Schule angehörte 156). Schon Muhammed ben Músâ, der mehr der ersteren zuzuzählen sein dürfte, kennt die Auflösung der quadratischen Gleichungen und deren Doppelwurzel 157) und die Annäherung $\pi \sim \sqrt{10}$ 158). Alkarkhî, der im Beginne des XI. Säkulums lebte, steht dagegen mehr auf griechischem Boden; er hat seinen Bezugsquellen z. B. die hellenischen Benennungen für rational und irrational entlehnt und zieht die Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen genau ebenso aus, wie Theon von Alexandrien (§. 8) 159). Wie kaltblütig er mit Wurzelgrössen operirt, geht u. a. aus seiner völlig richtigen Anweisung zur Berechnung eines Pyramidenstumpfes hervor 160): „Du missest die Grundfläche und das Dach, multiplicirst den Inhalt der Grundfläche in den des Daches und ziehst aus dem Produkte die Wurzel aus. Diese Wurzel addirst du zu der Summe der Inhalte der Grundfläche und des Daches und multiplicirst ein Drittel des Resultates in die Höhe des Körpers." Man erkennt, dass, wenn $h$ diese Höhe, $G$ die Grundfläche, $g$ das Dach bedeutet, die aus obiger Worteinkleidung entspringende Formel

$$\frac{1}{3} h \left(G + \sqrt{Gg} + g\right)$$

zum Inventar unserer elementaren Stereometrie gehört. In Alkarkhî's algebraischen Versuchen, die zum Theil über die gewohnten Grenzen hinausgehen, kommen allerdings nur rationale Quadrat- und vierte Wurzeln vor. Dagegen erforderte natürlich wieder die Trigonometrie Kenntniss und Behandlung des Irrationalen, denn wenn es auch Abûl Wafâ gelungen war 161), durch sein elegantes, auf die Relation

$$2\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} < 2\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}$$

gebautes, Verfahren sich von dem etwas schleppenden Gange der Inder zu befreien, so musste er doch auch sin 36°, sin 60° und viele andere durch Quadratwurzelausziehung bestimmen. Und Albategnius bedurfte derselben nicht minder, um mittelst der Formel

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

vom Sinus zur Tangente überzugehen 162). Kurz, es musste Methoden geben, um quadratische Irrationalitäten mit grösserer oder geringerer Genauigkeit auszurechnen. Einer derselben, die sich aber nur im astronomischen Bruchcalcul verwerthen liess, ist oben bereits gedacht worden; was sich sonst noch darüber in Erfahrung bringen liess, ist im Folgenden zusammengestellt.

Im Allgemeinen scheint die bereits den Alten bekannte und von Maximus Planudes so eingehend behandelte Formel

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$$

maassgebend gewesen zu sein. Da man sich jedoch überzeugt hatte, dass dieser Näherungswerth zu gross sei, so verfiel man etwas in das entgegengesetzte Extrem und nahm

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1}.$$

So verfuhr Alkharkhî bei Deçimalzahlen 163), so Al-Moruzi aus dem östlichen Merw, auf dessen um 1216 erschienene Schrift unlängst von Rodet aufmerksam gemacht ward 164), so auch der Spätling Behâ-Eddin 165), der bereits dem XVI. Jahrhundert angehört.*) Al-Moruzi setzt beispielsweise

$$\sqrt{12} \sim 3\frac{3}{7},\ \sqrt{145} \sim 12\frac{1}{25}.$$

Genauer geht der Marokkaner Ibn Albannâ in seinem „Talkhys" zu Werke 168). Er unterscheidet die beiden Fälle

$$b \leqq a,\quad b > a.$$

---

*) Kästner 166) und Peacock 167) haben die nicht uninteressante Wahrnehmung gemacht, dass diese den Werth der Wurzel zu klein ergebende Näherungsformel in dem 1537 erschienenen „tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria" des Juan de Ortega vorkommt. Bei ihm ist z. B.

$$\sqrt{55702} = \sqrt{236^2+6} \sim \left(236 + \frac{6}{2\,.\,236+1} = 236\frac{6}{473}\right).$$

Von diesem Einen Falle abgesehen, scheint das arabische Verfahren im Abendlande keine Propaganda gemacht zu haben.

Je nachdem der erste oder zweite vorliegt, setzt er

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}, \quad \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}.$$

Für gewöhnlich wird freilich nur der erste Fall eintreten. Am weitesten in der Vervollkommnung der durch Obiges gekennzeichneten Methode ist jedoch der Spanier Alkalsâdî (XV. Jahrhundert) gegangen, ein tüchtiger Arithmetiker, der auch die Rationalmachung der Bruchnenner mittelst der Formel

$$\frac{m}{p + \sqrt{q}} = \frac{m(p - \sqrt{q})}{p^2 - q}$$

kennt und sich sogar zu einem eigenen Wurzelzeichen — das erste Vorkommniss dieser Art in der Geschichte — aufgeschwungen hat 169). Woepke hat uns über die Bemühungen dieses Arabers, die Behandlung der quadratischen Irrationalzahlen zu verbessern, einen sehr klaren Bericht gegeben 170). Aehnlich wie Ibn Albannâ, unterscheidet auch Alkalsâdî, ob $b \leqq a$ sei — dann hat die Relation

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$$

statt — oder ob $b > a$ sei. Im letzteren Falle aber ersetzt er die wenig genaue Formel der anderen Araber durch die folgende:

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b + 1}{2(a + 1)},$$

indem er der allzugrossen Vermehrung des Nenners durch eine entsprechende Vermehrung des Zählers ein Gegengewicht zu bieten beabsichtigt. Allein damit nicht zufrieden giebt er auch noch die ungleich genauere Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Ausgerechnet nimmt diese Näherungsgleichung die nachstehende Form an:

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{4a^2 b + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Wir werden im Beginne des nächsten Kapitels auf die naheliegende Schlussfolgerung wieder zurückzukommen haben, welche Woepcke an diese letzte Formel knüpft.

Den arabischen Mathematikern muss füglich noch ein Mann angereiht werden, der durchaus zu ihnen gehört, wenn auch nicht in seiner Nationalität, so doch seinen sonstigen Existenzbedingungen nach. Diess ist Johannes Hispalensis (um 1150 n. Chr.), ein jüdischer Gelehrter, der sich mit arabischer

und indischer Wissenschaft gründlich vertraut gemacht hatte. In manchen Beziehungen geht derselbe allerdings über seine Vorlagen nicht hinaus, so giebt er für die ersten Annäherungen nur die arabische Formel, z. B.

$$\sqrt{40} \sim 6\frac{1}{3}, \quad \sqrt{91345} \sim 302\frac{141}{604},$$

und auch die Quadratwurzelausziehung aus sechzigtheiligen Zahlen unterscheidet sich bei Johannes dem Planudes gegenüber nur insoferne, als Ersterer principiell den Radikanden auf die kleinste Benennung bringt. Dagegen finden sich bei dem Sevillaner zwei einschneidende Neuerungen 171): Derselbe ändert erstlich gemischte Zahlen unter der Wurzel so um, dass aus dem Nenner dieselbe ausgezogen werden kann, wie das Beispiel

$$\sqrt{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{94}{39}} = \sqrt{\frac{94 \,.\, 39}{39 \,.\, 39}} = \frac{1}{39}\sqrt{94 \,.\, 39}$$

lehren mag, und zweitens hat er die vermuthlich aus Indien 172) stammende Methode sich angeeignet, an den Radikanden Nullen anzuhängen und so bis zu beliebigem Genauigkeitsgrade fortzuschreiten. Wir gehen jedoch auf den hierdurch angebahnten Fortschritt hier nicht näher ein, da wir uns sonst aus dem Rahmen antik-mittelalterlicher Mathematik losmachen und in die Besprechung der Neuzeit eintreten müssten. Dem steht aber unser ausdrücklich formulirtes Programm entgegen.

§. 16. *Ungeschriebene Zeugnisse des Alterthums.* Soweit wir bis jetzt in unserem Studium der dem Alterthum eigenthümlichen Näherungwerthe gediehen sind, waren wir stets im Stande, uns auf geschriebene resp. gedruckte Nachweisungen zu beziehen. Dem feinen Spürsinn eines hervorragenden Archäologen der Neuzeit verdanken wir aber die Möglichkeit, uns auch auf ungeschriebene Zeugnisse des Alterthums berufen zu können. Es ist Hultsch gewesen, der die von Anderen wohl gelegentlich gemachte, nicht aber fest begründete Bemerkung, dass in den antiken Bauten gewisse Zahlengesetze zum Ausdruck gelangten, ihres hypothetischen Charakters zu entkleiden und darauf ein wissenschaftliches System zu begründen wusste, mit welchem die Wissenschaft von nun an zu rechnen hat. Mit kurzen Worten lässt sich der Inhalt dieses Systemes dahin bezeichnen, dass die griechischen Architekten die Verhältnisse gewisser Hauptabmessungen principiell gleich gewissen rationalen Brüchen setzten. Wie gesagt, waren auf diese Thatsache schon früher Bautechniker und Aesthetiker aufmerksam geworden, allein was sie darüber mittheilten, beruhte einerseits auf nicht hinlänglich genauen Messungen, andererseits zogen sie aus ihren Beobachtungen so weittragende und gewagte Schlüsse, dass sie dadurch gegen sich und gegen

den gesunden Kern ihrer Lehre berechtigtes Misstrauen hervorriefen. Wir haben damit vorzüglich die Arbeiten von Roeber 173) und Zeising*) im Auge. Dass Hultsch sich von jeder Ausschweifung ferne gehalten, brauchen wir wohl nicht erst zu sagen; überdiess ist das Erfahrungsmaterial, von welchem er ausgeht, ein ganz unverhältnissmässig umfassenderes, als jenes, welches seinen Vorgängern zu Gebote stand. An und für sich würden uns nun freilich diese Studien an diesem Orte nicht näher berühren, wenn nicht Hultsch zugleich die Entdeckung gemacht hätte, dass gerade die am häufigsten vorkommenden rationalen Brüche nichts anderes sind, als Näherungswerthe für gewisse einfache Irrationalzahlen, für $\sqrt{2}$, für $\sqrt{3}$, für $\sqrt{5}$. Wir führen nachstehend, ohne es irgendwie auf Vollständigkeit abzusehen, einige der wichtigsten Ergebnisse aus dem Gesammtbereiche der Hultsch'schen Arbeiten vor.

Beim perikleischen Parthenon verhält sich ganz ähnlich wie auch beim älteren — durch die Perser zerstörten — Parthenon der Stylobat zur Länge 180) wie 4 : 9, beim Heraion zu Samos ist das Verhältniss zwischen Breite und Länge gleich 29 : 60. Beim Parthenon haben wir u. a. folgende Verhältnisszahlen 181): Durchmesser einer gewissen Gruppe von Säulentrommeln zum Durchmesser der anderen Gruppe = 10 : 9, Stylobatbreite zur Gesammthöhe des Tempels = 12 : 7, ebenso Gesammthöhe zur Säulenhöhe, Stylobatbreite sonach zur Säulenhöhe $= 12^2 : 7^2 \sim 3 : 1$. Ausgezeichnet durch seine bestimmten Abmessungen ist besonders auch der Hera-Tempel auf der Insel Samos. Bezeichnet man mit $A$ die Länge einer Unterstufe in der Flanke, mit $F$ eine der beiden kleineren, mit $G$

*) Wir verweisen behufs einer gerechten Würdigung der Arbeiten dieses geistreichen Forschers auf unseren früheren Bericht 174), in welchem besonders auch der Ansichten desselben über das Zutagetreten des goldenen Schnittes bei architektonischen Verhältnissen gedacht ist. Es gilt hier freilich, die Spreu vom Weizen zu sondern, allein so höchst bequem darf man es sich nicht machen, wie es kürzlich Sonnenburg 175) gethan, der alle Angaben über die Erscheinung jener merkwürdigen Gesetzmässigkeit in Kunst und Natur mit dem einfachen Satze erledigt 176): „Alle Messungen an Bildsäulen und Gruppen, an Tempeln und Palästen, an Skeletten und Präparaten sind werthlos, weil sie mit der Voreingenommenheit für ein solches naturwidriges Gesetz enge verbunden sind.“ Es gehört viel Muth dazu, solches zu schreiben, nachdem Schwendener — vgl. hierzu einen Aufsatz des Verf. 177) — mit sachgemässer Correktur der von A. Braun gehegten Meinungen seine mechanische Theorie des Pflanzenwuchses geschaffen, Langer 178) die statische Bedeutung des Gesetzes vom goldenen Schnitte aufgeklärt und neuerdings noch G. Hauck 179) den Nachweis geführt hat, dass in jenem Gesetze thatsächlich der eigenartige für geometrische Symmetrie und schöne Form gleich empfängliche Charakter des älteren Griechenthums sich in natürlichster Weise praktisch bethätigt habe!

eine der vier grösseren Säulenweiten, so hat man 182) folgende Proportionen:

$$F : A = 27 : 400 = 3^3 : 2^4 . 5^2, \quad G : A = 49 : 600 = 7^2 : 2^3 . 3 . 5^2.$$

Bedeuten weiter $J$ und $K$ die Durchmesser der Säulenbasen, $L$ und $M$ diejenigen der Säulenschäfte, so gilt 183)

$$L : A = 9 : 500 = 2^3 : 2^3 . 5^2, \; M : A = 2 : 125 = 2 : 5^3, \; L : M = 9 : 8 = 3^2 : 2^3.$$

Endlich ist als Beispiel eines sich wiederholenden Verhältnisses das merkwürdige Faktum 184) zu erwähnen, dass beim Hera-Tempel der Bruch 17 : 1000 mit dem Verhältniss des Durchschnittes von $(L + M) : A$, bei dem berühmten Diana-Tempel von Ephesus dagegen mit dem Verhältnisse des Säulendurchmessers zu der dortigen Hauptdimension $A$ sich deckt. Eine Zusammenstellung der Einzelforschungen findet sich in der schönen Monographie, welche Hultsch den zwei zuletzt erwähnten Tempelbauten gewidmet hat; alldort wird auch als ein bemerkenswerther Umstand der hervorgehoben 185), dass allen Anzeichen nach der Bau des Artemisions aus ägyptischen und vorderasiatischen Wurzeln herausgewachsen sei.

Die Verhältnisse 7 : 5 und 12 : 7 spielen unter der Menge ihrer Genossen gewissermassen eine hervorragende Rolle. Hultsch ist der Meinung, dass diess daher kommt, weil, wie wir im Verlaufe der bisherigen Darstellung uns zur Genüge überzeugen konnten,

$$\frac{7^2}{5^2} \sim 2, \quad \frac{12^2}{7^2} \sim 3 \text{ (vgl. §. 11)}$$

angenommen war. Derselbe zeigt auch, wie die griechischen Baumeister, die wohl nur unbewusst und der „Continuität handwerksmässiger Ueberlieferung" gemäss nach diesen Regeln arbeiteten, diese Näherungswerthe bequem aus dem bekannten pythagoräischen Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 ableiten konnten. Wir verweisen zu dem Ende auf Fig. 8, in welcher $AB = 3$, $AC = 4$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes darstellen, dessen Hypotenuse $BC = 5$ ist. Errichtet man in $C$ auf $CD$ ein Loth und macht auf diesem $CD = BC = 5$, so wird

$$BD = 5\sqrt{2} \sim \left(5 \cdot \frac{7}{5} = 7\right).$$

Endlich mache man auf der verlängerten $BD$ noch $BE = 2 . BD$ und construire über $BE$ das gleichseitige Dreieck $BEF$. Zieht man die Höhe $DF$ desselben, so wird

$$DF = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{7^2 . 4 - 7^2} = 7\sqrt{3} \sim \left(7 \cdot \frac{12}{7} = 12 = 3 . 2^2\right).$$

Hultsch knüpft an dieses in Wirklichkeit elegante Verfahren noch die

folgende Betrachtung an 186): „Wir haben also in einer ganz elementaren Construktion vereinigt die theils genauen, theils angenäherten Verhältnisse der Primzahlen 2, 3, 5, 7, ferner die Verhältnisse der Quadrate derselben, endlich die angenäherte Darstellung der Wurzeln aus den beiden ersten Primzahlen. Dieselben Elemente sind es aber auch, auf welchen hauptsächlich die Verhältnisse der ältesten griechischen Tempelbauten beruhen: eine gewiss nicht zufällige Uebereinstimmung."

Von $\sqrt{5}$ ward bis jetzt nicht gesprochen, und doch hat, wie schon Eingangs angedeutet ward, diese Irrationalzahl eine entschiedene Bedeutung für die Kunst, obschon uns im Uebrigen die alten Schriftsteller keine Veranlassung gegeben haben, uns gerade mit ihr zu beschäftigen. $\sqrt{5}$ tritt beim sogenannten goldenen Schnitte auf, der wahrscheinlich bereits auf die pythagoräische Schule sich zurückführt. Soll eine Strecke $a$ nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt werden, so gelten für den „Major" $x$ und den „Minor" $y$ die beiden Gleichungen

$$x + y = a, \quad ay = x^2,$$

und löst man dieselben auf, so ergiebt sich

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right),\ y = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Die Griechen verwendeten nun für den Major nach Hultsch (a. a. O.) den Näherungswerth

$$x \sim \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{21}{17} = \frac{a}{2}\left[\frac{38}{17} - 1\right]\right),$$

so dass sie mithin

$$\sqrt{5} \sim \frac{38}{17}$$

gesetzt haben müssen. Ab und zu scheint auch die durch eine leichte Abänderung aus der vorigen hervorgehende Annäherung

$$x \sim \left(a \cdot \frac{22}{34} = a \cdot \frac{11}{17}\right)$$

gebraucht worden zu sein. Hultsch stellt eine Zahlenreihe her, die durch stetiges Multipliciren der Glieder mit diesen Näherungszahlen entstanden ist, nämlich die folgende:

$$90,\ 56,\ 34,\ 21,\ 13,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}.$$

In der That hat man

$$90 \cdot \frac{21}{34} = \frac{1890}{34} \sim 56,\ 56 \cdot \frac{21}{34} = \frac{588}{17} \sim 34,\ 34 \cdot \frac{21}{34} = 21,$$

$$21 \cdot \frac{11}{17} = \frac{231}{17} \sim 13, \; 13 \cdot \frac{21}{34} = \frac{273}{34} \sim 8, \; 8 \cdot \frac{21}{34} = \frac{84}{17} \sim 5,$$

$$5 \cdot \frac{21}{34} = \frac{105}{34} \sim 3, \; 3 \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{34} \sim 2, \; 2 \cdot \frac{21}{34} = \frac{21}{17} \sim \frac{6}{5},$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{85} \sim \frac{3}{4}, \; \frac{3}{4} \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{136} \sim \frac{1}{2}.$$

Man sieht, dass die Näherung theilweise eine sehr grosse ist, an einem Orte sogar eine absolute.

Diese Zahlen 34, 17, 11 ... erscheinen nun aber häufig in den Proportionen der Tempel, nicht minder, wie wir bereits erfuhren, die ebenfalls der Reihe zu entnehmenden Primzahlen 2, 3, 5 und deren Multipla. Beim Artemision z. B. war die Hauptdimension = 240, daneben tritt aber auch die Zahl 150 hervor. Beide Zahlen hängen durch den goldenen Schnitt mit einander zusammen; es ist

$$240 \cdot \frac{21}{34} = \frac{2520}{17} = 148\,\frac{4}{17} \sim 150.$$

Jene Zahl 90 aber, die eben ihrer architektonischen Bedeutung halber zum Ausgangspunkt der obigen Reihe genommen wurde, ist gleich dem Minor $y = 240 - 150$. Sämmtliche Verhältnisse des Artemis-Tempels beruhen auf den Grundzahlen 2, 3, 5, 17. Die Zahl 29 erscheint nur einmal als eine bestimmte Modifikation von 60 : 30, 17 tritt ein einzigesmal auf. „Der Tempel des Apollon Epikurios bei Phigalia zeigt in seinen Hauptverhältnissen die Grundzahlen 2 und 3, nächstdem 5 und 7. Vereinzelt sind 13 und 29 nachgewiesen“ 187).

Durch die Untersuchungen von Hultsch, dem es übrigens entgangen zu sein scheint, dass seine Zahlenreihe wesentlich mit der berühmten Lamé'schen Reihe übereinstimmt, dürfte der Zusammenhang der griechischen Architektur mit gewissen Irrationalzahlen und mit der Theilung einer Geraden nach stetiger Proportion ausser Zweifel gesetzt sein. Ihm pflichtet Cantor bei mit folgenden Worten 188): „Der goldene Schnitt spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch wirksamste Verhältniss, und das ist das stetige, ist in den athenischen Bauten aus den Jahren 450—430 aufs Schönste verwerthet.“ Wir wollen betreffs der strengen Regelmässigkeit, mit welcher — vielleicht nur instinktiv — von den alten Architekten bei grossen und wichtigen Unternehmungen zu Werke gegangen wurde, auch auf das Zeugniss eines hervorragenden Sachkenners, G. Hauck's, verweisen 189).

Hiermit ist der erste Theil unserer Aufgabe abgeschlossen. Die Kritik hat bisher geschwiegen, Erklärungsversuche wurden nicht gemacht, es wurden lediglich alle Daten gesammelt, an welchen sich spätere Erklärungsversuche

erproben können. Es ist somit an der Zeit, der geschichtlichen Abtheilung dieser unserer Untersuchung nunmehr den kritisch-mathematischen Theil nachfolgen zu lassen.

## Kapitel II.

### Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch offene oder versteckte Kettenbruch-Algorithmen.

§. 1. *Geschah die Wurzelausziehung blos versuchsweise?* Es hat nicht an Stimmen gefehlt, welche sich für diese Auffassung erhoben, In seiner Rathlosigkeit, sich über die bei Archimedes vorkommenden Wurzeln ein Urtheil zu bilden, sah sich zuerst Nesselmann zu dem pessimistischen Ausspruche gedrängt 190): „Es bleibt nur die Vermuthung übrig, dass die Alten ihre Wurzeln durch Versuche und Errathen gefunden haben, worauf namentlich die Multiplikationsproben bei Eutokius hindeuten. Die zunächst kleinere Zahl, welche der gesuchten Wurzel entsprach, konnten sie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und dass ähnliche Tafeln, die ihnen ihre mühsamen Rechnungen erleichterten, ihnen nicht fremd waren, beweist die Multiplikationstafel des Nikomachus." Friedlein billigt diese für den Geschichtsforscher freilich etwas trostlose Ansicht, ausdrücklich dabei betonend, dass die Theon'sche Methode allem Anscheine nach niemals auf Decimalzahlen, sondern ausschliesslich nur auf Sexagesimalzahlen angewandt worden sei 191). Er hätte sich, um die von Nesselmann beigebrachten Gründe noch zu verstärken, auch auf den sogenannten Calculus Victorii berufen können, der recht eigentlich als Rechenknecht zur bequemeren Ausführung weitläufiger Multiplikationen gedient haben muss 192). Nicht viel anders verhält es sich, wenn man den Alten eine „divinatorische" Thätigkeit, ein unerklärbares Geschick in der Auffindung der richtigen Wurzelwerthe beimessen will. Es ist wahr, eine Autorität wie Hultsch hat sich einmal eines solchen Ausdruckes bedient, indem er von einem gewissen Pheidon, der die allerdings sehr merkwürdige Näherung

$$\sqrt[3]{\frac{25}{18}} \sim \frac{10}{9}$$

angab, Folgendes sagte 193): „Diese dritte Wurzel hat er nun schwerlich ausgerechnet, wohl aber fast divinatorisch, wie so viele andere Männer des Alterthums noch viel schwierigere mathematische Probleme gelöst haben, gefunden, dass nach dem festgesetzten Verhältniss zwischen babylonischem und ägyptischem Hohlmaass, also aus dem System heraus, sich für das babylonische und griechische Ellenmaass der Werth 10 : 9 ergebe." Wir

halten uns jedoch überzeugt, dass gerade Hultsch nicht geneigt sein würde, diese gelegentliche Bemerkung in dem Sinne zu verallgemeinern, wie diess Nesselmann und Friedlein thaten.

Wir möchten nicht den Glauben erwecken, als seien wir der Ansicht dass von den Alten niemals Rechnungsresultate durch Probiren gefunden worden seien. Im Gegentheil, gar manche uns bekannte Zahl mag diesem bequemen Verfahren ihre Entstehung zu danken haben. In Friedlein's Werk 194) ist sogar an einem recht hübschen Beispiele gezeigt worden, wie man wohl bei solchen empirischen Wurzelausziehungen verfahren sein könnte. Der Hydrotechniker Frontinus sah sich mehrfach in der Lage, aus dem bekannten, d. h. durch hindurchgeflossene Wassermengen bestimmten, Querschnitte einer kreisrunden Röhre auf deren Durchmesser schliessen zu müssen; unter anderen giebt er an, wenn die Kreisfläche 1 Digitus im Quadrat halte, so betrage der Durchmesser $\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{72}\right)$ Digiti. Mit Benützung des archimedischen Verhältnisses hatte man, unter $F$ die Fläche, unter $d$ den Durchmesser verstanden,

$$F = \frac{1}{4} d^2 \pi, \quad d^2 = \frac{4F}{\pi} = 4F \cdot \frac{7}{22} = \frac{14F}{11}, \quad d = \sqrt{1^2 \cdot \frac{14}{11}} = \sqrt{\frac{14}{11}}.$$

Machte man im Nenner rational, so ergab der Bruch $154 : 11^2$ doch noch einen von den nächsten Quadratzahlen 144 und 169 allzuweit abliegenden Zähler; man multiplicirte also Zähler und Nenner abermals mit 4 und konnte jetzt

$$\frac{14}{11} = \frac{154 . 4}{22^2} = \frac{616}{22^2} \sim \frac{625}{22^2}, \quad \sqrt{\frac{14}{11}} \sim \frac{25}{22}$$

setzen. Des Ferneren ist

$$\frac{25}{22} = 1 + \frac{3}{22} = 1 + \frac{24}{22 . 8} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}.$$

Das römische Bruchsystem hatte für $\frac{1}{88}$ keine Bezeichnung; der ihm nächste Einheitsbruch, für den es ein Zeichen gab, war $\frac{1}{72}$, und so ward denn näherungsweise letzterer eingesetzt. Ob Frontinus es wirklich so machte, kann niemals entschieden werden, indess lässt sich kaum etwas Besseres geben, wenn man nicht überhaupt von der für den Verf. maassgebenden Ueberzeugung ausgeht, dass auch hier ein methodisches Verfahren vorliegt. Der nächste Paragraph soll diess bestätigen.

Allein auch wer nicht so weit geht, muss doch zugestehen, dass hier von einem reinen Herumtasten keine Rede ist. Eine wenn auch noch rohe Methodik tritt sogar in den von Friedlein dem römischen Praktiker unter-

legten Tastversuchen noch hervor. Dagegen geben wir bereitwillig zu, dass zur Ermittelung der ganzen in einer Irrationalität steckenden Zahl hauptsächlich Tabellen der Quadratzahlen verwandt worden sind, wie wir deren (§. 1) bereits bei den Babyloniern kennen gelernt haben. Hiefür spricht sich auch Rodet aus 195): „En ce qui concerne particulièrement les tables de carrées destinées à alléger les calculs pénibles, l'hypothèse de Nesselmann*) a reçu, depuis l'époque, où il écrivait (1842), une confirmation éclatante par la découverte de semblables tables de carrés et de cubes sur les briques de la bibliothèque de Sardanapale IV à Babylon. Si les Chaldéens possédaient ces tables, a fortiori les Grecs, leurs disciples et leurs héritiers en plus d'un cas, devaient-ils les avoir imitées et étendues." Sowie jedoch $E(\sqrt{A})$**) ermittelt war, traten, wie auch Rodet (Kap. III) annimmt, bestimmte Methoden in Kraft, und deren möglichster Wiederherstellung wollen wir uns jetzt widmen, freilich zunächst nur nach einer ganz bestimmten Richtung hin.

§. 2. *Die Näherungsformel* $a \pm \frac{b}{2a}$. Geht man von der Relation

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm x$$

aus, so ergiebt sich

$$\pm b = \pm 2ax + x^2,$$

und hieraus die wohlbekannte Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a \pm} \frac{b}{2a \pm} \frac{b}{2a \pm} \cdots$$

Wird dieser Kettenbruch nur bis zum zweiten Näherungswerth berechnet, so erhält man

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}.$$

*) Vgl. hierzu die diesen Paragraphen einleitende Stelle aus Nesselmann's Geschichtswerk.

**) Wir glaubten uns berechtigt, dieses in der gesammten zahlentheoretischen Literatur gebräuchliche Zeichen auch auf unseren Fall zu übertragen. $E\left(\frac{m}{n}\right)$ bedeutet die ganze Zahl, welche die Division von $m$ durch $n$ als erste Annäherung ergiebt, und ein gleiches soll $E(\sqrt{A})$ thun, wenn an die Stelle des Dividirens das Radiciren tritt. Wenn also $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b}$ $\left(b < \begin{cases}(a+1)^2 - a^2 \\ a^2 - (a-1)^2\end{cases}\right)$ gesetzt wird, so ist beim oberen Vorzeichen und beim unteren resp. $E(\sqrt{A})$ gleich $a$ und gleich $(a-1)$ zu nehmen.

Selbstverständlich braucht nicht überall, wo diese Näherungsgleichung auftritt, darin das Ergebniss einer unvollständigen Kettenbruchentwickelung erblickt zu werden, da ja oben die Vernachlässigung der kleinen Grösse $x^2$ auf denselben Werth der Wurzel geführt haben würde.

Mit dieser Formel waren die Alten zweifellos vertraut. Heron von Alexandria hat nach ihr alle jene Werthe berechnet, welche in Abtheilung I der von P. Tannery angenommenen ersten Gruppe (Kap. I, §. 4) enthalten sind. Nur hat er, seiner Gewohnheit gemäss, den Bruch $\frac{b}{2a}$, wenn er diese Eigenschaft nicht schon von Haus aus hatte, auf Stammbrüche zurückgeführt. Wir lassen alle 5 Exempel hier folgen:

$$\sqrt{63} = \sqrt{8^2 - 1} \sim 8 - \frac{1}{16},$$

$$\sqrt{1125} = \sqrt{33^2 + 36} \sim \left(33 + \frac{6}{11} = 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}\right),$$

$$\sqrt{1081} = \sqrt{32^2 + 57} \sim \left(32 + \frac{57}{64} = 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right),$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1} \sim 7 + \frac{1}{14},$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{8^2 + 11} \sim \left(8 + \frac{11}{16} = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right).$$

Besonders beachtenswerth dünkt uns der Umstand, dass Heron, wie aus dem ersten Beispiele wohl mit apodiktischer Gewissheit hervorgeht, auch das negative $b$ berücksichtigte.

Maximus Planudes (Kap. I, §. 9) ging, wie wir sahen, stets von der nämlichen Formel aus, $b$ natürlich nur positiv betrachtend. Aber auch Frontinus (vgl. den vorigen §.) dürfte dieselbe aller Wahrscheinlichkeit nach gekannt haben.

Denn es ist ja

$$\sqrt{\frac{14}{11}} = \sqrt{1^2 + \frac{3}{11}} \sim \left(1 + \frac{3}{22} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}\right),$$

wie wir oben sahen.

Endlich glauben wir diese Formel auch in jener Stelle der indischen Çulvasûtras wiederzufinden, für welche Cantor, wie wir (Kap. I, §. 14) sahen, eine wesentlich andere Deutung gegeben hat. Unseres Erachtens verhält sich die Sache viel einfacher. Wenn wir die halbe Seite des in einen Kreis zu verwandelnden Quadrates mit $a$ bezeichnen, so ist nach Fig. 7

$$\left[a + \frac{1}{3}a\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 \cdot \pi \sim 4a^2$$

oder vereinfacht

$$\frac{(2+\sqrt{2})^2}{9}\cdot\pi \sim 4,$$

$$(4+4\sqrt{2}+2)\cdot\pi \sim 36,$$

$$3+2\sqrt{2} \sim \frac{18}{\pi}.$$

Da wir nun sahen, dass die Inder in ihrer kirchlichen Geometrie selbst sich des altorientalischen Werthes $\pi = 3$ in einem anderen Falle bedient haben, so liegt es gewiss nahe, auch hier $\pi = 3$ und somit

$$\sqrt{2} \sim \frac{3}{2}$$

zu setzen. Diese Zahl geht aber auch aus unserer Formel für $a = b = 1$ hervor.

Wie schon in Kap. I, §. 15 angedeutet, ist hierher auch Alkarkhî's und Al-Moruzi's Näherungswerth

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$$

zu rechnen, der nichts weiter als eine ganz am Wege liegende, nicht eben durch Genauigkeit ausgezeichnete, Correktion des ersteren für gewisse Fälle darstellt. Unsere Aufmerksamkeit verdient er besonders deshalb, weil in ihm einem glücklichen Gedanken Rodet's zufolge die einfache Erklärung des mystischen $\sqrt{10}$ der Inder für $\pi$ begründet liegt 196). Es ist, wenn wir die arabische Formel als bereits den Indern bekannt annehmen dürfen,

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \sim \left(3 + \frac{1}{2.3+1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}\right),$$

und damit haben wir das archimedische Verhältniss gewonnen. Dass aber sogar noch viel genauere Werthe für dieses Verhältniss den alten indischen Mathematikern bekannt waren, steht urkundlich fest 197).

§. 3. *Der dritte Näherungswerth des eingliedrig-periodischen Kettenbruches.* Aus der Quadratwurzel $\sqrt{a^2+b}$ folgt als erster und rohester Näherungswerth $a = E\left(\sqrt{a^2+b}\right)$, als zweiter der uns bereits bekannte

$$a + \frac{b}{2a},$$

als dritter endlich der schon weit genauere Werth

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}} = a + \frac{2ab}{4a^2+b} = \frac{4a^3+3ab}{4a^2+b}.$$

Gar nicht wenige von den Zahlen, mit welchen uns das erste Kapitel vertraut gemacht hat, entsprechen nun diesem Näherungswerth so voll-

kommen befriedigend, dass wir wohl oder übel auf den Gedanken kommen müssen, jene seien ursprünglich nach demselben berechnet worden. Obwohl ein solcher Schluss keinen zwingenden Charakter haben würde, da — vgl. Kap. III — sehr verschiedene Methoden doch im Einzelfalle zu demselben Zahlenresultate führen können, so wird es sich doch empfehlen, den Beweis obiger Behauptung wirklich anzutreten.

An erster Stelle begegnet uns da der bei Platon wenigstens zu vermuthende, bei Aristarch und Heron, sowie bei den Juden aber direkt nachzuweisende Näherungswerth $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$, denn es ist offenbar

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} \sim \left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4+3}{4+1} = \frac{7}{5}\right).$$

Wir glauben sogar, im Gegensatze zu der von Zuckermann ausgesprochenen Meinung, der Ansicht Raum geben zu müssen, dass auch $\sqrt{5000}$ mit Hülfe dieses Näherungswerthes ausgerechnet worden ist (s. o. Kap. I, §. 12). Vielleicht könnte wohl folgender Gedankengang maassgebend gewesen sein. Es ist

$$\sqrt{5000} = \sqrt{70^2 + 100} \sim \left(70 + \frac{100}{140} = 70 + \frac{5}{7}\right).$$

Wird jetzt dieser Bruch als unbeträchtlich vernachlässigt, so ist

$$50\sqrt{2} \sim 70, \quad \sqrt{2} \sim \frac{7}{5}.$$

Wir verfielen auf diese Interpretation, weil es uns nicht recht einleuchten wollte, dass die des Rechnens wenig kundigen Rabbinen sich eines so unhandlichen Näherungswerthes wie $1\frac{31}{75}$ sollten bedient haben.

Tritt man mit dieser Methode an die von Heron mitgetheilten Quadratwurzeln heran, so erzielt man häufig eine sehr grosse Uebereinstimmung, völlige Identität dagegen nur in drei Fällen, das obige $\frac{7}{5}$ mit eingeschlossen. Wir wollen zunächst ein Beispiel für Ersteres geben, indem wir die erste Wurzel der VI. Abtheilung von Gruppe I betrachten. Es ist*)

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)} \sim 2 + \frac{1}{4} + \cfrac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{2} + \cfrac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{2}}}.$$

*) Mit dieser Wurzel hatte sich der Verf. dieses bereits früher 198) beschäftigt, die Annäherung damals aber nicht weit genug getrieben, indem er viel-

Rechnet man aus, so findet sich sehr genau

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{14},$$

und dieser letzte Bruch kann wieder mit einem nur ganz geringen Fehler durch das bei Heron wirklich vorkommende $\frac{2}{3}$ ersetzt werden.

Jene beiden Fälle, in welchen Heron wirklich nach unserer Formel gerechnet zu haben scheint, sind wiederum verschieden, indem der eine bereits der im vorigen Paragraphen abgehandelten Methode sich fügt. Um so wichtiger ist es dagegen, dass der berühmte Näherungswerth für $\sqrt{3}$ durch unser gegenwärtiges Verfahren erhalten wird. Es ist nämlich

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \sim \left(2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4}} = 2 - \frac{4}{15} = \frac{26}{15}\right).$$

Nun ist allerdings nicht in Abrede zu stellen, dass dieser nämliche Werth, wie wir gleich nachher sehen werden, auch durch die Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{1^2 + 2}$ gewonnen werden kann, allein während er bei der obigen bereits an dritter Stelle erscheint, erscheint er dort erst als sechster Näherungswerth. Hat also überhaupt die Berechnung nach einer Kettenbruchmethode stattgefunden, so hat jedenfalls die erstere Erklärungsweise den Vorzug grösserer Wahrscheinlichkeit.

In §. 12 des ersten Kapitels ward u. a. auch bemerkt, dass die bei Moses ben Maimon zu findende Relation $\sqrt{13} \sim \frac{18}{5}$ ein gewisses Aufsehen erregen müsse. In der That ist

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} \sim \left(3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{2}{3}} = \frac{4 \,.\, 27 + 36}{4 \,.\, 9 + 4} = \frac{18}{5}\right).$$

Genau diesen Werth giebt aber der jüdische Gelehrte an, und man möchte daher wohl vermuthen, er habe ihn mittelst der drei ersten Theilbrüche des eingliedrig-periodischen Kettenbruches errechnet.

§. 4. *Der vierte Näherungswerth und die eingeschalteten Näherungswerthe.* Man möchte obige Vermuthung betreffs des Maimonides um so eher hegen, als man weiss, dass der alles gelehrte Wissen seiner Zeit in sich vereinigende Mann insbesondere auch mit den Arabern in engster

---

mehr $2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ erhielt. Damals betrug also der Fehler des letzten Gliedes dem Heron'schen gegenüber $+\frac{1}{12}$, diessmal dagegen, nachdem noch der zweite Theilbruch hinzugenommen ward, nur $-\frac{1}{42}$.

Fühlung stand. Nun sahen wir aber (Kap. I, §. 15), dass Alkasâdi sogar die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

gekannt hat. Wie Woepcke (a. a. O.) bemerkte, ist der Ausdruck rechts aber nichts anderes als der aufgewickelte eingliedrig-periodische Kettenbruch, wenn man die Theilbrüche berücksichtigt und somit bis zum vierten Näherungswerthe fortschreitet; es ist, wie eine leichte Rechnung lehrt,

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}} = a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Freilich gehört der genannte arabische Schriftsteller einer späteren Zeit an, als der jüdische, allein eben deswegen mag vielleicht der Schluss nicht ungerechtfertigt erscheinen: Zu Maimonides' Zeiten hatte man erst drei Näherungswerthe in Rechnung zu ziehen gelernt, und in den zwei Jahrhunderten, die ihn von Alkalsâdî trennen, war man auch bis zum vierten Näherungswerthe fortgeschritten. Denkt man sich den Entwickelungsprozess in dieser Weise verlaufen, so erscheint überhaupt die Entstehung der Kettenbrüche in einem neuen Lichte geschichtlicher Continuität. Denn ungefähr hundert Jahre nach Alkalsâdî lebte und wirkte der italienische Mathematiker Pietro Cataldi, der eigentliche und bewusste Erfinder der unter dem Namen Kettenbruch bekannten Zahlform 199).

Es ist ja — dieser Umstand scheint von den Gegnern der hier vorgetragenen Anschauung nicht genug gewürdigt zu werden — durchaus nicht nöthig, dass jeder Arithmetiker, der Näherungswerthe von Kettenbrüchen berechnete, diess auch ganz und gar in dem Sinne that, welchen wir zur Zeit mit dieser Operation verbinden. Man vergleiche nur die Beschreibung, welche Libri 200) von Cataldi's Methode giebt; dann wird es wahrscheinlich, dass man auch vor Erfindung des Bruchstriches, also vor Leonardo Fibonacci, recht gut einige Eigenschaften der Näherungswerthe ermitteln konnte. Man erkannte, dass, wenn $\frac{P_k}{Q_k}$ einen $k$ten Näherungswerth bedeutete, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ mittelst der Relation

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{2a\,P_k + b\,P_{k-1}}{2a\,Q_k + b\,Q_{k-1}}$$

als eine bei weitem bessere Annäherung gefunden ward. So fand man zuerst $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2a^2 + b}{2a}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{4a^3 + 3ab}{4a^2 + b}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{8a^4 + 8a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}$. Weiter ist man vor den Italienern schwerlich gekommen, allein dafür, dass man

im späteren Alterthum und früheren Mittelalter wenigstens soweit gekommen sei, sprechen doch recht viele Anzeichen.*)

Bei unseren bisherigen Untersuchungen hatten wir unser Augenmerk auch zu lenken auf gewisse minder genaue Näherungswerthe, welche, unmittelbar wenigstens, auf keine Kettenbruchentwickelung zurückgeführt werden zu können scheinen. Bei den Rabbinen begegneten wir (Kap. I, §. 12) dem allerdings nur ganz sporadisch vorkommenden Werthe $\sqrt{2} \sim \frac{4}{3}$, bei den Juden (Kap. I, §. 14), wenn wir andererseits der Cantor'schen Erklärung beipflichten wollen, dem Werthe $\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, und endlich bei Gerbert (Kap. I, §. 11) dem Werthe $\sqrt{3} \sim \frac{12}{7}$. Wir knüpfen, um eine allfallsige Entstehungsmöglichkeit für diese Zahlen zu begründen — mehr können und wollen wir nicht geben — an den obigen Ausdruck für $P_{k+1} : Q_{k+1}$ an. Es lag zu einer Zeit, die im Rechnen nicht weniger als geschickt war und neue Ergebnisse häufig nur versuchsweise zu erhalten wusste, gewiss sehr nahe, aus einer fertigen Reihe von Näherungen

$$\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}, \frac{P_i}{Q_i}, \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} \cdots$$

neue Werthe dadurch herzuleiten, dass man, modern gesprochen,

$$\frac{P'_i}{Q'_i} = \frac{P_{i-1} + P_i}{Q_{i-1} + Q_i}, \frac{P'_{i+1}}{Q'_{i+1}} = \frac{P_i + P_{i+1}}{Q_i + Q_{i+1}} \cdots$$

bildete, Zähler und Nenner je zweier aufeinanderfolgender Näherungswerthe durch einfache Addition zu einem neuen Zähler und Nenner vereinigend. Auch später, als man bereits den richtigen Fortgang kannte, liess man

*) Der Näherungswerth $\frac{17}{12}$ für $\sqrt{2}$ würde sich ebenfalls hierher rechnen lassen; indem

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} \sim 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

gesetzt werden kann. Da uns nun obiger Werth bei Theon Smyrnaeus und bei den Indern begegnet ist, so ziehen wir es vor, von $\frac{17}{12}$ einmal dann zu sprechen, wenn wir später die Theon'sche Methode (§. 5) im Zusammenhänge diskutiren; der indische Werth

$$\sqrt{2} \sim \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}\right)$$

wird dagegen sachgemässer im III. Kapitel zur Behandlung gelangen.

jenes ältere und unvollkommenere Verfahren, als eine immerhin genügende, Näherung noch fortbestehen. Was uns besonders dazu ermuthigt, an dieser Hypothese festzuhalten, ist der Umstand, dass in dem nicht lange nach Alkalsâdî's Zeit erschienenen Rechenbuche des Etienne de la Roche 201) ein dem Principe nach ähnlicher Gang behufs der Ermittelung von Näherungswerthen einer Quadratwurzel eingehalten wird. Wir haben auf diese Methode de la Roche's, als den ersten Keim zu den heute so genannten „Nebennäherungsbrüchen“ enthaltend, bereits vor einigen Jahren aufmerksam gemacht 202), jedenfalls früher, als Rodet 203), der sich jedoch über den Lyoneser Mathematiker weit eingehender auslässt. Es gereicht uns zur Befriedigung, mit einem so scharfsinnigen Geschichtsforscher in der Constatirung dieser merkwürdigen Thatsache zusammengetroffen zu sein.

Giebt man Obiges zu, so ist die Erklärung der fraglichen Näherungswerthe eine überaus einfache Sache. Man hat

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}, \quad \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cdots}}}$$

also im ersteren Falle

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12} \ldots,$$

und im zweiten Falle

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4} \ldots$$

Mit Beibehaltung unserer obigen Bezeichnung wäre also im ersten Falle

$$\frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3}, \frac{P'_3}{Q'_3} = \frac{7+3}{5+2} = \frac{10}{7}$$

und im zweiten Falle

$$\frac{P'_4}{Q'_4} = \frac{7+5}{4+3} = \frac{12}{7}.$$

Besonders gefällig erscheint die letztere Ableitung bei folgender Ueberlegung. Durch Anwendung des wahrscheinlich schon Cataldi bekannten Satzes, dass man, ohne den Werth eines Kettenbruches zu verändern, zwei Theilzähler und den zwischenliegenden Theilnenner mit der nämlichen Zahl multipliciren oder dividiren darf, kann man die Form

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

herstellen und hat dann

$$\frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} = \frac{2P_{2i} + P_{2i-1}}{2Q_{2i} + Q_{2i-1}}, \quad \frac{P_{2i}}{Q_{2i}} = \frac{P_{2i-1} + P_{2i-2}}{Q_{2i-1} + Q_{2i-2}}.$$

$\frac{P_5}{Q_5}$ gehört in die erstere Kategorie; es bedurfte aber nur einer einfachen irrthümlichen Versetzung desselben in die zweite, um aus $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}$ den irrthümlichen Werth $\frac{7+5}{4+3} = \frac{12}{7}$ hervorgehen zu lassen.

§. 5. *Die Quadratwurzeln bei Archimedes und Theon, causal erklärt.* Wir haben uns in den vorstehenden ersten Paragraphen dieses Kapitels bemüht, jene mehr verstreut vorkommenden Näherungswerthe des Alterthums aus einem allgemeinen Standpunkt zu begreifen. Die Kettenbrüche schienen uns dazu ein brauchbares Mittel abzugeben. Ganz besonders traten dieselben aber von jeher in den Vordergrund, wenn es galt, die bei Archimedes (Kap. I, §. 3) vorkommenden rationalen Brüche für $\sqrt{3}$ u. s. w. zu erklären. Schon über ein Jahrhundert dauern, wie sich im nächsten Paragraphen ausweisen wird, die Versuche, den archimedischen Zahlen mit Hülfe der continuirlichen Brüche beizukommen, und der zurückhaltende Nesselmann selbst kann 204) die Bemerkung nicht unterdrücken, es liesse sich von ferne vermuthen, dass die Griechen etwas unseren Kettenbrüchen Aehnliches gekannt hätten. Heiberg steht 205) dieser Annahme nicht feindlich gegenüber, obwohl er sich der dagegen zu erhebenden Bedenken wohl bewusst ist. Auch Cantor, der — was wichtig — die Unverträglichkeit der archimedischen Näherungswerthe mit der in's Decimale übersetzten Theon'schen Methode nachgewiesen hat 206), glaubt die Möglichkeit der Verwendung irgendwelcher kettenbruchartiger Algorithmen nicht gänzlich in Abrede ziehen zu sollen 207). Einer a. a. O. gemachten Bemerkung wird sich indessen mit Grund entgegentreten lassen. Cantor sagt nämlich mit Recht, die Kettenbruchentwickelung für $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1}$ führe nur auf Einen der altgriechischen Werthe, nämlich auf $\frac{26}{15}$, nicht auf die Archimed's, thut aber des unseres Erachtens doch noch näher liegenden Kettenbruches für $\sqrt{1^2 + 2}$ gar keine Erwähnung. Die Näherungswerthe dieses letzteren sind aber (vgl. §. 4) die nachstehenden:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \frac{3701}{2131} \ldots$$

Wir sehen, dass beide Werthe des Archimedes, $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ und $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ in dieser Folge von Brüchen sich finden, bezüglich als neuntes und zwölftes Reihenglied. An und für sich entspricht somit die Kettenbruchmethode den archimedischen Zahlen, so sehr man es billig nur verlangen kann.

Das einzige, unserer Ansicht nach wirklich schwer wiegende, Gegen-Argument hat mit gewohntem Scharfblicke kein Geringerer als Gauss geltend gemacht, indem er jedoch auch zugleich ein Mittel an die Hand gab, die von ihm angegriffene Theorie durch einen neuen Grund zu stützen. Indem er nämlich die bereits erwähnte philologisch-mathematische Schrift von Mollweide einer eingehenden Besprechung unterzieht 208), sagt er u. a., es sei nicht recht abzusehen, weshalb Archimedes, wenn er wirklich auf irgend einem methodischen Wege zu den von ihm benützten Näherungswerthen gelangt sei, die Werthe $\frac{362}{209}$ und $\frac{989}{571}$ ganz ausser Acht gelassen habe; man möchte schliessen, er habe letztere eben wirklich nicht bemerkt und sei mehr durch einen glücklichen Zufall auf $\frac{1351}{780}$ verfallen. Hiegegen macht er dann aber selbst folgenden Einwurf 209): „Herr Mollweide glaubt, Archimedes habe jenen Bruch deswegen gewählt, weil er der einfachste von denen sei, deren Zähler zur Ordnung der Tausender gehören, allein dieser Grund scheint uns nicht befriedigend. Wir finden es vielmehr wahrscheinlicher, dass er den Bruch $\frac{1351}{780}$ deswegen vorzog, weil er fand, dass derselbe zufälligerweise beim weiteren Fortgange der Rechnung eine bequemere Vereinfachung darbietet, so dass sich beym 24. Eck für dasjenige Verhältniss, welches, nach unserer Art zu reden, $1 : \text{cotang } 7^0\, 30'$ ist, eine äusserst nahe Grenze sehr einfach durch $240 : 1823$ vorstellen liess. Diesen Vortheil hätte er entbehren müssen, wäre er ursprünglich vom Bruch $\frac{362}{209}$ ausgegangen." Niemand wird dieser Auffassung das Lob eines tiefen Eindringens in den dunklen Sachverhalt absprechen können, doch lässt sich wohl nicht behaupten, es sei damit die Frage, warum der Geometer von Syrakus gerade diese und keine anderen Werthe für seine Zwecke heranzog, nun endgültig erledigt.

Was die anderen archimedischen Quadratwurzeln anlangt, so will die Kettenbruchmethode, wenigstens wenn man sie unmittelbar anwendet, keine ganz genügenden Ergebnisse liefern. So ist beispielsweise von Archimedes (Kap. I, §. 3)

$$\sqrt{349450} \sim 591 + \frac{1}{8}$$

gesetzt worden. Die übliche Kettenbruchentwickelung, resp. die in §. 2 dieses Kapitels besprochene Formel, würde

$$\sqrt{349450} = \sqrt{591^2 + 169} \sim 591 + \frac{169}{1182}$$

ergeben, und dieser letztere Werth ist von $591\frac{1}{7}$ doch nur um einen ganz minimalen Betrag verschieden. Wieso also kommt Archimedes dazu, $\frac{1}{8}$ zu

wählen? Annähernd schmiegt sich diesem Berechnungsverfahren nur noch

$$\sqrt{3380929} \sim 1838 + \frac{9}{11}$$

an, zu welcher Wurzel Nesselmann 210) eine uns interessirende Bemerkung macht: „Es bietet sich uns hier die merkwürdige Erscheinung dar, dass die Methode der Kettenbrüche der Reihe nach folgende Werthe giebt: $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}$ u. s. w.; nun ist $\frac{8}{11}$ zunächst zu klein; es hat also fast den Anschein, als sei deshalb von Archimedes $\frac{9}{11}$ gewählt worden.“ Man sieht, dass alle diese Betrachtungen sich rein auf dem Boden der Hypothese bewegen. Die Möglichkeit, dass Archimedes eine wirkliche und dem Princip nach unseren Kettenbrüchen analoge Methode gehabt habe, ist nicht wegzustreiten, allein ganz gewiss ist auch, dass er die heute gewöhnliche staffelförmige Entwickelungsform nicht kannte, und mindestens sehr wahrscheinlich, dass ihm auch die Rekursionsformel für $\frac{P_k}{Q_k}$, an welche wir in §. 4 zu erinnern hatten, nicht geläufig gewesen ist. Er wäre, wenn diess der Fall, ganz gewiss nicht bis zu $\frac{1371}{780}$ vorgegangen.

Einigermassen fester ist schon der Boden, welchen wir bei Prüfung der von Theon Smyrnaeus mitgetheilten Zahlwerthe unter unseren Füssen fühlen. Was an Thatsachen in dieser Beziehung vorliegt, ward in §. 6 des ersten Kapitels zusammengestellt, und es übrigt nur, ein Urtheil auf diese Thatsachen zu begründen. Es ist die Annahme kaum abzuweisen, dass von Theon die Untersuchung über die durch die Gleichung $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$ unter einander verbundenen Grössen $d$ und $a$ einzig und allein zu dem Zwecke begonnen ward, um brauchbare Näherungswerthe für $\sqrt{2}$ zu erhalten, indem er dabei, wie wir sahen, an die zahlentheoretischen Liebhabereien der altplatonischen Schule anknüpfte. „Berücksichtigt man weiter,“ sagt Cantor 211), „dass die Bildungsgesetze der Seiten- und Diametralzahlen genau dieselben sind, welche die Nenner und Zähler der aufeinanderfolgenden Näherungswerthe für den Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

entstehen lassen, so wird man wohl zu der oben ausgesprochenen Behauptung genöthigt, die Griechen seien, natürlich nicht der Form nach, wohl aber der Sache nach, mit der Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{2}$ und mit dem Gesetze der Näherungswerthe dieses Kettenbruches bekannt gewesen.“

Allein auch von Theon ist es so gut wie sicher, dass ihm, ganz wie dem Archimedes, eigentliche Kettenbrüche vollständig fremd blieben. Es bleibt deshalb stets noch die Frage eine offene: welche Beschaffenheit hatte der Ersatz, durch dessen Anwendung die beiden griechischen Mathematiker eben dasselbe erreichten, was wir heutzutage vermittelst der Kettenbrüche zu erreichen gewohnt sind? Eine sehr grosse Anzahl von Forschern hat sich im Laufe der letzten hundertundfünfzig Jahre mit dieser schwierigen, aber einen lebhaften Anreiz in sich schliessenden, Frage beschäftigt; die folgenden Paragraphen sollen ein treues Bild der von ihnen eingeschlagenen Wege und der auf diesen Wegen erzielten Resultate ergeben, natürlich nur soweit dabei mehr oder minder versteckte Kettenbruch-Algorithmen in's Spiel gekommen sind.

§. 6. *Die Methode von De Lagny.* Im Jahre 1723 trat zuerst der durch zahlreiche arithmetische Arbeiten, insbesondere durch seine schärfere Bestimmung der Zahl $\pi$ wohlbekannte französische Akademiker De Lagny an diese Aufgabe heran 212), deren Lösung er in dem Sinne bewirken will, dass gezeigt werde, wie man die archimedischen Näherungswerthe „régulièrement et sans aucun tâtonnement“ berechnen könne. Er weist zunächst nach, dass man durch die moderne Art und Weise der Quadratwurzelausziehung durch Decimalbrüche nichts erreiche und geht dann dazu über, die „Schritte“ aufzuzeigen, welche Archimedes bei seiner Rechnung gemacht habe 213). Diese Schritte haben nach De Lagny's Meinung darin bestanden, dass successive die Relationen

$$2^2 = 3 . 1^2 + 1,\ 5^2 = 3 . 3^2 - 2,\ 7^2 = 3 . 4^2 + 1,\ 19^2 = 3 . 11^2 - 2,$$
$$26^2 = 3 . 15^2 + 1,\ 71^2 = 3 . 41^2 - 2$$

gebildet wurden, aus welchen dann die Annäherungen

$$\sqrt{3} \sim \frac{2}{1} \sim \frac{5}{3} \sim \frac{7}{4} \sim \frac{19}{11} \sim \frac{26}{15} \sim \frac{71}{41} \cdots$$

unmittelbar hervorgiengen. Wenn nun $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}$ gegeben vorliege, so habe man anzunehmen, dass Archimedes sich folgende Reihe aufeinanderfolgender Brüche gebildet habe:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1},\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{aP_1 + AQ_1}{P_1 + aQ_1},\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{aP_2 + AQ_2}{P_2 + aQ_2},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{aP_3 + AQ_3}{P_3 + aQ_3} \cdots$$

Diese Methode ist nun wirklich eine sehr hübsche und, soviel uns bekannt, von Jenen, welche die Lehre von den Kettenbrüchen bearbeiteten, noch viel zu wenig gewürdigt*), obgleich sie ganz entschiedenes theore-

*) Auch in unserer früheren Schrift über diesen Gegenstand wird dieses nähere Eingehen vermisst. Es wird daselbst 214) einfach ein Beweis a posteriori für die von De Lagny behauptete Thatsache erbracht, die wahre Bedeutung dieser letzteren tritt aber durchaus nicht genügend hervor.

tisches Interesse beanspruchen darf und geradezu in den mathematischen Unterricht übergeführt zu werden verdient. Kürzer, als es von dem Erfinder selbst geschah, kann der eigentliche Kern des Verfahrens durch den folgenden Lehrsatz gekennzeichnet werden:

Entwickelt man $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}$ in den bekannten eingliedrig-periodischen Kettenbruch

$$a + \frac{b}{2a +}\frac{b}{2a +}\cdots,$$

so kann die Berechnung der einzelnen Werthe mittelst der Relation

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{aP_{n-1} + AQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}}, \quad \left(\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1}\right)$$

geleistet werden, man bedarf also, um irgend einen Näherungsbruch zu finden, die Kenntniss blos des zunächst vorangehenden Näherungsbruches, nicht, wie bei der gewöhnlichen rekurrenten Berechnung, der Kenntniss zweier vorhergehender Näherungsbrüche.

Der Beweis dieses Satzes, der für die Rechnungspraxis von entschiedenem Vortheil und in der obigen Form vermuthlich auch neu ist, lässt im Originale an Klarheit und Einfachheit viel zu wünschen übrig. Am Schnellsten führt wohl die folgende Ueberlegung zur Erkenntniss seiner Richtigkeit. Wir setzen den Satz als wahr voraus und haben also

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{aP_{n-1} + (a^2 + b)\,Q_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}} = \frac{a(P_{n-1} + aQ_{n-1}) + bQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}}.$$

oder

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{bQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}} = a + \frac{b}{a + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}.$$

Denken wir uns jetzt für $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ seinen entsprechend berechneten Werth eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{a + \cfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}}$$

In dem nämlichen Sinne weiter folgernd, nehmen wir wahr, dass uns die hypothetische Annahme des Lehrsatzes zu der bekannten Relation

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \cdots + \frac{b}{2a_{(n-1)}}$$

geführt hat, und da unsere Schlüsse augenscheinlich sämmtlich umkehrbar sind, so ist der volle Beweis als erbracht anzusehen.

De Lagny selbst hat nichts davon gemerkt, dass seine Methode durchaus auf Eigenschaften der Kettenbrüche beruhe. Er glaubte also mit guter Zuversicht dem Archimedes einen ähnlichen Gedankengang unterlegen zu können, wie jener war, der ihn selber leitete. Aus den uns sattsam bekannten Gründen müssen wir aber auch gegen dieses abgeänderte Kettenbruchverfahren in geschichtlicher Hinsicht Zweifel erheben. Dagegen verdient De Lagny als der Erste genannt zu werden, der die Pell'sche Gleichung für $A = 3$ ganz ebenso in Beziehung mit der Wurzelausziehung setzte, wie diess von Theon für $A = 2$ geschehen war. Wir werden später sehen, dass in dieser Beziehung P. Tannery und Zeuthen auf De Lagny's Schultern stehen.

§. 7. *Die Methode von Mollweide.* Neunzig Jahre gerade waren nach dem ersten Versuche des französischen Gelehrten verflossen, als der durch seinen regen Sinn für das geschichtliche Element in seiner Wissenschaft ausgezeichnete deutsche Mathematiker Mollweide mit einer neuen Divination betreffs der archimedischen Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ hervortrat. Die einer schon mehrfach angeführten Universitätsschrift einverleibte Untersuchung 215) hat in ihren Hauptzügen folgenden Inhalt. In Fig. 9 sei $AC$ ein Kreisradius $= z$, $ED$ ein Kreisdurchmesser, der mit jenem einen $\sphericalangle CAD = 30^0$ bildet, und eine in $C$ an den Kreis gelegte Berührende schneide den verlängerten Durchmesser in $B$. $BD$ werde $= u$, $BC = p$, endlich $BC - BD = p - u = v$ gesetzt. Aus der Figur fliesst dann zunächst

$$z = 2p - u, \frac{z}{p} = \frac{2p - u}{p} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

Nach einem bekannten Satz vom Kreise ist

$$BD\,(BD + DE) = \overline{BC}^2, \; u\,(u + DE) = p^2,$$

und da $\frac{1}{2} DE + u = 2p$, $DE = 4p - 2u$ ist, so können wir unsere Gleichung als Proportion so schreiben:

$$\frac{p}{u} = \frac{4p - u}{p}.$$

Indem wir zuerst Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multipliciren und sodann den Satz, aus $a : b = c : d$ folge $(a - c) : (b - d) = c : d$, zur Anwendung bringen, finden wir

$$\frac{2p}{8p - 2u} = \frac{u}{p}, \; \frac{2p - u}{7p - 2u} = \frac{u}{p} = \frac{p}{4p - u}, \; \frac{z}{p} = \frac{7p - 2u}{4p - u}.$$

Nun werde wie oben verfahren, nur, statt mit 2, mit 7 multiplicirt;

dann folgt

$$\frac{7p}{28p-7u}=\frac{2u}{2p}, \frac{7p-2u}{26p-7u}=\frac{u}{p}=\frac{4p}{16p-4u}=\frac{4p-u}{15p-4u}, \frac{z}{p}=\frac{26p-7u}{15p-4u}.$$

Durch eine ganz entsprechende Proportionenrechnung finden sich die weiteren Werthe

$$\frac{z}{p}=\frac{97p-26u}{56p-15u}=\frac{362p-97u}{209p-56u}=\frac{1351p-362u}{780p-209u}\ldots$$

Aus dieser Kette von Proportionen folgt natürlich

$$\frac{z}{p}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1}.$$

Analog findet nun Mollweide 216) auch seine unteren Grenzwerthe Er geht aus von der Proportion

$$\frac{z}{p}=\frac{p+v}{p}=\frac{7p-2u}{4p-u}$$

und findet nach und nach

$$\frac{z}{p}=\frac{19p+7v}{11p+4v}=\frac{71p+26v}{41p+15v}=\frac{265p+97v}{153p+56v}=\frac{989p+362v}{571p+209v}=\ldots$$

und demgemäss auch

$$\frac{z}{p}>\frac{989}{571}>\frac{265}{153}>\frac{71}{41}>\frac{19}{11}>\frac{5}{3}>\frac{1}{1}.$$

Hält man beide Reihen von Ungleichungen zusammen, so erhält man, wie Archimedes,

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153},$$

obwohl $\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{989}{571}$ oder auch $\frac{362}{209}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$ mehr dem Sachverhalt entsprechend erschiene.

Mollweide erwähnt noch 217), dass man sowohl von $\frac{265}{153}$, als auch von $\frac{1351}{780}$ besonders bequem zu dem im Alterthum so weit verbreiteten Näherungswerth $\frac{26}{15}$ übergehen könne. Es sei nämlich

$$\frac{265}{153}\sim\left(\frac{260}{150}=\frac{26}{15}\right)$$

und

$$\frac{1351}{780}\sim\left(\frac{1352}{780}=\frac{26\,.\,52}{15\,.\,52}=\frac{26}{15}\right).$$

Betrachtet man das Verfahren, dessen Schilderung soeben erfolgt ist,

unter dem geschichtlichen Gesichtspunkt, so wird man ihm zugestehen müssen, dass kein Satz und keine Umformung darin vorkommt, welche nicht bereits zu Archimed's Zeit den Griechen bekannt gewesen wären. Man darf sich deshalb nicht wundern, dass auch Gauss in der erwähnten Recension ein sehr günstiges Urtheil abgiebt: „Dass Herr Mollweide, welcher sich mit der bei den alten Geometern üblichen Einkleidung arithmetischer Schlüsse sehr vertraut gemacht hat, Archimed's Ideengang wirklich errathen haben könne, mögen wir gerne zugeben." Abgesehen von Anderem, wovon schon in §. 5 zur Genüge die Rede war, möchten wir gegen Mollweide's Herleitung die Einwendung erheben, dass dieselbe trotz ihrer unbestreitbaren Eleganz — oder gerade wegen ihrer unbestreitbaren Eleganz — gerechte Bedenken des Historikers erregen müsse. Es will uns scheinen, dass die künstlichen Umwandlungen der einzelnen Zahlenverhältnisse nur von dem richtig in's Werk gesetzt werden konnten, der schon wusste, was bei seiner Rechnung herauskommen sollte; a priori aber scheinen uns dergleichen Transformationen, obgleich man rein formell ihrem alterthümlichen Charakter gar nichts anhaben kann, doch jenseits des Gesichtskreises eines alten Mathematikers zu liegen. Dieser Eindruck verstärkt sich noch, wenn man die Methode ihres Gewandes entkeidet und erkennt, dass man es betreffs derselben eben doch nur mit einem — wenn auch noch so gut verdeckten — Kettenbruch-Algorithmus zu thun hat.

§. 8. *Zurückführung der Methode von Mollweide auf ihren wahren Charakter.* Lässt man die Art der Ableitung ausser Acht und hält sich lediglich an die fertigen Ergebnisse, so constatirt man leicht, dass Alles auf zwei Kettenbruchsätze hinauskommt, nämlich auf die folgenden: Es ist

$$\frac{z}{p} = \frac{P_{2k} \cdot p - P_{2k-2} \cdot u}{Q_{2k} \cdot p - Q_{2k-2} \cdot u} = \frac{P_{2k+1} \cdot p + P_{2k} \cdot v}{Q_{2k+1} \cdot p + Q_{2k} \cdot v} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots).$$

Drückt man die hier vorkommenden Grössen $p$, $u$, $v$ sämmtlich durch den Radius aus, so resultiren folgende beide Theoreme:

$$\text{I.} \quad \frac{\frac{P_{2k}}{\sqrt{3}} - P_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}} = \frac{\frac{P_{2k-2}}{\sqrt{3}} - P_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k-2}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}},$$

$$\text{II.} \quad \frac{\frac{P_{2k+1}}{\sqrt{3}} + P_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k+1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{P_{2k-1}}{\sqrt{3}} + P_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k-1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Es wäre leicht, dieselben induktorisch durch den Schluss von $n$ auf

$(n+1)$ zu erhärten, wir ziehen es aber vor, einen wenn auch etwas weitläufigeren Beweis für sie zu geben, der uns zu einigen nicht uninteressanten Nebenbetrachtungen Anlass geben wird. Bezeichnet wieder $P_k : Q_k$ den $k$ten Näherungswerth des mit $\sqrt{3} = \sqrt{1^2+2}$ identischen Kettenbruches

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \ldots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots,$$

so gelten für diese $P$ und $Q$ Bedingungsgleichungen in reicher Fülle, von denen wir einige für uns wichtige hier namhaft machen wollen:*)

I. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k} \\ P_{2k-2} & Q_{2k-2} \end{vmatrix} = -1.$$

II. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k} \\ P_{2k-4} & Q_{2k-4} \end{vmatrix} = -4.$$

*) Auf die Beweise dieser vorbereitenden Sätze gehen wir hier aus dem Grunde nicht näher ein, weil dieselben an einem anderen Orte (in den Mém. de la soc. des sciences phys. et nat. de Bordeaux) im Zusammenhang gegeben werden. Lediglich, um darzuthun, wie man jeden solchen Einzelsatz, wenn man sich von dessen Existenz vorher irgendwie erfahrungsmässig überzeugt hat, nachträglich zu verificiren vermag, geben wir hier für N. IV. einen einfacheren Beweis, als es am angeführten Orte geschehen ist. Da zur Rechten eine constante Zahl steht, so muss es genügen, die Gleichheit

$$P_{2k+1}\,Q_{2k-2} - P_{2k-1}\,Q_{2k} = P_{2k-1}\,Q_{2k-4} - P_{2k-3}\,Q_{2k-2}$$

zu erweisen. Man bildet also die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= 2\,P_{2k} + P_{2k-1}, & Q_{2k} &= Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \\ P_{2k} &= P_{2k-1} + P_{2k-2}, & Q_{2k-1} &= 2\,Q_{2k-2} + Q_{2k-3}, \\ P_{2k-1} &= 2\,P_{2k-2} + P_{2k-3}, & Q_{2k-2} &= Q_{2k-3} + Q_{2k-4} \end{aligned}$$

und eliminirt aus dem ersten Systeme $P_{2k}$ und $P_{2k-2}$, aus dem zweiten Systeme $Q_{2k-1}$ und $Q_{2k-3}$, weil diese $P$ und $Q$ in der zu verificirenden Gleichung gar nicht vorkommen. Wir erhalten so

$$P_{2k+1} = 4\,P_{2k-1} - P_{2k-3}, \quad Q_{2k} = 4\,Q_{2k-2} - Q_{2k-4},$$

und setzen wir diese Werthe ein, so folgt

$$\begin{aligned} P_{2k+1}\,Q_{2k-2} - P_{2k-1}\,Q_{2k} &= 4\,P_{2k-1}\,Q_{2k-2} - P_{2k-3}\,Q_{2k-2} \\ - 4\,P_{2k-1}\,Q_{2k-2} + P_{2k-1}\,Q_{2k-4} &= P_{2k-1}\,Q_{2k-4} - P_{2k-3}\,Q_{2k-2}, \end{aligned}$$

wie behauptet war. Nun ist $P_5 = 19$, $Q_2 = 1$, $P_3 = 5$, $Q_4 = 4$, sohin $P_5\,Q_2 - P_3\,Q_4 = 19 - 20 = -1$. Dieser Einzelwerth muss aber, wie wir sahen, allgemein gelten.

III. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k+1} & Q_{2k+1} \\ P_{2k-1} & Q_{2k-1} \end{vmatrix} = 2.$$

IV. Hülfssatz. Es ist.

$$\begin{vmatrix} P_{2k+1} & Q_{2k} \\ P_{2k-1} & Q_{2k-2} \end{vmatrix} = -1.$$

V. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k+1} \\ P_{2k-2} & Q_{2k-1} \end{vmatrix} = -1.$$

Auf diese Lemmen gestützt, führt man die beiden Hauptbeweise durch einfache Umformung von Identitäten. Die identische Gleichung

$$-1 + 8 - 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} = 0$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$-1 + 4(2-\sqrt{3}) - 2(2-\sqrt{3}) - (3 - 2\sqrt{3}) = 0,$$

und daraus fliesst wieder nach Hülfssatz I und II

$$\begin{aligned} P_{2k-2} Q_{2k-2} - P_{2k-2} Q_{2k} - (2-\sqrt{3}) \left(P_{2k} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k}\right) \\ + 2(2-\sqrt{3}) \left(P_{2k-2} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k-2}\right) \\ + (3 - 2\sqrt{3}) \left(P_{2k-2} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k-2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Rechnet man die Klammern aus und addirt beidseitig

$$(\sqrt{3} - 2) P_{2k-2} Q_{2k-2},$$

so erhält man folgende neue Gleichung:

$$\begin{aligned} P_{2k} Q_{2k-2} - (2-\sqrt{3}) P_{2k-2} Q_{2k-2} - (2-\sqrt{3}) P_{2k} Q_{2k-4} \\ + (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3) P_{2k-2} Q_{2k-4} = P_{2k-2} Q_{2k} \\ - (2-\sqrt{3}) P_{2k-2} Q_{2k-2} - (2-\sqrt{3}) P_{2k-4} Q_{2k} \\ + (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3) P_{2k-4} Q_{2k-2}. \end{aligned}$$

Fasst man auf beiden Seiten gehörig zusammen, so erhält man als neue Gleichung

$$\begin{aligned} \left(P_{2k} - 2 P_{2k-2} + \sqrt{3} P_{2k-2}\right) \left(Q_{2k-2} - 2 Q_{2k-4} + \sqrt{3} Q_{2k-4}\right) \\ = \left(P_{2k-2} - 2 P_{2k-4} + \sqrt{3} P_{2k-4}\right) \left(Q_{2k} - 2 Q_{2k-2} + \sqrt{3} Q_{2k-2}\right). \end{aligned}$$

Durch entsprechende Division geht diese Gleichung über in die erste der obigen Mollweide'schen Relationen:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k} - 2P_{2k-2} + \sqrt{3}P_{2k-2})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k} - 2Q_{2k-2} + \sqrt{3}Q_{2k-2})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k-2} - 2P_{2k-4} + \sqrt{3}P_{2k-4})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k-2} - 2Q_{2k-4} + \sqrt{3}Q_{2k-4})}.$$

Im zweiten Falle legen wir die Identität

$$2 - (\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} - 1) - (4 - 2\sqrt{3}) = 0$$

zu Grunde und schreiben dieselbe, mit Berufung auf Hülfssatz III, IV, V und I in nachstehender Form:

$$\begin{aligned} P_{2k+1}Q_{2k-1} - P_{2k-1}Q_{2k+1} &+ (\sqrt{3} - 1)(P_{2k+1}Q_{2k-2} - P_{2k-1}Q_{2k}) \\ &+ (\sqrt{3} - 3)(P_{2k}Q_{2k-1} - P_{2k-2}Q_{2k+1}) \\ &+ (4 - 2\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-2} - P_{2k-2}Q_{2k}) = 0. \end{aligned}$$

Durch ganz einfache Umformungen ergiebt sich hieraus, ähnlich wie oben,

$$\begin{aligned} &(P_{2k+1} + \sqrt{3}P_{2k} - P_{2k})(Q_{2k-1} + \sqrt{3}Q_{2k-2} - Q_{2k-2}) \\ &= (P_{2k-1} + \sqrt{3}P_{2k-2} - P_{2k-2})(Q_{2k+1} + \sqrt{3}Q_{2k} - Q_{2k}), \end{aligned}$$

und endlich durch Division

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k+1} + \sqrt{3}P_{2k} - P_{2k})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k+1} + \sqrt{3}Q_{2k} - Q_{2k})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k-1} + \sqrt{3}P_{2k-2} - P_{2k-2})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k-1} + \sqrt{3}Q_{2k-2} - Q_{2k-2})}.$$

Diess ist aber der zweite der von Mollweide dem Archimedes zugeschriebenen Sätze. Wir hoffen, durch die Betrachtungen dieses Paragraphen die Berechtigung dafür nachgewiesen zu haben, dass wir die Mollweide'sche Methode den versteckten Kettenbruch-Algorithmen zurechneten und sie demzufolge in diesem II. Kapitel unterbrachten.

§. 9. *Die Methode von Hauber.* Es ist nicht unmöglich, dass Hauber, zu dessen Methode die chronologische Ordnung nunmehr führt, durch die Lektüre der Mollweide'schen Schrift zu seinem eigenen Versuche angeregt wurde. Auch der würtembergische Mathematiker will sich strenge in den Grenzen dessen halten, was bei einem alten Geometer, zumal bei Archimedes, wirklich vorausgesetzt werden könne, und er war, was genaue Kenntniss der antiken Denkweise anbetrifft, auch gewiss sehr gut zu seinem Unternehmen vorbereitet. Hauber's Arbeit verdient auch aus dem Grunde besondere Beachtung, weil er sich nicht, wie die Mehrzahl seiner Collegen, auf $\sqrt{3}$ beschränkte, sondern auch die anderen in der „Kreismessung" zu findenden Näherungswerthe gleichmässig in Betracht zog.

Wir knüpfen an Hauber's Nachweis der archimedischen Ungleichheit

$$\sqrt{9082321} < 3013\frac{3}{4}$$

an. Man kann $9082321 = 3013^2 + 4152$ setzen; Hauber aber giebt durch Einführung eines willkürlichen Faktors dem ursprünglichen Probleme die Form $9082321\,B^2 = A^2$ und setzt dann

$$(A - 3013\,B)\,(A + 3013\,B) = 4152\,B^2,$$

woraus, wenn $A - 3013\,B = R'$ gemacht wird, die Proportion

$$\frac{B}{R'} = \frac{A + 3013\,B}{4152\,B}$$

folgt. Nach dem auch von Mollweide so häufig angewandten Proportionssatze ergiebt sich hieraus

$$\frac{B - R'}{R'} = \frac{A - 1139\,B}{4152\,B}$$

oder, durch Umkehrung, $B - R' = R''$ gesetzt,

$$\frac{R'}{R''} = \frac{4152\,B}{A - 1139\,B}.$$

Um dieses Restverhältniss weiter umzuformen, wird der Ausdruck $3013\,B^2 - 1139\,B^2 = (3013\,B + 1139\,B)(3013\,B - 1139\,B) = 4152.1874\,B^2$ mit der ursprünglichen Gleichung

$$A^2 - 3013\,B^2 = 1\,.\,4152\,B^2$$

in Verbindung gesetzt; addirt man, so wird

$$(A + 1139\,B)\,(A - 1139\,B) = 4152\,.\,1875\,B^2,$$

und führt man für den zweiten Faktor links wieder sein Zeichen $R''$ ein, so ist die zuletzt angeschriebene Proportion in die folgende übergegangen:

$$\frac{R'}{R''} = \frac{A + 1139\,B}{1875\,B}.$$

Das letztere Verhältniss ist $< 3$, $R' < 3\,R''$, $R'' > \frac{1}{3}\,R'$. Da aber $B = R' + R''$ war, so ist $R' < \frac{3}{4}\,B$ und

$$(A = 3013\,B + R') < 3013\,\tfrac{3}{4}\,B,$$

oder, wenn auf beiden Seiten mit $B$ weggehoben wird,

$$\sqrt{9082321} < 3013\,\tfrac{3}{4}.$$

Drückt man, wie es Hauber (a. a. O.) gethan, Alles in algebraischen Zeichen aus, so kann man

$$A = \mu B + R,\ B = \mu' R + R',\ R = \mu'' R' + R'' \ldots$$

setzen, und das ganze Verfahren gipfelt ersichtlich in der Bestimmung der

Coëfficienten $\mu$. Oben ward die Rechnung nur soweit fortgeführt, um die Richtigkeit des archimedischen Zahlwerthes zu erhalten; vom Verf. dagegen ward schon früher, besserer Uebersicht halber, noch $\mu'''$ und $R'''$ dazu berechnet 219). Es ist in unserem Falle $\mu = 3013$, $\mu' = 1$, $\mu'' = 2$, $\mu''' = 4$.

Uebersieht man diesen Gang des Calculs im Zusammenhang, so kann man nur mit grösstem Erstaunen des Umstandes gedenken, dass Hauber dem De Lagny den Vorwurf macht, dessen Verfahren sei eigentlich nichts anderes als die bekannte Lagrange'sche Kettenbruchentwickelung, laufe daher ganz dem Geiste der Antike zuwider. Und während er so den Splitter in seines Nächsten Auge zu erkennen glaubte, der aber in Wirklichkeit gar nicht vorhanden war, bemerkte er den Balken im eigenen Auge nicht. Während De Lagny's Kettenbruch, wenn man ihn (vgl. §. 6) aus seiner Umhüllung herausschält, der gewöhnliche eingliedrig-periodische ist, bedient sich Hauber eines Algorithmus, der in der That nur in der äusseren Form der Rechnung nicht mit jenem von Lagrange übereinstimmt, und man sollte wirklich meinen, Ersterer habe diess selbst an der Gestalt der von ihm aufgestellten Rekursionsgleichungen erkennen müssen. Der Nachweis der absoluten Identität von Lagrange's und Hauber's Methode ward in der mehrfach genannten Monographie des Verf. mehr nur angedeutet; diessmal gedenken wir diesen Beweis in der einfachsten Weise dadurch zu erbringen, dass wir ganz im Sinne des französischen Analytikers $\sqrt{9082321}$ in einen Kettenbruch vom Theilzähler 1 entwickeln. Man hat bekanntlich nach Lagrange 220) folgendes Schema zu bilden:

$$\sqrt{9082321} = 3013 + \frac{\sqrt{9082321} - 3013}{1}, \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{3013}{1},$$

$$\frac{1}{1 \,.\, \sqrt{9082321} - 3013} = \frac{\sqrt{9082321} + 3013}{4152} = 1 + \frac{\sqrt{9082321} - 1139}{4152}, \quad \frac{B}{B_1} = \frac{3014}{1},$$

$$\frac{1 \,.\, \sqrt{9082321} - 3013}{3014 - 1 \,.\, \sqrt{9082321}} = \frac{\sqrt{9082321} + 1139}{1875} = 2 + \frac{\sqrt{9082321} - 2611}{1875}, \quad \frac{C}{C_1} = \frac{9041}{3},$$

$$\frac{3014 - 1 \,.\, \sqrt{9082321}}{3 \,.\, \sqrt{9082321} - 9041} = \frac{(3014 - 1 \,.\, \sqrt{9082321})(3 \,.\, 9082321 + 9041)}{9 \,.\, 9082321 - 9041^2}$$

$$= \frac{\sqrt{9082321} + 2611}{1208} = 4 + \cdots, \quad \frac{D}{D_1} = \left(\frac{39178}{13} \sim 3013 + \frac{3}{4}\right).$$

$\frac{A}{A_1}$, $\frac{B}{B_1} \cdots$ stellen hier, wie gewöhnlich, resp. den ersten, zweiten ... Näherungswerth des Kettenbruches vor, in welchen die Wurzel aufgelöst wurde; in unserem Falle ist

$$\sqrt{9082321} = 3013 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Die im Schema fettgedruckten ganzen Zahlen sind bekanntlich die Theilnenner des sich ergebenden Kettenbruches und zugleich einerlei mit den von Hauber eingeführten Coëfficienten $\mu$, $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ ..., mit deren Zahlwerthen sie denn auch wirklich der Reihe nach übereinstimmen. Man überzeugt sich, dass unser obiges Entwickelunsgverfahren völlig das Hauber'sche ist, und kann sich kaum des Gedankens entschlagen, dieser Gelehrte habe die Methode von Lagrange einfach antikisirt. Die ganze Einkleidung jedoch und die Persönlichkeit eines so bewährten Mannes bürgen wohl für das Eigenthumsrecht Hauber's, und so bleibt nur übrig, ein sonderbares Zusammentreffen anzunehmen. Daran freilich vermögen wir nicht zu glauben, dass Archimedes seine Näherungswerthe wirklich auf diesem Wege gefunden und jede Mittheilung einer so hervorragenden Erfindung unterdrückt haben sollte, da er doch alle arithmetischen Kunstgriffe, die ihm z. B. bei seinen Untersuchungen über die Schneckenlinie gedient haben, uns nicht vorenthält. Die für die ganze Entwickelung grundlegende Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

wäre freilich dem X. Buche der euklidischen Elemente zu entnehmen gewesen 221), allein wie soll man erklären, dass die Kenntniss dieser bequemen Umformung mit Archimedes verloren gegangen und erst durch die Araber (Kap. I, §. 15) wieder aufgenommen worden wäre? Wir werden übrigens noch später einmal auf die Lagrange'sche Behandlung der Quadratwurzel in Verbindung mit einem anderen geschichtlichen Momente zurückzukommen haben.

§. 10. *Die Methode von Commandin und die erste Methode von Buzengeiger.* Bereits im XVI. Jahrhundert hatte Federigo Commandino, der bekannte Uebersetzer und Bearbeiter alter mathematischer Werke, in seinem Commentar zum Archimedes eine Construktion angegeben 222), mittelst deren die Quadratwurzeln decimaler Zahlen leichter uud bequemer zu finden sein sollte, als durch die allerdings ähnliche Construktion des Theon, welch' letzterer nur die Bedürfnisse der „Astrologen" — besser gesagt, des Sexagesimalcalculs — berücksichtige. Diese Zeichnung nun hat Buzengeiger 223) in algebraische Formeln umgesetzt, und so kann man wohl mit Grund von einer Commandin-Buzengeiger'schen Methode reden. Da jedoch in dem zuletzt genannten Aufsatze auch noch ein anderes Verfahren zur Ableitung der archimedischen Resultate in Vorschlag gebracht wird, so haben wir für die Titelaufschrift dieses Paragraphen eine dem entsprechende Form gewählt.

*ABCD* (Fig. 10) sei ein rationales Quadrat, dessen Seite es annähernd in rationalen Zahlen zu ermitteln gelte. Von den beiden ebenfalls

rationalen Quadraten $AEFG$ und $AHJK$, deren Seiten man willkürlich — natürlich möglichst nahe an $AB$ — nehmen kann, sei das erstere kleiner, das andere grösser als das ursprüngliche Quadrat. Jetzt kommt es darauf an, ein neues Quadrat von rationaler Seite $x$ so zu construiren, dass

$$\square\, AEFG < x^2 < \square\, ABCD$$

werde, denn wenn die Verzeichnung eines solchen Einmal gelungen ist, so kann der damit gegebene Annäherungswerth offenbar beliebig weit getrieben werden. Buzengeiger macht auf der über $G$ verlängerten $FG$ eine Strecke $GL = FG$ und vervollständigt das Rechteck $LL'CC'$, dann ist

$$\text{Rechteck } LL'CC' = \text{Gnomon } FEBCDG = \square\, ABCD - \square\, AEFG.$$

$FC'$ wird nun verlängert, bis es die Quadratseite $JH$ in $N$ trifft, und nun an die Strecke $LN$ ein Rechteck so angestreckt, dass

$$\text{Rechteck } LNN'L'' = \text{Rechteck } LL'CC'$$

wird. $NN' = C''C'$ muss mithin $< (CC' = DG)$ sein, und der Punkt $F'$, in welchem $L''N'$ die Diagonale trifft, muss zwischen $F$ und $C$ zu liegen kommen. Das entsprechende Quadrat $AE'F'G'$ kann also für das gesuchte Quadrat $x^2$ gelten.

Wird $\square\, ABCD$ schlechtweg mit $A$, Seite $AE$ mit $a$, Seite $AH$ mit $\alpha$ bezeichnet, so ist Rechteck $LL'CC'$ = Gnomon $FEBCDG = A - a^2$, Rechteck $LNN'L''$ nach Construktion gleich $(a + \alpha)\, NN'$, sonach

$$NN' = \frac{A - a^2}{a + \alpha}.$$

Jetzt ist $AE' = a + EE' = a + NN'$ leicht zu finden; man bekommt nämlich

$$AE' = a' = a + \frac{A - a^2}{a + \alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{a + \alpha}.$$

Denkt man sich jetzt vom Quadrate $AE'F'G'$, wie vorhin vom Quadrate $AEFG$, ausgegangen und eine neue Quadratseite $a'' > a'$, jedoch $< \sqrt{A}$, ermittelt, so muss sein

$$a'' = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{a' + \alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{\alpha + a'} = \alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{\alpha + a}}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man den $n$ten Näherungswerth durch den Kettenbruch

$$\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cdots - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{\alpha + a}}}}.$$

Für $A = 3,\ a = 1,\ \alpha = 2$ wird

$$a' = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3},\quad a'' = 2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{3}} = 2 - \frac{3}{11} = \frac{19}{11},$$

$$a''' = 2 - \frac{1}{4 - \frac{3}{11}} = 2 - \frac{11}{41} = \frac{71}{41},\quad a^{(IV)} = 2 - \frac{1}{4 - \frac{11}{41}} = \frac{265}{153}.$$

Dass diess so sein muss, leuchtet ein, da ja die Methode nur äusserlich, nicht aber dem Wesen nach von der gewöhnlichen Entwickelung in einen eingliedrig-periodischen Kettenbruch abweicht. In Folge dessen trifft die Berechnung der Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ in erwünschtester Weise zu, nicht so jedoch z. B. die Berechnung jener von $\sqrt{349450}$. Hier ist $A = 349450$, $a = 591$, $\alpha = 592$ und somit

$$a' = 592 - \frac{1014}{1183} = 591 + \frac{169}{1183},$$

und diess ist genau $591\frac{1}{7}$, während doch (Kap. I, §. 2) Archimedes $591\frac{1}{8}$ angiebt.*) Die Gründe aber, mit welchen Buzengeiger die Wahl des Ersteren rechtfertigen zu können vermeint, sind durchaus nicht sehr triftiger Natur.

§. 11. *Die zweite Methode von Buzengeiger und deren Vorgeschichte.* Buzengeiger begnügt sich übrigens nicht mit der vorstehend geschilderten Methode, deren Grundgedanken er, wie wir wissen, von Commandin entlehnt hat, sondern entwickelt aus ihr heraus auch noch eine zweite, welche sich durch eine ungleich raschere Convergenz auszeichnet. Vorhin wurden dem gegebenen Quadrate lauter kleinere Quadrate einbeschrieben, die Näherungswerthe mussten folglich ausnahmslos zu klein ausfallen. Will man dagegen ein Quadrat von rationaler Seite $> \square\, ABCD$ (Fig. 11) construiren, so zeichnet man wieder zunächst das kleinere Quadrat $AEFG = a^2$, macht $GL = FG$ und

$$\text{Rechteck } LC = A - a^2.$$

Nun werde Rechteck $LM$ = Rechteck $LC$ gemacht; die der $LF$ gegenüberliegende Seite schneidet die verlängerte Diagonale $AC$ in $J$, und es ist jetzt

$$\square\, AKJH > \square\, ABCD.$$

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass, sobald nur $a = 1 + \alpha$ genommen wird, der zweite Näherungswerth bei Buzengeiger mit dem von Alkarkhî und Al-Moruzi (Kap. I, §. 15) angegebenen zusammentrifft. Es ist ja

$$\alpha' = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{\alpha + a} = \alpha - \frac{\alpha^2 - a^2 - \beta}{2\alpha + 1} = \alpha + \frac{\beta}{2\alpha + 1},$$

wenn $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta}$ vorausgesetzt war.

Bezeichnet man die Seite des grösseren Quadrates mit $\alpha$, so ist 224)

$$\alpha = a + \frac{A - a^2}{2a} = \frac{A + a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right).$$

Nun hindert aber gar nichts, aus $\alpha$ eine neue Annäherung $\alpha'$ ganz ebenso herzuleiten, wie $\alpha$ selbst aus $a$ hergeleitet ward, ebenso dann aus $\alpha'$ ein neues $\alpha''$, u. s. f. Der ganze Process wird dann durch folgende Reihe von Gleichungen dargestellt:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),\ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right),\ \alpha'' = \frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{A}{\alpha'}\right), \alpha''' = \frac{1}{2}\left(\alpha'' + \frac{A}{\alpha''}\right) \cdots$$

Dieses Verfahren verhilft uns, in richtiger Weise angewendet, zu den archimedischen Näherungswerthen in einer dem ersten Anscheine nach geradezu überraschenden Weise. Nehmen wir nämlich*) $a = \frac{5}{3}$, so ergiebt sich sofort

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right) = \frac{26}{15},\ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780}.$$

Wollte man also annehmen, dem Archimedes sei die Näherung $\frac{26}{15} \sim \frac{265}{153}$ bekannt und bewusst gewesen, so hätte man allerdings mittelst der zweiten Buzengeiger'schen Näherungsmethode die charakteristischen Zahlen Archimed's mit Einem Schlage erhalten. Allein dem gegenüber muss eben immer wieder daran erinnert werden, dass die Zahl $\frac{26}{15}$, so naheliegend sie ist, wohl bei Heron und bei anderen alten Schriftstellern, nicht jedoch in der *κύκλου μέτρησις* selbst vorkommt. Immerhin ist es der Mühe werth, festzustellen, dass diese Methode wohl die einzige ist, welche die sonst nur allmählich zu berechnende Zahl $\frac{1351}{780}$ leicht und sicher liefert, mit Ausschluss aller jener minder genauen Näherungswerthe, für deren Nichtbenützung Seitens des Archimedes wir bislang einen voll und ganz befriedigenden Grund nicht ausfindig zu machen im Stande gewesen sind.

Auf die archimedischen Näherungszahlen hat Buzengeiger wohl zuerst dieses überaus schnell zum Ziele führende Verfahren angewandt, und es ist

---

*) Buzengeiger ist der Ansicht, man müsse von $\frac{26}{15}$ ausgehen, um $\frac{1351}{780}$ zu finden; er übersieht, dass $\frac{26}{15}$ ganz ebenso aus $\frac{5}{3}$, dem zweiten Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, der kleiner als die Wurzel selbst ist, hervorgeht. Die wahre Ursache dieses Sachverhaltes, über welchen der Erfinder sich selbst nicht genügend klar geworden, wird uns demnächst offenbar werden, wenn wir die beiden von jenem angegebenen Verfahrungsweisen unter einander vergleichen.

auch nicht daran zu zweifeln, dass seine geometrische Analysis ihm das Verdienst eigener Erfindung desselben sichert. Allein neu war dasselbe schon zu seiner Zeit keineswegs, vielmehr war dasselbe schon dreihundert Jahre vor ihm nicht nur Einzelnen, sondern einer ganzen grossen Gruppe von Mathematikern auf's Genaueste bekannt. Wir würden uns an und für sich nicht berechtigt glauben, dieser älteren Geschichte der Buzengeiger'schen Methode einen eigenen Exkurs zu widmen, wenn uns nicht zwei Gründe hiezu bestimmten. Wir wollen nämlich einmal unseren Beitrag dazu leisten, dass eine so wichtige und einfache Theorie des Quadratwurzelausziehens einen bestimmten Platz in der Wissenschaft einnehme, wie er ihr gebührt, und dann ist diese Darlegung früherer Bemühungen um das gleiche Ziel nothwendig, um den Inhalt des folgenden Paragraphen richtig würdigen zu können.

Libri hat geglaubt 225), die erste Anwendung des abgekürzten Verfahrens bei dem um die Wende des XVI. Jahrhunderts blühenden Bologneser Professor Cataldi nachweisen zu können. Dem gegenüber fragte schon im Jahre 1861 Fürst Balthasar Boncompagni bei dem durch seine tiefe Kenntniss der mathematischen Geschichte damals schon berühmten Woepcke an, ob nicht einige Andeutungen, welche in einer Handschrift der vatikanischen Bibliothek über eine gewisse Art, die Quadratwurzel auszuziehen, gegeben werden, auf genau dieselbe Methode Bezug hätten, und ob nicht eben diese auch in dem bekannten arithmetischen Hauptwerke des Luca Pacioli gelehrt werde. Woepcke antwortete auf beide Fragen im zustimmenden Sinne; sein Bescheid blieb jedoch unveröffentlicht, und erst auf eine dem Jahre 1874 entstammende Anregung hin veröffentlichte Fürst Boncompagni seine mit Woepcke geführte Correspondenz 226). Die betreffende Stelle des Vatikana-Manuskriptes ist daselbst faksimilirt zu finden. Pacioli berechnet am fraglichen Orte, wie deutsche Leser am Besten in Kästner's Geschichtswerk 227) finden können, $\sqrt{6}$ nach diesem Modus; die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe sind

$$2,\ 2\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{12}{5}\right)=2\frac{9}{20},\ \frac{1}{2}\left(\frac{49}{20}+\frac{120}{49}\right)=\frac{4801}{1960}=2+\frac{881}{1960}.$$

Schon dieses eine Beispiel lässt die vollständige Einerleiheit der Methoden von Bruder Lucas und Buzengeiger erkennen.

Die weitere Verfolgung derselben bei den italienischen Rechenmeistern und Algebraikern des XVI. Jahrhunderts hat sich Favaro zur Aufgabe gemacht und ist derselben auch mit Erfolg gerecht geworden. Wir folgen in unserer Erzählung der Hauptsache nach den von ihm gegebenen Aufschlüssen. Im Jahre 1536 berechnet 228) auf diese Weise der Florentiner

Ghaligai $\sqrt{24}$, allerdings insoferne mit einer kleinen Aenderung, als er, um $\sqrt{5^2 - 1}$ zu finden, die Näherungswerthe

$$5,\ 5 - \frac{1}{10} = 4\frac{9}{10},\ \frac{1}{2}\left(\frac{49}{10} - \frac{240}{49}\right) + 4 = 4 + \frac{1}{980}$$

bildet. Weiter sind hier zu nennen Franzisco di Lazisio 229), Verfasser eines Lehrbuches der Arithmetik und Geometrie, der berühmte Cardan 230), auf dessen Arbeiten über Quadratwurzelausziehung indess bereits früher von Cantor 231) hingewiesen worden war, dessen grosser Nebenbuhler Tartaglia 232), welcher dem Verfahren in seiner „Regola di saper sempre approssimarsi più nelle radici sorde" eine für jene Zeit musterhafte wissenschaftliche Fassung ertheilte, endlich Giuseppe Unicorno, gest. 1610, dessen 1598 zu Venedig herausgekommenes Werk „Aritmetica universale" den Bibliographen durchweg entgangen ist, jedoch schon wegen der darin ebenfalls enthaltenen Methode von Pacioli einige Beachtung verdient 233).

Ganz unbeeinflusst weder von den italienischen Vorläufern noch auch von der Buzengeiger'schen Nacherfindung hat in neuerer Zeit wieder J. Bertrand dieses Approximationsverfahren in den Vordergrund gerückt 234), und da der geschichtliche Hergang so gänzlich in den Hintergrund getreten war, so hatte man sich geradezu gewöhnt, von dem Bertrand'schen Verfahren zu sprechen. Jedenfalls hat der französische Mathematiker das Verdienst, uns die wissenschaftliche Bedeutung des vollständig in Vergessenheit gerathenen Verfahrens wieder näher gebracht zu haben. Den eigentlichen Charakter desselben als einer gewaltig abgekürzten und eben deshalb praktisch äusserst werthvollen Kettenbruchentwickelung scheint allerdings Bertrand nicht erkannt zu haben. Die Untersuchung dieses Verhältnisses wird uns im übernächsten Paragraphen eingehend beschäftigen, nachdem wir zunächst die grundsätzliche Identität gewisser gleich näher zu besprechender Methoden mit jener Pacioli's und Buzengeiger's festgestellt haben werden.

§. 12. *Die Methoden von Oppermann und Alexejeff.* Ueber die erstere aus eigener Anschauung Bericht zu erstatten sind wir leider nicht vermögend, da der ihr gewidmete Aufsatz in einer uns nicht zugänglichen dänischen Zeitschrift enthalten ist 235). Glücklicherweise aber hat Heiberg 236) einen bei aller Kürze doch klaren und die wesentlichen Punkte hervorhebenden Auszug aus jenem Aufsatz gegeben, den wir seinem ganzen Wortlaute nach hier folgen lassen: „Notum est, duorum numerorum medietatem geometricam eandem geometricam esse medietatem medietatis eorum arithmeticae et medietatis harmonicae:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} : \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\beta} : \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Itaque si inter duos numeros medietates arithmeticam et harmonicam, inter eas rursus easdem earum medietates interposuerimus eodemque modo semper progressi erimus, magis magisque geometricae illorum numerorum medietati adpropinquabimus. Sint numeri 1 et 3 sumpti; itaque hac ratione quater usi, has fractiones reperiemus:

$$\frac{2}{1} > \sqrt{3} > \frac{3}{2}, \frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{12}{7}, \frac{97}{56} > \sqrt{3} > \frac{168}{97}, \frac{19817}{10864} > \sqrt{3} > \frac{32592}{19817}.$$

$\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ duabus prioribus rationibus inventum est; etiam $\frac{97}{56} > \sqrt{3}$. Adparet ex fractionibus tertio loco positis erui posse minorem illum Archimedis terminum; nam $168 + 97 = 265$, $97 + 56 = 153$. Sed offendit, quod hac ratione ad ipsas illas fractiones ab Archimede sumptas non pervenitur."

Heiberg betont selbst die Bedenken, welche der Anerkennung dieser Rechnungsweise als einer ächt archimedischen entgegenstehen. Bemerkenswerth ist allerdings, dass ganz von selbst der von Gerbert (Kap. I, §. 11) gebrauchte Näherungswerth sich ergiebt, allein zur Gewinnung von $\frac{265}{153}$ muss Oppermann von dem Satze ausgehen, dass die Näherungswerthe $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ den Bruch

$$\frac{a+c}{b+d}$$

als neuen Näherungswerth aus sich hervorgehen lassen, und diese mit Bewusstsein erst von Etienne de la Roche (vgl. §. 4) erkannte Wahrheit bereits in die vorchristliche Zeit verlegen zu wollen, erschiene uns allzu gewagt.*)

*) Anhangsweise möge zu der Oppermann'schen Methode bemerkt werden, dass dieselbe von einem anderen dänischen Mathematiker, Steen, zum Ausgangspunkt für eine selbstständige Bearbeitung des Gegenstandes genommen worden ist 237). Die Berechnung von $\sqrt{3}$, welche Steen giebt, ist allerdings nur eine verklausulirte Kettenbruchentwickelung, dagegen scheint sich ein anderer einfacher Gedanke, der daselbst Ausdruck findet, gerade für einige archimedische Quadratwurzeln sehr wohl zu empfehlen. Ist nämlich $A$ eine sehr grosse Zahl, so führt das Anschreiben einer oder der anderen der beiden gesetzmässig fortschreitenden Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} a > \sqrt{A} > a - 1, & a > \sqrt{A} > a - 1, \\ \frac{2a}{2} > \sqrt{A} > \frac{2a-1}{2}, & \frac{2a-1}{2} > \sqrt{A} > \frac{2a-2}{2}, \\ \frac{4a}{4} > \sqrt{A} > \frac{4a-1}{4}, & \frac{4a-2}{4} > \sqrt{A} > \frac{4a-3}{4} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Vor wenigen Jahren veröffentlichte der Russe Alexejeff, ohne von seinen Vorgängern Kenntniss zu haben, eine Abhandlung 238), deren wesentlicher Inhalt in einer gewissen Verallgemeinerung des Oppermann'schen Verfahrens besteht. Er zerlegt die Zahl $A$, aus welcher die zweite Wurzel gezogen werden soll, in das Produkt der Theiler $a_0$ und $b_0$ $(b_0 < \sqrt{A} < a_0)$ und setzt alsdann (s. o.)

$$\frac{2A}{a_0 + b_0} < \sqrt{A} < \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Wird dann $\frac{a_0 + b_0}{2} = a_1$, $\frac{2A}{a_0 + b_0} = b_1$ gesetzt, so ist wiederum

$$\frac{2A}{a_1 + b_1} < \sqrt{A} < \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Ist allgemein $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n$, $\frac{2A}{a_{n-1} + b_{n-1}} = b_n$, so gelangt man endlich zu

$$\frac{2A}{a_n + b_n} < \sqrt{A} < \frac{a_n + b_n}{2},$$

und da

$$b_0 < b_1 < b_2 \cdots < b_{n-1} < b_n < \sqrt{A} < a_n < a_{n-1} \cdots < a_2 < a_1 < a_0$$

ist, so lässt sich ersichtlich die Annäherung bis zu jeder willkürlichen Grenze treiben. Um $a_n$ zu bestimmen, hat man die rekurrente Beziehung*)

$$a_n = \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} + \frac{A Q'_{n-1}}{P'_{n-1}}\right) = \frac{P'^2_{n-1} + A Q'^2_{n-1}}{2 P'_{n-1} Q'_{n-1}}.$$

---

sehr bald zu brauchbaren Näherungswerthen. So z. B. bekommen wir für zwei der in der „Kreismessung“ vorkommenden Irrationalitäten (Kap. I, §. 2) dieses Schema:

$$3014 > \sqrt{9082321} > 3013, \qquad 2340 > \sqrt{5472132\frac{1}{16}} > 2339,$$

$$\frac{6028}{2} > \sqrt{9082321} > \frac{6027}{2}, \qquad \frac{4679}{2} > \sqrt{5472132\frac{1}{16}} > \frac{4678}{2},$$

$$\frac{12056}{2} > \sqrt{9082321} > \frac{12055}{4}. \qquad \frac{9358}{4} > \sqrt{5472132\frac{1}{16}} > \frac{9357}{4}.$$

$\frac{12055}{4} = 3013\frac{3}{4}$ und $\frac{9357}{4} = 2339\frac{1}{4}$ sind nun aber auch wirklich die Werthe, welche Archimedes für die fraglichen Quadratwurzeln angiebt.

*) Da wir bisher und auch im folgenden Paragraphen die Näherungswerthe des eingliedrig periodischen Kettenbruches mit $P_n : Q_n$ bezeichnen, so wurden zum Unterschiede die von Alexejeff eingeführten Zeichen durch Akute charakterisirt.

Dieser Bruch ist, wie aus dem Hergang ohne Weiteres zu schliessen ist, ein irreducibler, und man darf sonach

$$P'_n = P'^2_{n-1} + AQ'^2_{n-1},$$
$$Q'_n = 2P'_{n-1}Q'_{n-1}$$

setzen. Im Falle, dass $A$ eine Primzahl ist, muss $b = 1$, $a = A$ gesetzt werden, und es treten sonach gewisse Vereinfachungen in den obigen Formeln ein.

Soll nun für's Erste die Frage beantwortet werden, ob diese Art der Einschliessung in Grenzen wohl bis auf Archimedes selbst zurückgeführt werden dürfe, so ist allerdings zuzugeben, dass bei Jamblichos die analytische Gleichung

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

vorkommt 239), welche die Basis der Methode bildet. Allein, wie schon erwähnt, liegt ein grosses Hinderniss in dem Umstande, dass gerade für $\sqrt{3}$ die archimedischen Zahlen gar nicht oder doch nur mit Hülfe eines Kunstgriffes zu erhalten sind.*)

---

*) Auf diesen Uebelstand hat später Ch. Henry hingewiesen, der auch zuerst der Alexejeff'schen Methode den Charakter der Neuheit abgesprochen und sonst mehrere geschichtliche Notizen über dieselbe beigebracht hat, welche umstehend ihre Verwerthung fanden 240). Sein Vorschlag, diesem Mangel abzuhelfen, will uns jedoch nicht recht einleuchten. Er sagt nämlich 241): „Posons $3 = 3 . 1$. La moyenne arithmétique ou la médiation de ces nombres est 2, la moyenne harmonique $\frac{3}{2}$. La médiation de cette médiation et de cette moyenne est $\frac{5}{3}$, la moyenne harmonique $\frac{9}{5}$." Auf diese Weise gelangt er durch fortgesetzte Medietäten-Bildung zu $\frac{26}{15}$ und $\frac{1351}{780}$. Allein unserer Rechnung nach ist das arithmetische Mittel von 2 und $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$, das harmonische Mittel $\frac{2 . 2 . \frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{12}{7}$. Es muss also wohl angenommen werden, Henry habe, um das gewünschte Ziel zu erreichen, an den ersten Mittelwerthen gewisse Aenderungen angebracht, und da über diese keine Rechenschaft gegeben wird, so verliert auch das Schlussergebniss an Gewicht. Henry zeigt (a. a. O.) auch, wie man durch eine einfache Construktion sich von dem Satze $M_a > M_g > M_h$ überzeugen könne, und weist auf eine andere Art der Verwendung von $M_h$ bei gewissen den Griechen nicht unbekannten Näherungsrechnungen hin. Bei der Anfertigung seiner Sehnentafel habe Hipparch es sicher nicht vermeiden können, zwischen zwei gegebene Werthe einen dritten Werth einzuschalten. Darf man annehmen, dass das Stück der zwischen

§. 13. *Vergleichung der Oppermann'schen Methode mit den Kettenbrüchen.* Es liegt uns nunmehr die am Schlusse von §. 11 übernommene Verpflichtung ob, die im vorigen Paragraphen ihrem Wesen nach vorgeführten Methoden auf ihre wahre Natur zu prüfen und insbesondere ihren innigen Zusammenhang mit der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung, sowie ihre vollständige Identität mit der von uns so genannten zweiten Methode von Buzengeiger nachzuweisen. Um diesen beiden Pflichten zu genügen, knüpfen wir am besten an den von Alexejeff für $a_n$ gegebenen independenten Ausdruck an.

Die ohne Beweis aufgestellten Formeln sind 242):

$$P'_n = \frac{(\sqrt{a_0}+\sqrt{b_0})^{2^n}+(\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0})^{2^n}}{2},$$

$$Q'_n = \frac{(\sqrt{a_0}+\sqrt{b_0})^{2^n}+(\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0})^{2^n}}{2\sqrt{A}}.$$

Der Beweis ist leicht zu führen, denn aus den obigen Rekursionsformeln kann man sofort entnehmen, es müsse

$$P'_n = \frac{x^{2^n}+y^{2^n}}{2}, \quad Q'_n = \frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{2\sqrt{A}}$$

sein, denn nur unter dieser Voraussetzung wird, wie es sein muss,

$$P'^2_n + A Q'^2_n = \frac{x^{2^{n+1}}+2x^{2^n}y^{2^n}+y^{2^{n+1}}+x^{2^{n+1}}-2x^{2^n}y^{2^n}+y^{2^{n+1}}}{4}$$

$$= \frac{x^{2^{n+1}}+y^{2^{n+1}}}{2} = P'_{n+1},$$

$$2P'_n Q'_n = \frac{x^{2^{n+1}}-y^{2^{n+1}}}{2\sqrt{A}} = Q'_{n+1}.$$

---

dem Werthe $a$ und dem Werthe $b$ verlaufenden Argumentcurve in dem betreffenden Intervalle durch eine gerade Linie ersetzt werden dürfe, so ist die Interpolationsformel bekanntlich diese:

$$\frac{a-h}{h-b} = \frac{a}{b},$$

und daraus fliesst

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Das Alles muss unbedenklich zugestanden werden, allein die Idee, die durch einen ersten Annäherungsprocess erhaltenen Glieder zur Grundlage für einen zweiten mehr convergirenden Process zu nehmen, will uns auch nach Henry's Ausführungen für einen griechischen Geometer nicht anders denn als zu modern erscheinen.

Zur Bestimmung von $x$ und $y$ haben wir nur $n = 0$ zu setzen, wodurch $P'_0$ in $\sqrt{a_0}$, $Q'_0$ in $\sqrt{b_0}$ übergeht; es ist also

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{a_0}, \quad \frac{x-y}{2} = \sqrt{b_0}$$

und hieraus

$$x = \sqrt{a_0} + \sqrt{b_0}, \quad y = \sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}.$$

Suchen wir nun darzuthun, dass auch die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}} \equiv a + K$$

auf ganz dieselbe Formel führt. Wir haben gesehen, dass die Auffassung der Grössen $a_0$ und $b_0$ als ganzzahliger Theiler von $A$ für die Methode in keiner Weise auszeichnend ist; vielmehr setzt diese lediglich die Ungleichungen

$$b_0 < \sqrt{A} < a_0$$

voraus, denn dass auch die Gleichheit im letzteren Falle nicht ausgeschlossen sein kann, erhellt, da ja $A$ auch eine Primzahl sein darf. Es hindert uns also nichts, wenn $\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b}$ angenommen wird,

$$b_0 = a^2, \quad a_0 = a^2 + b$$

zu setzen, und die Alexejeff'sche Formel nimmt alsdann folgende Gestalt an:

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \sqrt{a^2+b} \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2^n} + (a-\sqrt{a^2+b})^{2^n}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2^n} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2^n}}.$$

Nun besagt aber die bekannte Stern'sche Formel, dass, wenn wir für den Kettenbruch $K$ allein (ohne den Summanden $a$) den $(m-1)$ten Näherungswerth $P''_{m-1} : Q''_{m-1}$ berechnen, Nachstehendes erhalten wird:

$$\frac{P''_{m-1}}{Q''_{m-1}} = b \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{m-1} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m-1}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}.$$

Addiren wir auf beiden Seiten die Grösse $a$, so geht die linke in den uns bereits bekannten Werth $P_m : Q_m$ über, und wir können nach einer einfachen Transformation

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{a^2+b} \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} + (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}$$

setzen. Vergleichen wir jetzt beide Ergebnisse, so findet sich

$$\frac{P_{2^n}}{Q_{2^n}} = \frac{P'_n}{Q'_n},$$

oder in Worten: Der $n$te Näherungswerth des Alexejeff'schen Verfahrens

ist dem $2^n$ten Näherungswerth der Kettenbruchentwickelung gleich. Damit ist der erste Theil der übernommenen Aufgabe erledigt.

Nicht minder einfach wird diess auch mit deren zweitem Theile der Fall sein. Nach Buzengeiger (§. 11) besteht, wenn $\alpha^{(p)}$ den $(p+1)$ten Näherungswerth seines Verfahrens bezeichnet, für dieses $\alpha^{(p)}$ die Bedingungsgleichung

$$\alpha^{(p)} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{(p-1)} + \frac{a^2+b}{\alpha^{(p-1)}}\right).$$

Gesetzt nun, es bestände eine gewisse Relation zwischen den Näherungswerthen beider Methoden, es sei etwa

$$\alpha^{(p)} = \sqrt{a^2+b}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q};$$

dann müsste sein

$$\alpha^{(p+1)} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+b}\,\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q}\right.$$
$$\left.+\frac{a^2+b}{\sqrt{a^2+b}}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}\right]$$

oder ausgerechnet

$$\alpha^{(p+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}$$
$$\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} + 2(-b)^q + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q} + (a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - 2(-b)^q + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}.$$

Vereinfachen wir hier entsprechend, so ergiebt sich endlich

$$\alpha^{(p+1)} = \sqrt{a^2+b}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}.$$

Es ist aber, wie wir wissen, $\alpha \equiv \alpha^0 = a = P_1 : Q_1$, $\alpha' = a + \frac{b}{2a}$ $= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+b}{a}\right) = P_2 : Q_2$, somit nach der zuletzt erhaltenen Formel auch

$$\alpha'' = \frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_2{}^2}{Q_2{}^2},$$
$$\alpha''' = \frac{P_8}{Q_8} = \frac{P_2{}^3}{Q_2{}^3},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\alpha^{(n)} = \frac{P_{2^n}}{Q_{2^n}} = \frac{P_n'}{Q_n'}.$$

Der $(n+1)$te Näherungswerth der zweiten Methode von Buzengeiger deckt sich mit dem $n$ten Näherungswerth der Methode von Oppermann-Alexejeff.

Um dieses Ergebniss passend einzukleiden, greift man am Besten auf eine vom Verf. schon früher vorgeschlagene Terminologie zurück. Einer zuerst von Seidel 243) gegebenen Anregung folgend stellten wir damals 244) die folgende Definition auf: „Ist eine gewisse endliche Grösse durch Ausdrücke gegeben, welche ein unendlich fortgesetztes Wiederholen einer gewissen Operation erfordern (Reihe, Faktorenfolge, Kettenbruch, Potenz), und stehen diese Ausdrücke in einer solchen gegenseitigen Relation, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre $p$ten Näherungswerthe einander gleich sind, so nennen wir solche Ausdrücke äquivalent.“ In diese Kategorie der einfachen Aequivalenz gehört z. B. die Gleichheit eines aufsteigenden mit dem aus ihm entwickelten absteigenden Kettenbruch, wenn nämlich

$$\cfrac{b_1+\cfrac{b_2+\cdots+\cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}=\frac{b_1}{a_1}-\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1+b_2-\cfrac{a_3 b_2 b_4}{a_4 b_3+b_4-\cdots-\cfrac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1}+b_n}}}$$

gesetzt wird. Schon bei jener Veranlassung ward es jedoch als wünschenswerth betrachtet, die obige Definition zu verallgemeinern und zwar im folgenden Sinne 245): „Zwei unendliche Ausdrücke (diess Wort im Sinne Euler's genommen) haben eine $m-n$fache Aequivalenz, wenn der $m$te Näherungswerth der einen dem $n$ten des anderen gleich ist. Für $m=n$ ist diese Aequivalenz die früher definirte einfache.“ Wir werden weiter unten (§. 16) die Vortheile dieser Bezeichnung auch noch an einem anderen Falle constatiren können. Für jetzt genügt es uns zu sagen:

Die Aequivalenz zwischen dem gewöhnlichen Kettenbruchverfahren und jenem von Oppermann-Alexejeff-Buzengeiger ist eine $n-2^{n-1}$fache; jene drei Methoden selbst aber stehen unter sich nicht nur in dem Verhältniss einfacher Aequivalenz, sondern sind überhaupt, von der äusseren Einkleidungsform abgesehen, identisch.

Es übrigt noch, einen Blick auf die kleine Geschichte zu werfen, welche diese Erkenntniss einer $n-2^{n-1}$fachen Aequivalenz ebenso hat, wie andere wichtigere Entdeckungen. Zuerst scheint den wahren Sachverhalt Serret 246) wahrgenommen zu haben, allein seine gelegentliche Bemerkung hatte keine weiteren Folgen, und erst Henry hat (s. o.) wieder daran erinnert. Als dann Fürst Boncompagni, wie wir erfuhren, auf die Aequivalenz der Methoden von Pacioli und Cataldi aufmerksam wurde, legte er den Mathematikern eine auf den Nachweis dieser Aequivalenz abzielende Frage vor 247). Dieselbe ward gelöst von Moret-Blanc 248) und dem Verf.

dieses 249), von Ersterem mittelst des Hülfssatzes, dass aus $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ die Gleichheiten $a = c$ und $b = d$ folgen, von Letzterem mittelst direkter Vergleichung der independenten Ausdrücke, wie es auch oben geschehen ist.

§. 14. *Die erste Methode von P. Tannery und die Pell'sche Gleichung.* In neuester Zeit ist die Frage, wie wohl Archimedes zu seinen bekannten rationalen Näherungswerthen gelangt sein könne, gewiss am Vielseitigsten und Gründlichsten von Paul Tannery studirt worden 250). Es kommen jedoch dabei zwei verschiedene Auffassungen zur Geltung, die allerdings doch unter sich nahe zusammenhängen. Die äusserlich erste dieser beiden Auffassungen kann unserem Plane gemäss erst im nächsten Kapitel zur Sprache kommen, die andere dagegen, welche auch für die erstere maassgebend ist, und welche wir uns deshalb auch als Tannery's erste Methode zu bezeichnen erlaubten, fällt in den Bereich dieser Abtheilung. Nicht als ob Tannery der Ansicht huldigte, Archimedes habe mit Kettenbrüchen gerechnet. Aber seine durch manche gute Gründe gestützte Hypothese geht dahin, der grosse griechische Geometer habe sich zur Auffindung der Näherungswerthe einer Quadratwurzel in der Weise gestellt, dass er die ganzzahligen, resp. rationalen Auflösungen einer unbestimmten quadratischen Gleichung aufsuchte, jener Gleichung nämlich, die heute allgemein in der Wissenschaft den unter dem geschichtlichen Gesichtspunkt freilich ganz sinnlosen Namen der Pell'schen Gleichung führt. Und da für uns in der Gegenwart die Lösung dieser Gleichung nur als ein einfaches Problem der Kettenbruchlehre erscheint, so glaubten wir, dem Verfahren von Tannery eben den dafür gewählten Platz anweisen zu müssen.

Einen ähnlichen Gedanken, wie sein Landsmann, hat, wie wir uns erinnern, auch De Lagny (§. 6) ausgesprochen, allein er hat sich begnügt, auf $\sqrt{3}$ einen einfachen Kettenbruch-Algorithmus anzuwenden. Tannery verfährt consequenter. Sein Grundgedanke ist folgender: Archimedes kannte ein unserer modernen Methode ganz ähnliches Extraktionsverfahren — von ihm wird eben im nächsten Kapitel mehr die Rede sein —, um sich zunächst einen brauchbaren Näherungswerth der vorgelegten Quadratwurzel zu verschaffen. In den meisten Fällen blieb er bei dieser ersten Annäherung stehen; bei $\sqrt{3}$ genügte ihm dieselbe jedoch nicht, vielmehr bediente er sich jenes Verfahrens in diesem Falle nur, um eine erste Lösung der beiden Gleichungen

$$p^2 - 3q^2 = 1,$$
$$p^2 - 3q^2 = -2$$

zu bekommen, und nun verfügte er über eine neue, selbstständige, Methode,

welche ihm zu diesen ersten Lösungen eine beliebige Vielzahl weiterer Lösungen hinzuzufinden lehrte, wodurch er also Näherungswerthe von grösserer Genauigkeit erhielt 251).

Auch dieser zweite Theil der Arbeit, welche man als von Archimedes geleistet annehmen muss, lässt eine doppelte Deutung zu. Tannery weist nach 252), dass man durch verhältnissmässig einfache Betrachtungen zu der nämlichen cyklischen Auflösung der Pell'schen Gleichung gelangen kann, welche uns im I. Kapitel (§. 13) bei den Indern entgegengetreten ist. Er ist jedoch der Ansicht, dass sein Entwickelungsgang ungleich naturgemässer ist, als jener, welchen Hankel 253) den indischen Arithmetikern unterlegt: „mais que l'on compare,“ sagt er (a. a. O.) „la marche que je viens de suivre avec le procédé d'invention que propose le savant historien, et que l'on juge de quel côté est la simplicité et l'ordre naturel.“ Tannery fühlt allerdings ganz richtig heraus, dass sein Verfahren, $p^2 - aq^2 = 1$ in ganzen Zahlen aufzulösen, grundsätzlich mit der Darstellung

$$\sqrt{a} = E(a) - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z_1 - \cfrac{1}{z_2 - \cdots}}}$$

übereinkommt, meint aber, dieser Umstand könne nicht hinderlich sein, da er ja thatsächlich den Kettenbruch durch die Reihenentwickelung

$$\sqrt{a} = E(a) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z(zz_1 - 1)} - \cdots$$

ersetze 254). Daran ist nicht zu zweifeln, allein trotzdem veranlasst uns diese indirekte Kettenbruchmethode dazu, wenn uns die Wahl zwischen diesem und einem sofort näher zu schildernden anderen Verfahren von Tannery gelassen würde, unsere Wahl im letzteren Sinne zu treffen.

Der französische Gelehrte legt sich nämlich die Frage vor: Wie würde wohl Diophant sich bei der Auflösung der sogenannten Pell'schen Gleichung verhalten haben? Wir erwähnten bereits, dass diese Gleichung als solche in den Ἀριθμητικά eigenthümlicher Weise nicht vorkommt, allein ein so genauer Kenner dieses Werkes, wie unser Gewährsmann, weiss sich dessungeachtet aus den zahlreichen ähnlichen Gleichungen, die in jenem enthalten sind, Regeln von allgemeinerer Geltung zu verschaffen. Nach diophantischem Muster liesse sich also, wenn eine Lösung $(p, q)$ der Gleichung $p^2 - aq^2 = 1$ bekannt ist, folgendermaassen eine zweite, dritte ... finden: Man setze 255)

$$p_1 = mx - p, \quad q_1 = x + q$$

und bilde nunmehr die Gleichung

$$p_1^2 - aq_1^2 \equiv m^2x^2 - 2mpx + p^2 - ax^2 - 2aqx - aq^2 = 1.$$

Mit Berücksichtigung der zuerst gegebenen Gleichung folgt hieraus

$$x = 2 \cdot \frac{mp + aq}{m^2 - a},$$

und wird diess oben eingesetzt, so ergeben sich die neuen Werthe

$$p_1 = \frac{(m^2 + a)p + 2aq}{m^2 - a}, \quad q_1 = \frac{2mp + (m^2 - a)q}{m^2 - a},$$

und jetzt ist in der That wiederum $p_1^2 - aq_1^2 = 1$. Diese Lösungen sind zunächst blos rational; will man sie ganzzahlig haben, so hat man nur im Anschluss an zahlreiche Beispiele Diophant's

$$p_1 = (u^2 + av^2)p + 2auvq, \quad q_1 = 2puv + (u^2 + av^2)q$$

zu nehmen.

Tannery erinnert mit Recht daran, dass ja Theon (Kap. I, §. 6) einen ganz ähnlichen Weg betreffs der Gleichung $p^2 - 2q^2 = 1$ einschlug; seine Substitutionen waren

$$p_1 = p + 2q, \quad q_1 = p + q.$$

Beide Kunstgriffe, den aus Diophant entlehnten und den Theon'schen, kann man nun verallgemeinern und annehmen, zur Auflösung der Gleichung

$$p^2 - aq^2 = r$$

sei überhaupt von den Substitutionen

$$p_1 = \alpha p + \beta q, \quad q_1 = \gamma p + \delta q$$

ausgegangen worden. „Il suffit pour déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de connaitre les trois groupes de solutions les plus simples et de résoudre deux couples d'équations du premier degré à deux inconnues“ 256). Wollte man also die für uns wichtigste Gleichung $p^2 - 3q^2 = 1$ auflösen, so brauchte man nur die durch den Versuch leicht zu beschaffenden drei einfachsten Lösungen $p = 1$, $q = 0$, $p = 2$, $q = 1$, $p = 7$, $q = 4$ zu kennen und fand dann die vier Coëfficienten

$$\alpha = 2, \ \beta = 3, \ \gamma = 1, \ \delta = 2,$$

mit deren Hülfe die Herleitung aller weiteren Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ohne jede Schwierigkeit erfolgen konnte.

Wenn wir diese Darlegungen P. Tannery's lesen, glauben wir wahrlich griechische Luft uns anwehen zu fühlen. Bei dieser Art der Berechnung ist nur der einfachste, ja alltägliche Apparat zur Anwendung gebracht, dessen sich die antike Zahlentheorie in sehr vielen anderen, zu unserer Kenntniss gelangten, Fällen wirklich bediente. So können wir denn auch von der Tannery'schen Methode sagen, was wir bislang von keiner ihrer mannigfaltigen Vorläuferinnen mit gutem Gewissen zu sagen vermochten: Es ist nicht bewiesen, dass Archimedes gerade so verfuhr — denn ein

solcher Beweis lässt sich überhaupt nicht erbringen — allein es steht auch kein einziges geschichtliches Hinderniss der Annahme entgegen, die Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, welche uns in der κύκλου μέτρησις begegnet sind, seien wirklich auf die angegebene Weise, durch Auflösung einer unbestimmten Gleichung zweiten Grades, berechnet worden. —

Wir würden jedoch ein entschiedenes Unrecht begehen, wollten wir verschweigen, dass noch vor Erscheinen der Tannery'schen Abhandlung bereits von anderer Seite demselben Gedanken ein klarer Ausdruck gegeben worden war. In seiner interessanten Kritik*) der verschiedenen über die Quadratwurzeln der Alten aufgestellten Hypothesen führt Zeuthen 257) die Berechnung der Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ebenfalls auf die Lösung der Gleichungen $x^2 - 3y^2 = 1$, $x^2 - 3y^2 = -2$ zurück.

Er erinnert daran, wie man bereits vor Euklid's Zeiten die unbestimmte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ nachweisbar durch

$$x = mn,\ y = \frac{m^2 - n^2}{2},\ z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

aufzulösen verstanden habe, und meint, aus Euklid, lib. II, prop. 5 habe man leicht die Identität

$$3\,(mn)^2 + \left(\frac{m^2 - 3n^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 3n^2}{2}\right)^2$$

schöpfen können, aus welcher nach Wegschaffung der Nenner

$$3\,.\,(2mn)^2 + (m^2 - 3n^2)^2 = (m^2 + 3n^2)^2$$

erhalten werden konnte. Hatte man also eine Lösung $m^2 - 3n^2 = 1$, so brauchte man nur $x = m^2 + 3n^2$, $y = 2mn$ zu setzen, um eine zweite zu erhalten, und in dieser Weise liess sich beliebig fortfahren. War zuerst $m = 2$, $n = 1$, so ergab sich $x = 7$, $y = 4$, hieraus $x' = 7^2 + 3\,.\,4^2 = 97$, $y' = 2\,.\,7\,.\,4 = 56$, $x'' = 97^2 + 3\,.\,56^2 = 18817$, $y = 2\,.\,97\,.\,56 = 10864$ u. s. w.**)

Die zweite zu lösende Gleichung ist $x^2 - 3y^2 = -2$; sie wird von Zeuthen 258) auf die Identität

---

*) Wir haben diesem Aufsatze bereits im vorigen Paragraphen die hübsche Grenzmethode von Steen zu entnehmen gehabt.

**) Man übersieht leicht, das die Gleichung $x^2 - 3y^2 = -2$ bei Einhaltung des von Zeuthen vorgeschriebenen Ganges sämmtliche Näherungswerthe liefert, die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ dagegen nur einen Theil, darunter, soviel wir sehen können, nicht $\frac{1351}{780}$, wie es a. a. O. heisst. Die beiden Ableitungsmethoden sind also, wie man von Anfang an erwarten durfte, nicht identisch, sondern (vgl. §. 13) nur äquivalent.

$$(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2 = -2(m^2 - 3n^2)$$

zurückgeführt, wobei wiederum vorausgesetzt ist, dass man für $m^2 - 3n^2 = 1$ bereits eine Lösung in Bereitschaft habe. Sind $m$ und $n$ die betreffenden Werthe, so ist die neue Lösung durch $x = m + 3n$, $y = m + n$ gegeben. Wäre etwa $m = 2$, $n = 1$, so hätte man $x = 5$, $y = 3$, $x' = 14$, $y' = 8$, also $x' : y' = 7 : 4$, $x'' = 38$, $y'' = 22$, also $x'' : y'' = 19 : 11$, $x''' = 104$, $y''' = 60$; also $x''' : y''' = 26 : 15$, $x^{(IV)} = 284$, $y^{(IV)} = 164$, also $x^{(IV)} : y^{(IV)} = 71 : 41$, $x^{(V)} = 776$, $y^{(V)} = 448$, also $x^{(V)} : y^{(V)} = 97 : 56$, $x^{(VI)} = 2120$, $y^{(VI)} = 1224$, also $x^{(VI)} : y^{(VI)} = 265 : 153$, u. s. f. Alle uns bekannten Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ finden, wie Jedermann anerkennen muss, durch das Zeuthen'sche Verfahren ihre ganz einfache Erklärung.

Stellen wir dasselbe in Vergleich mit jenem von Tannery, so erkennen wir bei beiden den gleichen richtigen Grundgedanken und eine ziemlich analoge Durchführung desselben. Der Preis der Einfachheit und Natürlichkeit wird vielleicht der Methode des dänischen Mathematikers gebühren, dagegen kommt derjenigen Tannery's der hohe Vorzug zu, überhaupt auf jede diophantische Gleichung von der Form $x^2 - py^2 = r$ anwendbar zu sein. —

Noch ehe ihm die Schrift des französischen Forschers bekannt war, hatte sich der Verf. dieses die Behandlung der für das Theon'sche Problem grundlegenden Gleichung $2x^2 \mp 1 = y^2$ in ähnlichem Sinne zurechtgelegt gehabt; dem Drucke ist die betreffende Note 259) allerdings erst später übergeben worden. Es ist wiederum vorausgesetzt, eine möglichst einfache Lösung $x_1$, $y_1$ sei beidemale bereits bekannt. Um dann $2x^2 - 1 = y^2$ aufzulösen, konnte man

$$x + 1 = \frac{p}{q}(y + x),\ x - 1 = \frac{q}{p}(y - x)$$

setzen und so

$$x = \frac{p^2 + q^2}{p^2 + 2pq - q^2},\ y = \frac{-p^2 + 2pq + q^2}{p^2 + 2pq - q^2}$$

setzen. Ward jetzt der Nenner

$$p^2 + 2pq - q^2 = 1$$

gesetzt, so ergab sich

$$x = 4q^2 + 1 \mp 2q\sqrt{2q^2 + 1},\ y = -4q^2 - 1 \pm 4q\sqrt{2q^2 + 1}.$$

Man wisse z. B., dass $2 \cdot 2^2 + 1 = 3^2$ ist; dann ist $q = 2$ zu nehmen, und man findet die neuen Werthe $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $x_2 = 29$, $y_2 = -41$, und damit sind für $\sqrt{2}$ die in der That von Theon angegebenen Näherungswerthe $\frac{7}{5}$ und $\frac{41}{29}$ gefunden. Die Gleichung $2x^2 + 1 = y^2$ gestattet ein

noch einfacheres Auflösungsverfahren, indem man

$$2x = \frac{p}{q}(y + 1), \; x = \frac{q}{p}(y - 1)$$

setzt. Löst man auf, so wird

$$x = \frac{2pq}{2q^2 - p^2}, \; y = \frac{2q^2 + p^2}{2q^2 - p^2},$$

oder, indem

$$2q^2 - p^2 = 1$$

sein soll,

$$x = 2q\sqrt{2q^2 - 1}, \; y = 4q^2 - 1.$$

Für $q = 1$, wird $x = \pm 2$, $y = 3$, der entstehende Näherungsbruch ist also $\frac{3}{2}$; für $q = 5$, wird $x = \pm 70$, $y = 99$, $\sqrt{2} \sim \frac{99}{70}$, u. s. f. Wir hoffen, durch diese Darstellung für $\sqrt{2}$ das Nämliche geleistet zu haben, was Zeuthen für $\sqrt{3}$ gethan hat; die zuletzt signalisirte Methode lässt sich übrigens 260) auch auf allgemeinere Fälle der Pell'schen Gleichung ausdehnen.

Wie nahe sowohl die Näherungswerthe des Archimedes, als auch diejenigen des Theon mit der Gleichung $x^2 - py^2 = r$ verwandt sind, dürfte aus Vorstehendem wohl zur Genüge erhellen*). Die letzteren lassen sich

*) Wenn auch nicht durch die Quadratwurzeln der „Kreismessung", so doch durch eine andere an den Namen des Archimedes sich anknüpfende mathematische Aufgabe ist jüngst eine neue Ideenverknüpfung zwischen der Pell'schen Gleichung und jenem Geistesheroen des Alterthums hergestellt worden. Man kennt das sogenannte problema bovinum: die Insel Sicilien beherbergt die Rinder des Helios, und unter gewissen Bedingungen, welchen die Zahl der Thiere Genüge zu thun hat, soll die Anzahl derselben berechnet werden. Die meisten Schriftsteller, welche seit Lessing's Zeiten sich mit dieser Aufgabe befasst haben, kommen einerseits darin überein, deren Urheberschaft dem Archimedes abzusprechen, andererseits aber auch darin, in ihr eine sehr schwierige und verwickelte Frage der unbestimmten Analytik zu erkennen. Nach Krummbiegel und Amthor, denen die Herstellung eines gereinigten Textes und eine neue Auflösung zu danken ist, kommen nicht weniger als neun unbestimmte Gleichungen dabei in Betracht 261). Amthor zeigt, dass den ersten acht dieser Gleichungen ohne grosse Mühe durch freilich ziemlich grosse Zahlen entsprochen werden kann, die jedoch sämmtlich das Quadrat einer noch unbekannten Grösse als Faktor in sich aufgenommen haben, und um auch diese letzte Unbekannte noch zu finden, muss die Pell'sche Gleichung

$$x^2 - 4729494\, y^2 = 1$$

aufgelöst werden 262). Hiezu bedarf man nach Lagrange der Entwickelung fraglicher Zahl in einen periodischen Kettenbruch, dessen Periode im gegebenen Falle nicht weniger als 91 Glieder umfasst. Amthor meint, die Autorschaft Archimed's sei nicht zu bestreiten, und P. Tannery, der denselben Gegenstand einer seiner ge-

jedoch auch direkt als Ergebniss gewisser Rekursionsgleichungen betrachten, und auch die ersteren erscheinen unter dem Einflusse solcher Reflexionen in einem ganz neuen Lichte. Wir gedenken denselben einen eigenen Paragraphen zu widmen.

§. 15. *Die Methode von Heilermann.* Wir haben in §. 6 des ersten Kapitels gesehen, dass Theon Smyrnaeus seine Seiten- und Diametralzahlen mittelst der beiden Relationen

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1},\ D_n = 2S_{n-1} + D_{n-1}$$

gewann. Heilermann hat sich nun 264) die Aufgabe gestellt, diese Methode der Herleitung zu verallgemeinern, den Faktor 2 durch eine willkürliche ganze Zahl $a$ zu ersetzen und auf diese Weise der Pell'schen Gleichung eine — soweit wir sehen können, neue — Seite abzugewinnen. Wir haben also jetzt ein doppeltes System:

$$\begin{array}{ll} S_1 = S_0 + D_0, & D_1 = aS_0 + D_0, \\ S_2 = S_1 + D_1, & D_2 = aS_1 + D_1, \\ S_3 = S_2 + D_2, & D_3 = aS_2 + D_2, \\ \vdots & \vdots \\ S_n = S_{n-1} + D_{n-1}; & D_n = aS_{n-1} + D_{n-1}. \end{array}$$

Der Zusammenhang dieser trinomischen rekurrenten Gleichungen mit der Gleichung von Pell ist leicht ersichtlich; man hat nämlich

$$aS_n^2 = aS_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + aD_{n-1}^2,$$
$$D_n^2 = a^2S_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}^2,$$

somit

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)\left(D_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2\right),$$

und durch unausgesetzte Wiederholung des nämlichen Verfahrens

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^n\left(D_0^2 - aS_0^2\right).$$

---

wöhnlichen durchdachten Untersuchungen unterzogen hat, pflichtet ihm in dieser Ansicht bei: „Ces calculs“, sagt er 263), „quoique fastidieux, ne sont pas exorbitants . . . M'étant proposé, à cette occasion, de traiter l'équation

$$t^2 - 2\,.\,3\,.\,7\,.\,11\,.\,29\,.\,353\,u^2 = 1,$$

je suis arrivé à une période de 58 termes, et j'ai admis que le calcul de ces termes n'eût été qu'un jeu pour Archimède.“ Natürlich denkt Tannery nicht an die direkte Rechnung Amthor's, sondern an einen dem raschen Aufsteigen des „Arenarius“ ähnlichen Entwickelungsgang, allein auch bei dieser Einschränkung können wir der frohen Botschaft keinen rechten Glauben entgegenbringen. Derartige Rechnungen scheinen uns, man mag sie auffassen, wie man will, für das Alterthum und dessen höchstbegabte Vertreter nun einmal transscendent zu sein.

Damit ist also die allgemeinste Form der Pell'schen Gleichung, nämlich

$$x^2 - ay^2 = \text{Const.},$$

erreicht.

Wir können dafür auch folgende Gestalt herstellen:

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a + \frac{(1-a)^{n+1}}{S_n^2}$$

indem wir $D_0 = S_0 = 1$ setzen; in dieser Gestalt besagt die Gleichung, da mit wachsendem $n$ der Bruch rechts gegen Null abnimmt, dass $\frac{D_n}{S_n}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{a}$ ist, und zwar in dem Sinne, dass der wahre Wurzelwerth stets zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen eingeschlossen bleibt.

Für $a = 2$, $D_0 = S_0 = 1$ erhalten wir in der That die uns aus Theon's mathematischem Commentar zu Platon bereits bekannten Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, nämlich

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{1}{1}, \frac{D_1}{S_1} = \frac{3}{2}, \frac{D_2}{S_2} = \frac{7}{5}, \frac{D_3}{S_3} = \frac{17}{12}, \frac{D_4}{S_4} = \frac{41}{29}, \frac{D_5}{S_5} = \frac{99}{70}, \frac{D_6}{S_6} = \frac{239}{169} \cdots$$

Für $a = 3$, $D_0 = 2$, $S_0 = 1$ gestalten sich die Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, wie folgt:

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{2}{1}, \frac{D_1}{S_1} = \frac{5}{3}, \frac{D_2}{S_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \frac{D_3}{S_3} = \frac{19}{11}, \frac{D_4}{S_4} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15},$$
$$\frac{D_5}{S_5} = \frac{71}{41}, \frac{D_6}{S_6} = \frac{194}{112} = \frac{97}{56}, \frac{D_7}{S_7} = \frac{2120}{1224} = \frac{265}{153} \cdots$$

Wir sehen hier die Näherungswerthe des Archimedes wieder erscheinen, aber freilich — und diess ist der uns bereits bekannte, fast alle systematischen*) Methoden treffende — Einwand, nicht in der Aufeinanderfolge, wie sie uns bei dem Autor selbst begegnet sind. Freilich aber war auch nicht $D_0 = 1$ genommen worden.

Da macht nun Heilermann 265) den geistvollen Vorschlag, nicht für $\sqrt{a}$ selbst, sondern für ein gewisses $b\sqrt{a}$ die obige Bestimmung durchzuführen und den Coëfficienten $b$ den jeweiligen Umständen entsprechend zu wählen. Setzt man z. B. $D_0 = S_0 = 1$, $a = \frac{27}{25}$, $\sqrt{a} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$, so wird $S_1 = 2$, $D_1 = \frac{52}{25}$, $\sqrt{3} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15}$, $S_2 = \frac{102}{25}$, $D_2 = \frac{52}{25} + \frac{27}{25} \cdot 2 = \frac{54+52}{25}$

*) Zur Zeit konnten wir strenge genommen nur einer einzigen Methode, der zweiten Buzengeiger's — nicht aber den auf gleicher Grundlage beruhenden Methoden von Oppermann und Alexejeff — nachrühmen, dass sie ohne Zwang gerade zu den archimedischen Quadratwurzeln führe.

$= \frac{106}{25}$, also $\frac{3}{5}\sqrt{3} = \frac{106}{25} \cdot \frac{25}{102} = \frac{53}{51}$, somit $\sqrt{3} = \frac{5 \cdot 53}{3 \cdot 51} = \frac{265}{153}$ u. s. f.

Allgemein führt Heilermann diese Idee in der Art durch, dass er $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c}$, $a = \frac{b^2 + c}{b^2}$ setzt, wo

$$\frac{b^2 + c}{b^2} < \frac{(b+1)^2}{b^2},$$

$a - 1$ also als eine kleine positive Grösse angenommen werden darf. Wir gewinnen so folgende Bestimmungsgleichungen für $S$ und $D$:

$$S_0 = 1, \qquad D_0 = 1, \qquad \left(a = \frac{b^2 + c}{b^2}\right)$$

$$S_1 = 2, \qquad D_1 = 2 + \frac{c}{b^2},$$

$$S_2 = 4 + \frac{c}{b^2}, \quad D_2 = 4 + \frac{3c}{b^2},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Freilich führt, wie ausnahmslos alle uns bekannt gewordenen Methoden, bei $\sqrt{349450}$ auch dieses Auskunftsmittel keine befriedigende Lösung herbei, indem statt des archimedischen $591\frac{1}{8}$ nur $591\frac{1}{7}$ erhalten wird; ebenso wird $\sqrt{1373943\frac{33}{64}} > 1172\frac{1}{7}$ und nicht, wie die eigentliche Vorlage will, $> 1172\frac{1}{8}$ gefunden. Allerdings ist in diesen beiden Fällen vollständige Uebereinstimmung dadurch zu erzielen, dass man statt

$$\frac{bD_2}{S_2} = b + \frac{2bc}{4b^2 + c} = b + \frac{bc}{2b^2 + \frac{1}{2}c}$$

den etwas kleineren Werth

$$\frac{bD'_2}{S^2} = b + \frac{bc}{2b^2 + 2c}$$

setzt. Dann ergeben sich, wie gewünscht, die angenäherten Werthe $591\frac{1}{8}$ und $1172\frac{1}{8}$, dagegen gelingt es auch so nicht, das archimedische

$$\sqrt{5472132\frac{1}{16}} \sim 2339\frac{1}{4}$$

zu finden, indem vielmehr $2339\frac{1}{2}$ herauskommt.

Es ist nun freilich hervorzuheben, dass, so hübsch diese Einkleidung auch ist, thatsächlich eben doch nur auf die uns wohlbekannte Entwickelung der Quadratwurzel in einen eingliedrig-periodischen Kettenbruch Bezug genommen ward. Denn, wie Heilermann selbst bemerkt, ist

$$\frac{bD_2}{S_2} = b + \frac{c}{2b + \frac{c}{2b}} \cdot$$

Er erinnert daran, dass arabische Mathematiker (Kap. I, §. 15), je nachdem $c < b$ oder $c > b$ war, die verschiedenen Formeln

$$\sqrt{b^2 + c} \sim b + \frac{c}{2b} \text{ und } \sqrt{b^2 + c} \sim b + \frac{c+1}{2(b+1)}$$

zur Anwendung brachten, und macht darauf aufmerksam, dass, sowie man sich nur von der Relation

$$\sqrt{\beta^2 - \alpha} = \beta - \frac{\alpha}{2\beta - \frac{\alpha}{2\beta - \cdots}}$$

Gebrauch zu machen gestattet, die zweite Formel der Araber leicht direkt zu erhalten ist. Man setzt zu dem Ende

$$\sqrt{b^2 + c} = \sqrt{(b+1)^2 - (2b + 1 - c)}$$

und bekommt dann als zweite Annäherung jener negativen Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{b^2 + c} \sim \left(b + 1 - \frac{2b + 1 - c}{2(b+1)} = b + \frac{c+1}{2(b+1)}\right).$$

Aus all diesen Ueberlegungen zieht Heilermann den Schluss, dass den Alten ein unserem modernen Kettenbruch-Algorithmus entsprechendes Rechnungsverfahren unmöglich verborgen geblieben sein könne. Zum weiteren Belege führt er ein paar interessante elementargeometrische Betrachtungen durch. Aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $ABC$ (Fig. 12a), dessen Hypotenuse $AB$ ist, ergiebt sich zunächst nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{BC}^2 = 0,$$

und dieser identischen Gleichung lässt sich nachstehende Form ertheilen:

$$2AB \,.\, BC - 2\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \cdot BC + \overline{BC}^2 = \overline{BC}^2,$$

$$2BC(AB - BC) + (AB - BC)^2 = \overline{BC}^2,$$

$$AB - BC = \frac{\overline{BC}^2}{2BC + (AB - BC)}$$

Da aber $AB = BC \,.\, \sqrt{2}$ ist, so haben wir, wenn noch $BC = 1$ gesetzt wird,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}$$

Fig. 12b stelle ein rechtwinkliges Dreieck vor, in welchem

$$\overline{AB}^2 - 3\overline{BC}^2 = 0$$

ist. Hiefür denke man sich geschrieben:

$$\overline{AB}^2 - \frac{25}{9}\overline{BC}^2 = \left(AB - \frac{5}{3}BC\right)\left(AB + \frac{5}{3}BC\right) = \frac{2}{9}\overline{BC}^2,$$

$$AB - \frac{5}{3}BC = \frac{\frac{2}{9}\overline{BC}^2}{AB + \frac{5}{3}BC} = \frac{\frac{2}{9}\overline{BC}^2}{\frac{10}{3}BC + \left(AB - \frac{5}{3}BC\right)}.$$

Wird wieder $AB = BC\,.\,\sqrt{3}$, $BC = 1$ gesetzt, so haben wir nunmehr

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cdots}}.$$

Und dieser Kettenbruch führt allerdings sehr rasch zu den archimedischen Zahlen; es ist $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{5}{3}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{26}{15}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{265}{153}\cdots$

Wollte man, mit Verlassung des schönen geometrischen Bildes, dessen sich Heilermann bedient, die letzterwähnte Kettenbruchentwickelung rein algebraisch darstellen, so würde so zu verfahren sein. Man suche, um $\sqrt{A}$ durch einen rasch convergirenden eingliedrig-periodischen Kettenbruch auszudrücken, jene Quadratzahl $m$, welche durch die Ungleichung

$$m^2 < A^3 < (m+1)^2$$

bestimmt ist, und setze alsdann

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A^3}{A^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{A^2} + \frac{A^3 - m^2}{A^2}}.$$

Unter diesen Umständen liefert die gewöhnliche Entwickelung

$$\sqrt{A} = \frac{m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cdots}}}$$

Beide Heilermann'sche Kettenbrüche entspringen dieser allgemeinen Regel. Für $A = 2$ ist $m = 2$, somit

$$\sqrt{2} = \frac{2}{2} + \cfrac{\frac{4}{4}}{\frac{4}{2} + \cfrac{\frac{4}{4}}{\frac{4}{2} + \cdots}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots,$$

wie oben. Für $A = 3$ dagegen ist $m = 5$, $A^2 = 9$, $A^2 - m^2 = 2$ und sonach, ebenfalls wie angegeben ward,

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cdots}}.$$

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die anscheinend ganz geometrischen Betrachtungen, welche zunächst jedem einzelnen Falle individuell angepasst sind, auf ihre gemeinsame algebraische Quelle zurückgeführt zu sehen, schon der nachfolgenden rückschauenden Schlüsse halber. —

Ein Gesammturtheil über die verschiedenen in Heilermann's Aufsatz zusammengedrängten Einzelmethoden lässt sich ungleich weniger leicht fällen, als über alle früheren Versuche — diejenigen Paul Tannery's allein ausgenommen. Man findet in der erstgenannten Abhandlung eine wahre Musterkarte scharfsinniger Bemerkungen und eleganter Umformungen vor. Allein da in letzter Instanz Alles doch wieder auf eine, wenn auch noch so gewandt durch geometrische Einkleidung verhüllte Kettenbruchmethode hinausläuft, und da wir angesichts der grossen Schwerfälligkeit, welche wenigstens zur archimedischen Zeit noch in der Bruchbezeichnung obwaltete, den Griechen eine ohne Benützung des Bruchstriches kaum erklärliche Rechnungsweise nicht zutrauen können, so scheint uns auch die Heilermann'sche Methode den freilich sehr hoch zu spannenden Anforderungen nicht ganz zu genügen, welche man an eine vollkommen befriedigende Erklärung der archimedischen Quadratwurzeln stellen muss.

§. 16. *Die Hultsch'sche Reihe für die Näherungswerthe von $\sqrt{5}$.* Eine ganz vereinzelte und eigenartige Stellung kommt, wie in Kap. I, §. 16 nachgewiesen ward, jenen Näherungswerthen der Quadratwurzel aus fünf zu, von welchen uns kein einziges Schriftwerk des Alterthums — soweit wir wenigstens im Augenblick zu übersehen vermögen — berichtet, die aber doch nach den Untersuchungen von Hultsch an den Maassverhältnissen antiker Monumentalbauten unzweideutig zu Tage treten. Durch eine Reihe sehr beachtenswerther Schlüsse ist der genannte Gelehrte auf die Zahlenreihe

$$\cdots 90,\ 56,\ 34,\ 21,\ 13,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2} \cdots$$

gekommen, von welcher bereits an jenem früheren Orte bemerkt ward, sie verrathe eine augenfällige Aehnlichkeit mit einer anderen, in der neueren Analysis zu einer gewissen Bedeutung gelangten Reihe. Diese letztere wird wohl am Einfachsten erhalten, wenn man den Major $x$ einer nach der sectio divina getheilten Strecke von Einheitslänge in einen Kettenbruch entwickelt.

Aus der Proportion

$$1 : x = x : (1 - x)$$

folgt zunächst

$$x (1 + x) = 1, \; x = \frac{1}{1 + x}$$

und hieraus wieder

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$$

Bestimmt man die Näherungswerthe dieses einfachsten aller Kettenbrüche, so erhält man

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{2}{3}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{3}{5}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{5}{8}, \frac{P_6}{Q_6} = \frac{8}{13}, \frac{P_7}{Q_7} = \frac{13}{21}, \frac{P_8}{Q_8} = \frac{21}{34} \cdots$$

Man bemerkt, dass — blos die ganzzahligen Terme der Reihe von Hultsch in Betracht gezogen — die meisten völlig mit den Näherungszählern resp. Näherungsnennern unseres Kettenbruches übereinstimmen; in allen drei Reihen herrscht eben das durch die Rekursionsgleichungen

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}, \; Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

ausgedrückte Gesetz. Nur an einer einzigen Stelle nehmen wir eine Unterbrechung dieser Gesetzmässigkeit wahr. Die beiden ersten Glieder der Hultsch'schen Reihe sind 90 und 56, während wir unserer Regel zufolge 89 und 55 erwarten sollten, allein erstens ist diese Abweichung eine so geringe, dass sie praktisch überhaupt nicht in's Gewicht fallen konnte, und zweitens sind für diese Unregelmässigkeit auch Gründe angeführt worden, wie a. a. O. nachzulesen ist.

Wir erinnern uns, dass nach Hultsch ein Reihenglied aus dem unmittelbar vorhergehenden immer dadurch abgeleitet wurde, dass man mit $\frac{22}{34}$ oder mit $\frac{21}{34} = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{17} - 1\right)$ multiplicirte. $\frac{38}{17}$ bedeutete den griechischen Architekten einen besonders praktischen Näherungswerth von $\sqrt{5}$. Stellt man denselben auf dem gewöhnlichen Wege der Kettenbruchentwickelung her, so tritt er sammt all' seinen Gefährten in eine nahe Beziehung zu den obigen Näherungswerthen für $x$, wie erwartet werden musste. Man hat

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

und denkt man sich nun die Näherungswerthe dieses Kettenbruches durch Akute von den früheren unterscheiden, so ergiebt sich

$$\frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{2}{1}, \frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{9}{4}, \frac{P'_3}{Q'_3} = \frac{38}{17}, \frac{P'_4}{Q'_4} = \frac{161}{72}, \frac{P'_5}{Q'_5} = \frac{682}{305}, \frac{P'_6}{Q'_6} = \frac{2889}{1292} \cdots$$

Werden hieraus in einer sofort näher zu bezeichnenden Weise neue Brüche hergeleitet, welche zum Unterschiede einen zweifachen Akut führen sollen, so bekommt man

$$\frac{P''_1}{Q''_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1} - 1\right) = \frac{1}{2}, \frac{P''_2}{Q''_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{5}{8}, \frac{P''_3}{Q''_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{17} - 1\right) = \frac{21}{34}.$$

$$\frac{P''_4}{Q''_4} = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{72} - 1\right) = \frac{89}{144} \ldots,$$

und es entstehen nachfolgende Gleichheiten:

$$\frac{P''_1}{Q''_1} = \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P''_2}{Q''_2} = \frac{P_5}{Q_5}, \frac{P''_3}{Q''_3} = \frac{P_8}{Q_8}, \frac{P''_4}{Q''_4} = \frac{P_{11}}{Q_{11}} \ldots \frac{P''_n}{Q''_n} = \frac{P_{3n-1}}{Q_{3n-1}}.$$

Die mit zwei Strichen bezeichneten Näherungswerthe besitzen mithin eine bei weitem raschere Convergenz. Wollen wir die Beziehungen zwischen beiden in einem kurzen Satze zusammenfassen, so können wir mit Bezug auf das in §. 13 dieses Kapitels erörterte Kunstwort sagen:

Die aus der Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{5}$ entspringenden Näherungswerthe besitzen, wenn sie nach Abzug der Einheit durch 2 dividirt werden, zu den direkt aus der Kettenbruchentwickelung von

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

hervorgehenden Näherungswerthen eine $n - (3n - 1)$fache Aequivalenz.

Mit diesen Ausführungen dürfte die Stellung der von Hultsch aus archäologisch-mathematischen Gründen in die Wissenschaft eingeführten Zahlwerthe zu den bekannten Kettenbruchentwickelungen hinlänglich fixirt sein. Damit jedoch, dass letztere den einfachsten und kürzesten Weg zu diesem Zwecke darbieten, soll durchaus noch nicht gesagt sein, dass derselbe von den alten Griechen wirklich eingeschlagen worden sei. Es wäre ein solcher Schluss um so unhistorischer, als wir ganz genau wissen, dass ein mittelalterlicher Gelehrter, dem die Kettenbrüche ebenso ferne lagen, wie den hellenischen Baumeistern, die hier in Frage kommende Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 . . . mit äusserst beschränkten und einfachen Hülfsmitteln einer sehr genauen Untersuchung unterzogen hat. Es ist das Verdienst von E. Lucas, diese rekurrente Reihe einfachster Natur, die gewöhnlich den Namen Lamé's führt, u. a. früher bereits auch von Albert Girard betrachtet worden ist, bei Leonardo Fibonacci nachgewiesen zu haben 266). Lucas zeigt dort 267) auch, dass und wie sich ohne jede Zuhülfenahme der Kettenbrüche eine Theorie dieser Reihe algebraisch auf die Relationen

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \sqrt{5} \cdot u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

begründen lässt

# Kapitel III.

## Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch Entwickelung in Bruchreihen.

§. 1. *Die allgemeine Entwickelungsmethode von E. Lucas.* Eine solche Methode ist gegeben durch jene Funktionen $U$ und $V$ von Eduard Lucas, welche man mit Grund als die erzeugenden Funktionen der goniometrischen Grössen cyklischer wie hyperbolischer Zugehörigkeit bezeichnen könnte. Um sie zu erhalten, setze man für die quadratische Gleichung $x^2 - Px + Q$ 268)

$$P = a + b, \quad Q = ab$$

und sodann

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n.$$

Dann gilt, zunächst als identische Gleichung, die folgende 269):

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} + \left(\frac{U_3}{U_2} - \frac{U_2}{U_1}\right) + \left(\frac{U_4}{U_3} - \frac{U_3}{U_2}\right) + \cdots + \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right).$$

Fasst man zusammen und erinnert sich der obigen Bedeutung von $Q$, so kann man auch schreiben:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} - \frac{Q}{U_1 U_2} - \frac{Q^2}{U_2 U_3} - \frac{Q^3}{U_3 U_4} - \cdots - \frac{Q^{n-1}}{U_{n-1} U_n}.$$

Diese Reihe lässt sich, wie folgt (a. a. O.), verallgemeinern:

$$\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}} = \frac{U_{2r}}{U_r} - U_r^2\left(\frac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r} U_{3r}} + \cdots + \frac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r} U_{nr}}\right),$$

$$\frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{V_r}{V_0} - \triangle U_r^2\left(\frac{Q^r}{V_0 V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \cdots + \frac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r} V_{nr}}\right).$$

$\triangle$ bedeutet hier die Diskriminante $(P^2 - 4Q)$ der Fundamentalgleichung. Und noch allgemeiner ist die aus der vorstehenden abgeleitete Reihenentwickelung:

$$\frac{U_{n+kr}}{V_{n+kr}} = \frac{U_n}{V_n} + 2Q^n U_r \left(\frac{1}{V_r V_{n+r}} + \frac{Q^r}{V_{n+r} V_{n+2r}} + \frac{Q^{2r}}{V_{n+2r} V_{n+3r}} + \cdots + \frac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+(k-1)r} V_{n+kr}}\right);$$

$$\frac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \frac{V_n}{U_n} - 2Q^n U_r \left(\frac{1}{U_r U_{n+r}} + \frac{Q^r}{U_{n+r} U_{n+2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{n+2r} U_{n+3r}} + \cdots + \frac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+(k-1)r} U_{n+kr}}\right).$$

In allen Fällen ist mit diesen Formeln die Darstellung irrationaler Grössen durch — endliche oder unendlich fortlaufende — Bruchreihen vollzogen, und gelingt es dabei, $Q = 1$ zu erhalten, so hat man jene Form der Einheitsbrüche oder auch „Stammbrüche“ gewonnen, welche wir von den Alten, vielleicht der ägyptischen Tradition folgend, mit Vorliebe angewendet sahen.

Wir wollen den einfacheren Theil dieses Verfahrens durch einige Beispiele erläutern. Für $P = 1$, $Q = -1$, $\triangle = 5$, haben wir 270)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},\ V_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n}.$$

Gehen wir dann gleich zur unendlichen Reihe über, so ist zunächst

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n (1-\sqrt{5})}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Rechnet man die einzelnen $U$ jetzt wirklich aus, so findet man

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1\cdot 1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{8\cdot 13} + \cdots$$

Man erblickt in den Nennern dieser Bruchreihe wieder genau dieselben ganzen Zahlen in der nämlichen Reihenfolge wiederkehrend, wie wir sie im letzten Paragraphen des vorigen Kapitels als die Reihe von Fibonacci-Lamé bildend kennen gelernt haben.

Es sei ferner $P = 2$, $Q = -1$, $a + b = 2$, $ab = -1$, $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$,

$$U_1 = \frac{1+\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1,\ U_2 = \frac{1+2\sqrt{2}+2-1+2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = 2,$$

$$U_3 = 5,\ U_4 = 12 \cdots$$

Dann hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \sqrt{2} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\,.\,12} - \frac{1}{12\cdot 29} + \cdots$$

Daraus ergeben sich, wie man sieht, die uns bekannten Näherungswerthe

$$\sqrt{2} \sim 1,\ \sqrt{2} \sim \frac{3}{2},\ \sqrt{2} \sim \frac{7}{5},\ \sqrt{2} \sim \frac{17}{12},\ \sqrt{2} \sim \frac{247}{192} \cdots$$

In einem dritten Falle sei $P = 4$, $Q = 1$, $a + b = 4$, $ab = 1$, $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$. Man berechnet $U_1 = 1$, $U_2 = 4$, $U_3 = 15$, $U_4 = 56$ und

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 + \sqrt{3} = \frac{4}{1} - \frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 15} - \frac{1}{15 \cdot 56} - \cdots$$

Somit sind die Näherungswerthe folgende:

$$\sqrt{3} \sim 2, \sqrt{3} \sim \frac{7}{4}, \sqrt{3} \sim \left(\frac{104}{60} = \frac{26}{15}\right), \sqrt{3} \sim \left(\frac{1455}{15 \cdot 56} = \frac{97}{56}\right) \cdots$$

Vergleicht man dieselben mit den aus der Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

hervorgehenden

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{19}{11}, \frac{P_6}{Q_6} = \frac{26}{15}, \frac{P_7}{Q_7} = \frac{71}{41},$$
$$\frac{P_8}{Q_8} = \frac{97}{56} \cdots,$$

so leuchtet ein:

Der Näherungsprocess des eingliedrig-periodischen Kettenbruches hat zu dem Näherungsprocess von E. Lucas eine 1—2fache Aequivalenz.

Wir citiren nachstehend noch eine auf die geschichtliche Bedeutung dieser Methode bezügliche Bemerkung ihres Urhebers 271): „On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateurs l'unité; c'était un usage familiaire aux savants de la Grèce et de l'Égypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \varepsilon,$$

rapportée par Columelle*), au chapitre V de son ouvrage „De re rustica"; ainsi celle-ci

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{12 \cdot 34} + \varepsilon,$$

---

*) Wir müssen jedoch bemerken, dass es uns nicht gelungen ist, aus einer der von Lucas aufgestellten Bruchreihen gerade die hier in Rede stehende Form des Näherungswerthes von $\sqrt{3}$ herauszuziehen, so leicht es andererseits ist, den Werth $\frac{26}{15}$ in der ebenfalls heronischen Form $\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{60}\right)$ zu erhalten.

donnée par les auteurs indiens Baudhayâna et Apastamba; cette valeur approximative est égal au rapport

$$\frac{V_8}{U_8} = \frac{577}{408}$$

de la série de Pell."

So richtig diess Alles ist, und so sehr auch die Kürze und Zweckmässigkeit dieser Entwickelungsmethode vom rein mathematischen Standpunkt aus anerkannt zu werden verdient, so hat doch Lucas mit den obigen Worten schwerlich andeuten wollen, dass man sich die Auffindung der in Frage stehenden Näherungswerthe Seitens der alten Mathematiker wirklich in Gemässheit dieses Verfahrens vorzustellen habe. Denn, soweit wir sehen können, steht und fällt dasselbe mit der Kenntniss des binomischen Lehrsatzes, mit Hülfe dessen die einzelnen Werthe von $U$ und $V$ stets berechnet werden müssen, und dass von diesem die Alten — wenigstens für einen Exponenten $\geqq 4$ — keine Ahnung hatten, kann wohl keinem Zweifel unterliegen. Wir haben auch die Ausführungen dieses Paragraphen lediglich ihres hohen theoretischen Interesses wegen eingeschaltet.

§. 2. *Die Methode von Radicke.**) Im Gegensatze zu der soeben geschilderten Methode, deren Resultate sich durch ihren independenten Charakter auszeichnen, geht diejenige, welche nunmehr der Besprechung unterliegen soll, der Aufgabe allmälich zu Leibe. Radicke hat sich aus dem Studium des Heron und anderer alten Schriftsteller die Ueberzeugung geholt**), dass die Griechen ihre Wurzeln nicht durch Stammbrüche schlechthin, sondern durch solche Stammbrüche darzustellen suchten, deren Nenner sich bei'm Weiterfortschreiten stets nur um einen ganzzahligen Faktor vergrössern. Man würde es also in moderner Ausdrucksweise mit einer „Theilbruchreihe" (Heis) oder mit einem „aufsteigenden Kettenbruch" (A. Kunze) zu thun haben. In der That laufen ja alle bekannteren Methoden, eine Quadratwurzel successive auszuziehen, auf diese Idee hinaus, so dass man, Radicke's Gedanken annehmend, die drei verschiedenen Verfahrungsweisen folgendermaassen neben einander stellen kann:

---

*) Wie danken die Kenntniss dieses eleganten Verfahrens dessen Erfinder, Herrn Realschuloberlehrer Radicke in Bromberg. Veröffentlicht hat derselbe darüber nichts, wohl aber dem Verf. die Erlaubniss gegeben, aus dem über den Gegenstand geführten Briefwechsel die für einen grösseren Leserkreis wichtigeren Bestandtheile zu publiciren.

**) Wir entnehmen den bezüglichen Mittheilungen noch die Thatsache, dass Herr Radicke besonders auch durch die früher vom Verf. dieses publicirte Geschichte der Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen zu seinen hier zu besprechenden Versuchen angeregt worden sei.

I. *Moderne Methode.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \cdots = E(\sqrt{A}) + \cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cdots}{10}}{10}}{10}.$$

II. *Methode der griechischen Astronomen.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) + \frac{\alpha}{60} + \frac{\beta}{60^2} + \frac{\gamma}{60^3} + \cdots = E(\sqrt{A}) + \cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cdots}{60}}{60}}{60}.$$

III. *Wahrscheinliche Methode des Heron.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) \pm \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha\beta} \pm \frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \cdots = E(\sqrt{A}) \pm \cfrac{1 \pm \cfrac{1 \pm \cfrac{1 + \cdots}{\gamma}}{\beta}}{\alpha}.$$

Die beiden ersten Methoden haben das Gemeinsame, dass die einzelnen Theilnenner durchweg einander gleich, die Theilzähler dagegen an gar kein Gesetz gebunden erscheinen; die dritte Methode im Gegentheil setzt gar nichts bezüglich der Theilnenner fest, will dagegen den Theilzählern ausnahmslos den Werth $\pm 1$ beigelegt wissen. Im Uebrigen geht Radicke von der wohlbegründeten Thatsache aus, dass wenn $\sqrt{A}$ in einer der Formen

$$\sqrt{a^2 + b}, \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$(a = E(\sqrt{A}),\ \alpha = E(\sqrt{A}) + 1)$ gegeben war, die ersten und zweiten Näherungswerthe resp. mit $a$ und $\alpha$, $a + \frac{b}{2a}$ und $\alpha - \frac{\beta}{2\alpha}$ identificirt wurden. Dass insbesondere auch die negative Form bekannt war, ist uns bei der Durchsicht der heronischen Näherungswerthe (Kap. I, §. 4) zur Gewissheit geworden.

Aus $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{1}{k}$ ward zuerst, mit Vernachlässigung von $\frac{1}{k^2}$,

$$a^2 + b \sim a^2 + \frac{2a}{k},\ k \sim \frac{2a}{b}$$

hergeleitet; man hatte $\sqrt{A} \sim \left(n_1 = a + \frac{1}{k}\right)$. Weiterhin war

$$A - \left(a + \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}(Ak^2 - a^2 - 2ak - 1) = \frac{d_1}{k^2},\ (ak + 1) = a_1$$

und, wenn jetzt $l \sim \frac{2a}{d_1}$ genommen wurde, die weitere Annäherung

$$n_2 = a + \frac{1}{k} + \frac{1}{kl}.$$

Waren $\frac{2a}{b}$ und $\frac{2a}{d_1}$ nicht von selbst schon Stammbrüche, so wurden sie nach den aus Aegypten überkommenen Mustern in Stammbrüche aufgelöst.

Behandelt man in diesem Sinne die archimedische Irrationalität

$$\sqrt{349450} = \sqrt{591^2 + 169},$$

so ist $n_1 = a + \frac{1}{k} = 591 + \frac{1}{7}$,

$$\left(591 + \frac{1}{7}\right)^2 = 591^2 + 2 \cdot 591 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{49} = 591^2 + 168 + \frac{42}{49} + \frac{1}{49},$$

$$a_1 = 7 \cdot 591 + 1 = 4138, \; d_1 = 6,$$

$$l = \frac{2 \cdot 4138}{6} = \frac{4138}{3} = 1379,$$

$$\sqrt{A} \sim n_2 = 591 + \frac{1}{7} + \frac{1}{1379 \cdot 7} = 591 + \frac{1380}{9653}.$$

Dieses Beispiel lehrt, dass Radicke, was er nicht ausdrücklich hervorhebt, sehr kleine Vernachlässigungen für erlaubt erachtet; $\frac{169}{1182}$ ist nicht genau $= \frac{1}{7}$, $\frac{4138}{3}$ nicht genau $= 1379$. Gleichwohl gelingt es auch auf diesem Wege nicht, den archimedischen Werth $591 \frac{1}{8}$ zu erzielen; statt des positiven Zuwachses hätte vielmehr der Restbetrag $\frac{1}{15}$ erscheinen sollen.

Für die heronischen Zahlen scheint sich das Radicke'sche Verfahren in manchen Fällen ganz vortrefflich zu empfehlen. Wir wollen diess an einigen sehr gut hiezu sich eignenden Beispielen nachweisen und wählen zu dem Ende aus P. Tannery's Abtheilung III die erste und zweite, aus seiner Abtheilung VI die zweite Nummer (vgl. Kap. I, §. 4).

1) Für $\sqrt{135} = \sqrt{12^2 - 9}$ haben wir

$$\frac{2 \cdot 12}{9} \sim k, \; k \sim \frac{24}{9} = 3, \; n_1 = 12 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3},$$

$$\frac{2 \cdot 35}{l} \sim 10, \; l = \frac{70}{10} = 7, \; n_2 = 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = 11 + \frac{13}{21}.$$

Zerlegen wir aber diesen letzteren Bruch in Stammbrüche, so finden wir

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21},$$

wie bei Heron.

2) Für $\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{30^2 - 14 - \frac{1}{16}}$ wird

$$k \sim \frac{60}{14 + \frac{1}{16}} = 4, \; n_1 = 30 - \frac{1}{4},$$

$$\left(30 - \frac{1}{4}\right)^2 = 900 - 15 + \frac{1}{16} = 885 + \frac{1}{16},$$

$$a_1 = 119,\ d_1 = \frac{1}{14},\ \frac{1}{k\,l} \text{ positiv},$$

$$2 \, . \, 119 \, . \, \frac{1}{2} \sim 14,\ l \sim \frac{119}{7} = 17,$$

$$n_2 = 30 - \frac{1}{4} + \frac{1}{68} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{17}.$$

Diess ist der heronische Werth.

3) Für $\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{3}{4}}$ wird

$$k \sim \frac{12}{7\frac{3}{4}} = 2,\ n_1 = 6 + \frac{1}{2},$$

$$\left(6 + \frac{1}{2}\right)^2 = 36 + 6 + \frac{1}{4},\ a_1 = 13,\ d_1 = 6,\ \frac{1}{k\,l} \text{ positiv},$$

$$l \sim \frac{6}{2 \, . \, 13} = \frac{3}{13},\ n_2 = 6 + \frac{1}{2} + \frac{3}{26},$$

also wie bei Heron angegeben,

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

Für $\sqrt{2}$ erhalten wir in Consequenz dieses Verfahrens die Näherungswerthe

$$\frac{4}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{106}{75},$$

von welchen bereits mehrfach die Rede gewesen ist. Wir werden uns in §. 4 dieses Kapitels überzeugen, dass für $\sqrt{2}$ eine ganz analoge Entwickelungsmethode von Rodet angegeben worden ist.

Man könnte vielleicht den Einwurf erheben, das Endresultat stelle sich ja doch für gewöhnlich nicht in der strengen Form einer Theilbruchreihe dar. Diess hat jedoch darin seinen guten Grund, dass die bei der Rechnung auftretenden subtraktiven Stammbrüche aus dem Schlussergebniss wieder weggeschafft wurden.

Dagegen lässt sich allerdings nicht leugnen, dass nicht sämmtliche heronische Werthe gleichgut dem beschriebenen Verfahren sich unterordnen. Herr Radicke hat selbst bedauert, nicht das gesammte Thatsachen-Material zu seiner Verfügung gehabt zu haben. Nimmt man dasselbe im Zusammenhang durch, so drängt sich einem mehr und mehr die Gewissheit auf, dass überhaupt Heron, der nirgendwo den Praktiker verleugnet, nicht sowohl principiell verfuhr, sondern mehr von Fall zu Fall seine Rechnung ein-

richtete. Aus diesem Grunde möchten wir nicht zu behaupten wagen, die Methode von Radicke sei wirklich und ausschliesslich diejenige des Heron gewesen, allein wenn wir dieselbe in Parallele stellen mit den weiteren Erörterungen der nächsten vier Paragraphe, so werden wir doch auch nicht umhin können, zuzugestehen, dass solche Ueberlegungen, wie sie jener Methode zu Grunde liegen, für den griechischen Geometer wenigstens mitbestimmend gewesen sein können.

§. 3. *Die Methode von v. Pessl.**) Dieselbe hat mit der vorigen das gemeinsam, dass grundsätzlich auf Entwickelung von $\sqrt{A}$ in eine Stammbruchreihe ausgegangen wird; es soll

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots$$

sein. Im Gegensatze zu Radicke wird jedoch die Bedingung, dass $q_1$ in $q_2$, $q_1 \cdot q_2$ in $q_3$ als Faktor enthalten sein soll, fallen gelassen und an Stelle derselben die neue Forderung gesetzt, dass die Nenner $q_1, q_2, q_3 \ldots$ stets die kleinstmöglichen ganzen positiven Zahlen sein sollen. Wir bekommen so die Quadratwurzelausziehung ihrem eigentlichen Wesen entsprechend als ein Divisionsproblem dargestellt; bezeichnen wir die successiven Divisoren, resp. Reste, mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$, die zugehörigen Dividenden dagegen mit $d_1$, $d_2, d_3 \ldots$, so ergiebt sich uns nachstehendes Schema:

$$\begin{array}{lll}
r_1 = b, & d_1 = 2a, & q_1 > \frac{d_1}{r_1} = 1 + E\left(\frac{d_1}{r_1}\right), \\
r_2 = r_1 q_1 - d_1 - \frac{1}{q_1}, & d_2 = d_1 q_1 + 2, & q_2 > \frac{d_2}{r_2} = 1 + E\left(\frac{d_2}{r_2}\right), \\
r_3 = r_2 q_2 - d_2 - \frac{q_1}{q_2}, & d_3 = d_2 q_2 + 2q_1, & q_3 > \frac{d_3}{r_3} = 1 + E\left(\frac{d_3}{r_3}\right), \\
r_4 = r_3 q_3 - d_3 - \frac{q_1 q_2}{q_3}, & d_4 = d_3 q_3 + 2q_1 q_2, & q_4 > \frac{d_4}{r_4} = 1 + E\left(\frac{d_4}{r_4}\right), \\
r_5 = r_4 q_4 - d_4 - \frac{q_1 q_2 q_3}{q_4}, & d_5 = d_4 q_4 + 2q_1 q_2 q_3, & q_5 > \frac{d_5}{r_5} = 1 + E\left(\frac{d_5}{r_5}\right), \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
r_n = r_{n-1} q_{n-1} - d_{n-1} - \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-1}}, & d_n = d_{n-1} q_{n-1} + 2q_1 \cdots q_{n-2}, & q_n > \frac{d_n}{r_n} = 1 + E\left(\frac{d_n}{r_n}\right)
\end{array}$$

*) Auch diese Methode ist noch nicht im Druck bekannt gegeben worden. Sie rührt her von dem k. Lyzealrektor H. v. Pessl in Dillingen, dem gelehrten Publikum durch seine Forschungen über die magischen Quadrate und über die manethonische Chronologie wohl bekannt; von ihrer Entstehung und nunmehrigen Veröffentlichung gilt ganz das Nämliche, was oben von der Radicke'schen Methode bemerkt worden ist.

v. Pessl prüft die Anwendbarkeit dieser sozusagen verallgemeinerten Bruchreihenentwickelung an dem willkürlich gewählten Beispiele

$$\sqrt{377\frac{2}{3}} = \sqrt{19^2 + 16\frac{2}{3}}.$$

Hier ist $r_1 = 16\frac{2}{3}$, $d_1 = 38$, $q_1 = 1 + E\left(\frac{38 \cdot 3}{50}\right) = 3$, $r_2 = 50 - 38 - \frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$, $d_2 = 38 \cdot 3 + 2 = 116$, $q_2 = 1 + E\left(\frac{3 \cdot 116}{35}\right) = 10$, $r_3 = \frac{350}{5} - 116 - \frac{3}{10} = \frac{11}{30}$, $d_3 = 1160 + 6 = 1166$, $q_3 = E\left(\frac{1166 \cdot 30}{11}\right) = 3180$, somit sehr nahe richtig

$$\sqrt{377\frac{1}{3}} = 19 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3180}.$$

Des Weiteren werden einige der heronischen Irrationalitäten vorgenommen, und zwar in erster Linie auch wiederum diejenigen, mit welchen sich Radicke beschäftigt hat. Wir schreiben einfach das jeweilige Schema hin:

1) $$\sqrt{135} = \sqrt{11^2 + 14},$$

$$r_1 = 14, \qquad d_1 = 22, \quad q_1 = 1 + E\left(\frac{22}{14}\right) = 2,$$

$$r_2 = 14 \cdot 2 - 22 - \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}, \quad d_2 = 46, \quad q_2 = 1 + E\left(\frac{92}{11}\right).$$

Um diesen letzteren Bruch zu umgehen — so meint v. Pessl — setzte Heron

$$\frac{5\frac{1}{2}}{46} \sim \frac{5}{46} = \frac{5 - \frac{1}{2}}{46 - \frac{46}{11}} \sim \frac{5}{42 - \frac{2}{11}} \sim \frac{5}{42}.$$

So bekam er

$$\sqrt{135} \sim \left(11 + \frac{1}{2} + \frac{5}{42} = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}\right)$$

2) $$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{29^2 + 45 - \frac{1}{16}},$$

$$r_1 = 45 - \frac{1}{16}, \qquad d_1 = 58, \qquad q_1 = 1 + E\left(\frac{58}{45 - \frac{1}{16}}\right) = 2,$$

$$r_2 = 90 - \frac{1}{8} - 58 - \frac{1}{2} = 32 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \; d_2 = 58 \cdot 2 + 2 = 118,$$

$$q_2 = 1 + E\left(\frac{118}{32 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}\right) = 4,$$

$$r_3 = 128 - 2 - \frac{1}{2} - 118 - \frac{1}{2} = 10 - \frac{6}{2} = 7,\ d_3 = 118 \,.\, 4 + 22 = 476,$$

$$q_3 = 1 + E\left(\frac{476}{7}\right) = 69 \sim 68,$$

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

3) $$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}},$$

$$r_1 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \qquad d_1 = 12, \qquad q_1 = 1 + E\left(\frac{12}{7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\right) = 2.$$

$$r_2 = 14 + 1 + \frac{1}{2} - 12 - \frac{1}{2} = 3,\ d_2 = 12.2 + 2 = 26,\ q_2 = 1 + E\left(\frac{26}{3}\right) = 9$$

Heron bricht jedoch schon mit $\frac{26}{3}$ ab und hat sonach

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim \left(6 + \frac{1}{2} + \frac{3}{26} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}\right)$$

erhalten.

Nehmen wir noch Nummer 1 aus Tannery's Abtheilung VI (Kap. I. §. 4) hinzu:

4) $$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(2\frac{1}{4}\right)^2 + 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}},$$

$$r_1 = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},\ d_1 = 4 + \frac{1}{2},\ q_1 = 1 + E\left(\frac{4\frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}\right) > \left(\frac{4\frac{1}{2}}{3} \sim \frac{3}{2}\right),$$

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}.$$

Es ist hierbei daran zu erinnern, dass auch der Bruch $\frac{2}{3}$ unter die Stammbrüche gerechnet ward.

Als einer der wenigen ganz genauen Werthe, die bei Heron vorkommen, sei noch $\sqrt{167 + \frac{1}{169}}$ hier vorgeführt.*) Das Verfahren v. Pessl's ergiebt hier den wahren Werth in sicherer und verhältnissmässig schneller Annäherung.

---

*) Von dieser Zahl ist bei unserer Aufzählung und Besprechung der heronischen Quadratwurzeln nicht die Rede gewesen, und zwar, wie leicht einzusehen, aus dem Grunde, weil man es hier nicht mit einer irrationalen, sondern mit einer rationalen Zahl zu thun hat. Diess ergiebt sich theoretisch schon aus dem Umstande, dass (s. o.) die Reste $r$ von einer gewissen Grenze ab Null werden; praktisch zeigt es sich, indem man

$$\sqrt{167+\frac{1}{169}}=\sqrt{\left(12+\frac{1}{13}\right)^2+21+\frac{2}{13}},$$

$$r_1=21+\frac{2}{13},\quad d_1=24+\frac{2}{13},\quad q_1=1+E\left(\frac{24\frac{2}{13}}{21\frac{2}{13}}\right)=2,$$

$$r_2=42+\frac{4}{13}-24-\frac{2}{13}-\frac{1}{2}=17+\frac{1}{2}+\frac{2}{13},d_2=2\left(24+\frac{2}{13}\right)+2=50+\frac{4}{13},$$

$$q_2=1+E\left(\frac{50\frac{4}{13}}{24\frac{2}{13}}\right)=3,$$

$$r_3=51+\frac{3}{2}+\frac{6}{13}-50-\frac{4}{13}-\frac{2}{3}=2-\frac{1}{78},\ d_3=150+\frac{12}{13}+4=154+\frac{12}{13}$$

$$q_3=1+E\left(\frac{154\frac{4}{13}}{2-\frac{1}{78}}\right)=78,$$

$$r_4=156-1-154-\frac{12}{13}-\frac{1}{13}=0,\ d_4=d_4,\ q_4=1+E\left(\frac{d_4}{0}\right)=\infty,\frac{1}{q_4}=0.$$

Man hat also, wie es auch Heron angiebt, genau

$$\sqrt{167+\frac{1}{169}}=12+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{78}$$

gefunden.

Die Methode, von der wir hiermit Abschied nehmen, zeichnet sich durch strenge Consequenz vortheilhaft aus. Allein den heronischen Zahlen ausnahmslos zu genügen, ist auch sie nicht im Stande, und so wird von ihr, trotzdem sie in ihrer Art allen mathematischen Anforderungen völlig genügt, doch in geschichtlicher Hinsicht das Nämliche gesagt werden müssen, wie über die Methode von Radicke.

§. 4. *Die Methode von Rodet und die Çulvasûtrâ's.* In nahem verwandtschaftlichen Verhältniss zu den beiden vorstehend besprochenen Ableitungweisen steht eine dritte Methode, welche von Rodet 272) aus-

$$\left(12+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{78}\right)^2=\left(12+\frac{72}{78}\right)^2=\left(12+\frac{12}{13}\right)^2=144+\frac{288}{13}$$
$$+\frac{144}{169}=144+22+\frac{2}{13}+\frac{144}{169}=166+\frac{170}{169}=167+\frac{1}{169}$$

bildet. Herr Radicke macht anlässlich dieses Zahlwerthes die unseres Erachtens recht annehmbare Conjektur: Heron habe ursprünglich die Wurzel blos aus 167 ausziehen wollen und den additiven Bruch nur um desswillen beigefügt, um eben einen ganz genau stimmenden Wurzelwerth zu erhalten.

gesprochenermaassen zu dem Zwecke ausgedacht wurde, die in der religiösen Mathematik der Inder (Kap. I, §. 14) auftretenden Näherungswerthe, zunächst für $\sqrt{2}$*), zu erklären. Wir glauben am Besten zu thun, wenn wir die Methode gleich in ihrer allgemeinsten algebraischen Einkleidung hier vorführen.

Wir gehen aus von

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}, \quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2a+1}$$

und setzen folgeweise

$$r' = r - (2a + \varepsilon_1)\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2 = \frac{r'}{2(a+\varepsilon_1)}$$

$$r'' = r' - (2[a + \varepsilon_1] + \varepsilon_2)\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_3 = \frac{r''}{2(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

$$r''' = r'' - (2[a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] + \varepsilon_3)\varepsilon_3, \qquad \varepsilon_4 = \frac{r'''}{2(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},$$

— — — — —

*) Ehe wir diese allgemeine Methode näher schildern, wollen wir zuvor doch noch der Thatsache gedenken, dass das eigenthümliche Zusatzglied, welches bei $\sqrt{2}$ in erster Linie den Scharfsinn der Interpreten herausfordert, in Cantor's grossem Werke 273) eine sehr einfache Deutung gefunden hat. Es wird in den Çulvasûtrâ's

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$$

gesetzt. Behält man vorerst nur die drei positiven Glieder bei und fasst dieselben zusammen, so ist

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12},$$

und dieser Näherungswerth ist uns, seines auch sonst häufigen Auftretens halber, nicht eben auffallend. Cantor glaubt nun, wie auch Thibaut 274), man habe

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 1 + \frac{25}{144} + \frac{5}{6} = 2 + \frac{1}{144}$$

ausgerechnet und dabei also $\frac{1}{144}$ zu viel bekommen. Es musste demnach noch eine Kleinigkeit in Abzug gebracht werden, und diese Grösse fand sich, indem man, ein noch viel kleineres Quadrat bei Seite lassend, $\frac{1}{144}$ durch $2 . \frac{17}{12}$ dividirte. So fand sich

$$\frac{1}{144} \cdot \frac{6}{17} = \frac{1}{24.17} = \frac{1}{3.4.34},$$

und damit haben wir eben das fragliche Zusatzglied gewonnen. Wir gestehen offen, dass wir, Rodet's elegante Manier in allen Ehren, dem Thibaut-Cantor'schen Erklärungsversuch wegen seiner Natürlichkeit den Vorzug einräumen möchten.

$$r^{(IV)} = r''' - (2[a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3]+\varepsilon_4)\varepsilon_4, \quad \varepsilon_5 = \frac{r^{(IV)}}{2(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\overset{(n)}{r} = \overset{(n-1)}{r} - (2[a+\sum_{i=1}^{i=n-1}\varepsilon_i]+\varepsilon_n)\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_{n+1} = \frac{r^{(n)}}{2(a+\sum_{k=1}^{k=n}\varepsilon_k)}.$$

Jedes neue $\varepsilon$ liefert uns ein — positives oder negatives — Zusatzglied, und wir haben sonach ein neues generelles Verfahren zur Darstellung einer jeden quadratischen Irrationalzahl durch eine Bruchreihe erhalten.

Wenden wir dasselbe auf

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1}$$

an. In diesem Falle ist unser Berechnungsschema: $a = 1$, $b = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$,

$$r' = 1 - \left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{2}{9} : 2\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{3.4},$$

$$r'' = \frac{2}{9} - \left(2\left[1+\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{12} = \frac{2}{9} - \frac{33}{144} = -\frac{1}{144},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{144} : 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{144} : \frac{2.17}{12} = -\frac{1}{3.4.34},$$

$$r''' = -\frac{1}{144} + \left(2\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right] - \frac{1}{12.34}\right)\cdot\frac{1}{12.34},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{12^2.34^2} : 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12.34}\right),$$

und da
$$-\frac{1}{144} + \frac{1155}{144.34^2} = -\frac{1}{12^2.34^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{12^2.34^2} : \frac{1154}{12.34} = -\frac{1}{3.4.34.1154}.$$

Bleibt man hierbei stehen, so ist

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} - \frac{1}{3.4.34.1154}$$

gefunden; Rodet hat also gezeigt, wie man den von Baudhayâna für $\sqrt{2}$ angegebenen aufsteigenden Kettenbruch beliebig weit fortzusetzen vermag.

Versuchen wir jetzt den indischen Werth für $\sqrt{3}$ in ganz derselben Weise zu entwickeln. Wir haben

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2+2}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad \varepsilon_1 = \frac{2}{3},$$

$$r' = 2 - \left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{9} : 2\left(1+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{30} = \frac{1}{3.5},$$

$$r'' = \frac{2}{9} - \left(2\left[1+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{1}{15} = \frac{2}{9} - \frac{1}{15}\cdot\frac{51}{15},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{225} : 2\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}\right) = -\frac{1}{225} \cdot \frac{15}{2} = \frac{2}{9} - \frac{17}{75} = -\frac{1}{225},$$

$$= -\frac{1}{3 \,.\, 5 \,.\, 52},$$

$$\sqrt{3} \sim 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \,.\, 5} - \frac{1}{3 \,.\, 5 \,.\, 52},$$

wie von dem indischen Autor angegeben ist. Bilden wir die einzelnen in dieser Bruchreihe steckenden Näherungswerthe, so erhalten wir

$$\sqrt{3} \sim 1, \quad \sqrt{3} \sim \frac{5}{3}, \quad \sqrt{3} \sim \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}\right),$$

$$\sqrt{3} \sim \left(\frac{780 + 520 + 52 - 1}{780} = \frac{1351}{780}\right).$$

Es ist in der That eine überraschende Erscheinung, gerade den vielumstrittenen archimedischen Näherungswerth, der sich sonst, sofern man nicht direkt zum Kettenbruche griff, so äusserst spröde zeigte, in ganz einfacher Weise aus dem Rodet'schen Berechnungsverfahren hervorgehen zu sehen. Allein immerhin scheint uns doch die Frage so gestellt werden zu müssen: Kann und darf man der Ansicht Raum geben, dass Archimedes und die älteren Inder einen ziemlich verwickelten algebraischen Algorithmus gekannt und jede Mittheilung darüber sorgfältig unterdrückt haben sollten, oder muss man aus historischen Gründen eine derartige Unterstellung von vorn herein verwerfen. Wer die Frage zu bejahen gedenkt, der mag sich unter den drei mathematisch nahezu gleich formvollendeten Methoden von Radicke, v. Pessl und Rodet die ihm am meisten passende auswählen. Die naturgemässe Errechnung von $\sqrt{3} \sim \frac{1351}{780}$ mag in den Augen Vieler der zuletzt abgehandelten Methode ein gewisses Uebergewicht verleihen; freilich aber entgeht sie andererseits auch nicht dem Einwande, den anderen archimedischen Werth $\sqrt{3} \sim \frac{265}{153}$ nicht liefern zu können.*)

§. 5. *Die zweite Methode P. Tannery's für die archimedischen Quadratwurzeln.* In §. 14 des vorigen Kapitels haben wir bereits in Erfahrung gebracht, dass Paul Tannery es für möglich hält, Archimedes sei zur Ermittelung der ihm eigenthümlichen Näherungswerthe von zwei ganz ver-

*) Rodet selbst weist (a. a. O.) auf die innige Verwandtschaft seiner Näherungsmethode mit derjenigen des Newton hin. Die nämliche Wahrnehmung hatte seiner Zeit auch Kästner gemacht, als er verschiedene Regeln an die Hand gab, die unbekannten Wurzeln höherer numerischer Gleichungen durch Bruchreihen auszudrücken. „Alle Methoden", so äussert er sich 275), „die unbekannte Wurzel einer höheren Gleichung annähernd aufzulösen, kommen darauf hinaus, Ergänzungen zu suchen, und damit auf das in Newton's Method of Fluxions, Introd. §. 19 gelehrte Verfahren."

schiedenen Standpunkten aus gelangt.. Er habe sich nämlich zuerst durch ein mehr empirisches Verfahren einen brauchbaren Werth verschafft und habe erst nachher, um aus jenem Anfangswerthe eine grössere Anzahl mehr und mehr genäherter Lösungen herzuleiten, den eigentlich methodischen Weg betreten. Von diesem letzteren, der schliesslich auf eine ganzzahlige Auflösung gewisser Specialformen der Pell'schen Gleichung hinausführte, haben wir — als von P. Tannery's erster Methode — bereits a. a. O. nähere Kenntniss genommen, und es bleibt uns demnach nur übrig, jetzt auch die Anfangsprocedur des Archimedes, so wie sie sich nach der Auffassung des französischen Forschers gestaltet, kennen zu lernen 276). Indem wir nachstehend die Tannery'sche Darstellung nicht unerheblich abkürzen, hoffen wir auch zur Vereinfachung derselben Einiges beigetragen zu haben.

Man habe zwei Zahlenreihen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots a_n \cdots,$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \cdots b_n \cdots$$

von der Beschaffenheit, dass, unter $c$ eine gewisse Constante verstanden,

$$a_n = b_{n-1} + a_{n-1},\quad b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2}$$

sein soll. Immer zwischen $a_n$ und $b_n$ liegt eine gewisse Grösse*), auf deren Werthbestimmung es ausschliesslich ankommt. Man soll nun — einerseits durch Addition, andererseits durch Wurzelausziehung — jene Grösse zwischen $a_n$ und $b_n$ mehr und mehr einengen, und der Annäherungsprocess soll als beendet gelten, wenn sich $a_n$ von $b_n$ nur noch um eine ganz geringfügige Grösse unterscheidet.

In dem für uns wichtigsten Falle ist

$$a_0 = 265,\ b_0 = 306,\ c = 153,\ c^2 = 23409,$$
$$a_1 = 265 + 306 = 571,\qquad b_1 = \sqrt{571^2 + 23409}.$$

Die dem Archimed zweifellos bekannte Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$ ergiebt

$$b_1 = 571 + \frac{23409}{1142},$$

*) Bekanntlich geht Archimedes auf die Bestimmung der Zahl $\pi$ aus; die in Kap. I, §. 2 geschilderten geometrischen Betrachtungen führen auf die Ungleichungen

$$\frac{2^n \cdot c}{a_n} > \frac{\pi}{6} > \frac{2^n \cdot c}{b_n}.$$

Wenn also $a_n \sim b_n = w$ gefunden ist, kann

$$\pi \sim \frac{3 \cdot 2^{n+1} \cdot c}{w}$$

gesetzt werden.

und, da die Ganzen richtig sind,

$$b_1 = 571 + 20 + \frac{1}{m},$$

$$b_1^2 = 571^2 + 400 + \frac{1}{m^2} + 22840 + \frac{1142}{m} + \frac{40}{m};$$

wird die kleine Grösse $\frac{1}{m^2}$ vernachlässigt, so ist*)

$$b_1^2 = 571 + 23240 + \frac{1182}{m}, \quad \frac{1182}{m} = 169, \quad m = \frac{1182}{169} < \frac{1}{7}.$$

Man hat sonach $b_1 = 591\frac{1}{8}$. Daraus folgt

$$a_2 = 571 + 591\frac{1}{8} = 1162\frac{1}{8}, \quad b_2 = \sqrt{\left(1162 + \frac{1}{8}\right)^2 + 23409}.$$

Wird ausgerechnet und der Bruch $\frac{1}{64}$ vernachlässigt, so ist

$$b_2 = \sqrt{1162^2 + \frac{581 + 46818}{2}} = \sqrt{1162^2 + \frac{47399}{2}}$$
$$= 1162 + 10 + \frac{1}{m} = 1172 + \frac{1}{m}.$$

Erheben wir in's Quadrat, so ist, da wieder $\frac{1}{m^2}$ wegbleiben kann,

$$b_2^2 = 1162^2 + 23340 + \frac{2344}{m}, \quad \frac{2344}{m} = \frac{719}{2},$$

$$m = \frac{4688}{719} \sim 8, \quad b_2 = 1172\frac{1}{8}.$$

In dritter Instanz ist

$$a_3 = 1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8} = 2334\frac{1}{4}, \quad b_3 = \sqrt{\left(2334 + \frac{1}{4}\right)^2 + 23409},$$

also, bei einer ähnlichen Behandlungsweise,

$$b_3 = \sqrt{2334^2 + \frac{2334}{2} + 23409} = \sqrt{2334^2 + 1167 + 23409} \sim 2334 + \frac{24576}{4668}.$$

Werden die Ganzen herausgezogen, so bleibt

$$b_3 = 2334 + 5 + \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{m} \sim \frac{1}{4}, \quad b_3 = 2339\frac{1}{4}.$$

---

*) Eine ganz befriedigende Aufklärung des Grundes, warum Archimedes $\sqrt{571^2 + 23409} \sim 591\frac{1}{8}$ und nicht, wie man zu erwarten berechtigt wäre, $\sim 591\frac{1}{7}$ setzt, ist auch Tannery sowenig wie irgend einer seiner Vorläufer beizubringen in der Lage, wie denn eine solche Aufklärung in der That nicht erbracht werden zu können scheint. Archimed hat in diesem Punkt eine gewisse Willkür walten lassen.

Endlich ist

$$a_4 = 2334\,\tfrac{1}{4} + 2339\,\tfrac{1}{4} = 4673\,\tfrac{1}{2},\ b_4 = \sqrt{\left(4673 + \tfrac{1}{2}\right)^2 + 23409},$$

$$b_4 = \sqrt{4673^2 + 4673 + 23409} = \sqrt{4673^2 + 28082} \sim 4673 + \frac{28082}{9346},$$

$$b_4 = 4673 + 3 = 4676.$$

Damit sind die beiden Werthe $a_4$ und $b_4$ einander für den von Archimedes verfolgten Zweck nahe genug gerückt. Gehen wir noch einen einzigen Schritt weiter, so ist

$$a_5 = 4673\,\tfrac{1}{2} + 4676 = 9349\,\tfrac{1}{2},\ b_5 = \sqrt{\left(9349 + \tfrac{1}{2}\right)^2 + 23409},$$

$$b_5 = \sqrt{9349^2 + 32758} \sim \left(9349 + \frac{32758}{18698} \sim 9350\,\tfrac{1}{2}\right).$$

Mit einer allen Anforderungen genügenden Genauigkeit könnte mithin

$$a_n \sim b_n = w = 9350$$

genommen werden.

Um in der nämlichen Art und Weise die Entstehung der archimedischen Näherungswerthe zu erklären, kann man davon ausgehen, dass zuerst

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} = 1 + \frac{2}{2.1+1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

gesetzt ward. Weiterhin folgte durch Quadrirung

$$\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{m}\right)^2 = \frac{25}{9} + \frac{10}{3m} = 3,\quad \frac{10}{3m} = \frac{2}{9},\quad m = 15.$$

Nachdem auf diese Weise die Relation

$$26^2 - 3.15^2 = 1$$

ermittelt war, konnten die weiteren Näherungswerthe im Sinne der ersten Methode von P. Tannery mit Hülfe der Pell'schen Gleichung gefunden werden. Doch war es auch möglich (vgl. den vorhergehenden §.)

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{n}\right)^2 = 3,\quad \frac{26^2}{15^2} + \frac{52}{15n} = 3,\quad n = -\frac{1}{15.52} = -\frac{1}{780}$$

zu setzen und so

$$\sqrt{3} \sim \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{780} = \frac{1351}{780}\right)$$

zu berechnen.

Diese Methode Tannery's dürfte die richtigen Fingerzeige an die Hand geben. Indem sie nur die Relationen

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a},\quad \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$$

voraussetzt, im Uebrigen aber auf die Anbringung ganz einfacher und naheliegender Verbesserungen an diesen primären Näherungswerthen sich beschränkt, scheint sie völlig in den Kreis der einem griechischen Mathematiker mit Grund beizulegenden Rechnungskunstgriffe zu passen. Es kommt hinzu, dass P. Tannery, der sich auf das Rechnen mit griechischen Zahlzeichen ausdrücklich eingeübt zu haben versichert, bei der Ausführung dieser Wurzelausziehungen nach griechischem Muster nicht die geringsten Schwierigkeiten gefunden zu haben behauptet. Wir glauben, dass gegen die hier skizzirte Methode, alle archimedischen Werthe durch einfache successive Annäherung auszurechnen, die wenigsten Bedenken sich erheben lassen können.

§. 6. *P. Tannery's kritische Durchmusterung der heronischen Näherungswerthe.* Das, wie wir uns überzeugt zu haben glauben, allein richtige und zweckdienliche Verfahren, die heronischen Quadratwurzeln auf ihre Entstehung zu prüfen, ist von Tannery angegeben worden. Derselbe begnügt sich nicht damit, ein irgendwie geartetes Schema der Berechnung a priori aufzustellen und demselben alsdann die zu untersuchenden Zahlen nach Möglichkeit anzupassen, wobei es, wie wir sahen, ohne einzelne Willkürlichkeiten auch im günstigsten Falle nicht abgehen kann, sondern er geht von der Ansicht aus, es sei durchaus nicht erforderlich, von einem wesentlich auf's Praktische gerichteten Mathematiker, wie Heron, vorauszusetzen, dass er sich mit eherner Consequenz stets an ein und dasselbe Verfahren gehalten habe. Wir glauben dieser Ansicht voll und ganz zustimmen zu sollen. Der ganze Text der heronischen Schriften liefert uns die mannigfaltigsten Belege dafür, dass es deren Autor hauptsächlich darauf ankam, rasch und sicher zu einem unmittelbarer Anwendung fähigen Resultate zu gelangen. So hat denn Tannery, wie wir in Kap. I, §. 4 sahen, sämmtliche quadratische Irrationalitäten, die bei Heron unsere Aufmerksamkeit erregen, in VII Abtheilungen zerlegt und für jede dieser Gruppen ein einheitliches Berechnungsverfahren nachgewiesen 277). Die Rodet'sche Methode kommt dabei zu grosser Geltung, freilich aber mit vielseitigen Aenderungen, wie solche eben aller Wahrscheinlichkeit nach der griechische Geometer in seinem Interesse liegend fand. Wir geben im Folgenden eine eingehende Analyse der Tannery'schen Schrift, uns jedoch vorbehaltend, ab und zu unserer in Details abweichenden Meinung ebenfalls ihr Recht zu Theil werden zu lassen.

*Abtheilung I.* Betreffs der hierher gehörigen Werthe besteht zwischen sämmtlichen Fachmännern keinerlei Meinungsverschiedenheit darüber, dass dieselben durch Anwendung der Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

gefunden worden sind. Die näheren Nachweise hiezu sind in Kap. II, §. 2 beigebracht worden.

*Abtheilung II.* Deren Mitglieder unterscheiden sich von denjenigen der vorausgehenden Abtheilung blos in dem Punkt, dass bei der Zerlegung von $\frac{b}{2a}$ in Stammbrüche eine erste Annäherung für hinreichend befunden wurde. Wir haben hier folgende Daten zu nennen:

$$\sqrt{58+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\sqrt{7^2+9+\frac{7}{16}}\sim\left(7+\frac{151}{224}=7+\frac{2}{3}+\frac{5}{672}\sim 7\frac{2}{3}\right).$$

Hier beträgt der Fehler nur den 134. Theil der Einheit.

$$\sqrt{444+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\sqrt{21^2+3+\frac{4}{9}}\sim\left(21+\frac{31}{378}\sim 21\frac{1}{12}\right).$$

$$\sqrt{3400}=\sqrt{58^2+36}\sim\left(58+\frac{36}{116}\sim 58\frac{1}{3}\right).$$

$$\sqrt{54}=\sqrt{7^2+5}\sim\left(7+\frac{5}{14}\sim 7\frac{1}{3}\right).$$

Darüber würde sich allerdings streiten lassen, ob nicht dieser letztere Werth der — zweifellos den Indern und Arabern, wahrscheinlich aber auch den Griechen bekannten — Näherungsformel

$$\sqrt{a^2+b}\sim a+\frac{b}{2a+1}$$

seine Entstehung verdankt.

*Abtheilung III.* Wieder eine Stufe höher steigend, sind wir bei den Zahlwerthen der dritten Abtheilung angelangt. Erschien die in I und II angewandte Regel nicht ausreichend genau, so zog man aus $\frac{b}{2a}$ den nächstliegenden Stammbruch oder setzte dafür den nächstgrösseren Stammbruch $\frac{1}{m}$ und bekam so, unter $q$ eine noch zu bestimmende ganze Zahl verstanden,

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+b}\sim\left(a+\frac{b}{2a}\sim a+\frac{1}{m}\pm\frac{1}{q}\right).$$

So fand sich

$$\frac{1}{q}=\frac{A-\left(a+\frac{1}{m}\right)^2}{2\left(a+\frac{1}{m}\right)}.$$

Diesem Gesetze ordnen sich nachstehende Fälle unter:

$$\sqrt{135}=\sqrt{11^2+14}\sim\left(11+\frac{14}{22}=11+\frac{2}{3}-\frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q}=\frac{135-\left(11+\frac{2}{3}\right)^2}{2\left(11+\frac{2}{3}\right)}=\frac{135-121-14-1-\frac{1}{9}}{\frac{70}{3}}=-\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{70}=-\frac{10}{210}=-\frac{1}{21}$$

Nun ist $\frac{2}{3} - \frac{1}{21} = \frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$, somit, wie angegeben,

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}.$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim \left(6 + \frac{7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{13} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 36 - 6 - \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{13}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{3}{26} = \frac{1}{13} + \frac{1}{26},$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

$$\sqrt{6300} = \sqrt{79^2 + 59} \sim \left(79 + \frac{59}{158} = 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{6300 - \left(\frac{278}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{278}{3}} = \frac{56700 - 56644}{9} \cdot \frac{3}{476} = \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{476} = \frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102},$$

$$\sqrt{6300} \sim 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}.$$

$$\sqrt{1575} = \sqrt{39^2 + 54} \sim \left(39 + \frac{54}{78} = 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1575 - \left(\frac{119}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{119}{3}} = \frac{14175 - 14161}{9} \cdot \frac{3}{238} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{238} = \frac{1}{3.17} = \frac{1}{51},$$

$$\sqrt{1575} \sim 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51}.$$

$$\sqrt{216} = \sqrt{14^2 + 20} \sim \left(14 + \frac{20}{28} = 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{216 - \left(\frac{44}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{44}{3}} = \frac{1944 - 1936}{9} \cdot \frac{3}{88} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{3.11} = \frac{1}{33},$$

$$\sqrt{216} \sim 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}.$$

*Abtheilung IV.* Nicht ganz fügen sich dieser Regel die Wurzeln

$$\sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9},$$

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

und Tannery lässt dieselben deshalb bei seiner Betrachtung aus dem Spiele. Indess scheint uns doch die Flinte durchaus nicht in's Korn geworfen werden

zu müssen. Wir halten uns zunächst an die zweite Wurzel und führen unsere Methode strenge durch. Man hat

$$\sqrt{356} = \sqrt{18^2 + 32} \sim 18 + \frac{32}{36}.$$

Hierin steckt nun allerdings zunächst der Stammbruch $\frac{2}{3}$, allein dessen Werth weicht doch von $\frac{8}{9}$ gar zu sehr ab; viel näher kommt schon der Bruch $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, und man hat somit

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{3}{4} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{356 - 324 - 27}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{75} = \frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

oder, wenn bei so weit getriebener Annäherung der Bruch $\frac{1}{120}$ als unwesentlich erachtet wird,

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Aehnlich bei der ersten Wurzel. Auch hier ist

$$\sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{3}{4} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{356 + \frac{1}{18} - 324 - 27 - \frac{9}{16}}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{5 - \frac{73}{18 \cdot 16}}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{657}{72 \cdot 75} = \frac{219}{1800}.$$

Dass dieser letztere Bruch mit $\frac{1}{9}$ identificirt ward, ist sicherlich nicht zu verwundern, und man hat somit den von Heron angegebenen Werth

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

gefunden.

Wir glauben durch Obiges dargethan zu haben, dass das Abtheilung III regelnde Verfahren auch für Abtheilung IV ausreichend ist.

*Abtheilung V.* Hierher zählen vier Wurzeln, welche Tannery mit Ausnahme der letzten für unächt hält; es sind diess:

$$\sqrt{5000} \sim 70 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9},$$

$$\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$$\sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Wir möchten zu überlegen geben, ob sich für die letzteren beiden nicht folgender Vorschlag rechtfertigen liesse. Wenn man dem Heron die Fähigkeit zutraut, Gleichungen von der Form

$$\alpha x - \beta y = 1$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, so konnte er etwa so folgern: Es ist für's Erste

$$\sqrt{208} = \sqrt{14^2 + 12} \sim \left(14 + \tfrac{12}{28} = 14 + \tfrac{3}{7}\right),$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{26^2 + 44} \sim \left(26 + \tfrac{44}{52} = 26 + \tfrac{11}{13}\right).$$

Nun lassen sich aber natürlich solche Brüche, deren Nenner eine Primzahl ist, schwerer in Stammbrüche auflösen, als andere; solche der letzteren Beschaffenheit mussten demnach mit möglichst geringem Fehler jenen substituirt werden, und es galt, die Gleichungen

$$3x - 7y = 1, \quad 11x - 13y = 1$$

aufzulösen. Die Lösungen waren $x = 12$, $y = 5$; $x = 6$, $y = 5$, also

$$\frac{5}{12} \sim \frac{3}{7}, \quad \frac{5}{6} \sim \frac{11}{13},$$

und wenn man jetzt in Stammbrüche zerlegt, ergiebt sich, wie gefordert,

$$\sqrt{208} \sim 14 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}, \quad \sqrt{720} \sim 26 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}.$$

*Abtheilung VI.* Dieselbe umfasst zwei Wurzelwerthe, bei deren Betrachtung man unwillkürlich der Ansicht huldigen muss, als habe Heron das Rationalmachen der Nenner, d. h. die Formel

$$\sqrt{a^2 + \frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{a^2 c^2 + bc}{c^2}} \sim \frac{1}{c}\left(ac + \frac{bc}{2ac}\right)$$

angewendet. Es ist zuerst

$$\sqrt{8 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}} = \sqrt{\frac{128 + 4 + 2 + 1}{16}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{11^2 + 14} \sim \left(\tfrac{1}{4}\left[11 + \tfrac{7}{11}\right] \sim \tfrac{35}{12}\right),$$

wenn für $\frac{7}{11}$ mittelst der Gleichung

$$7 \,.\, 3 - 11 \,.\, 2 = 1$$

der nächste Stammbruch $\frac{2}{3}$ eingesetzt ward. Dann ist also

$$\sqrt{8 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}} \sim \left(2 + \tfrac{11}{12} = 2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\right).$$

Des Ferneren ist $\sqrt{886 - \frac{1}{16}}$ gleich

$$\frac{1}{4}\sqrt{14175} = \frac{1}{4}\sqrt{119^2 + 14} \sim \left(\frac{1}{4}\left[119 + \frac{7}{119}\right] = 29 + \frac{3}{4} + \frac{7}{4.119}\right),$$

also, genau nach Heron's Vorschrift,

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

Tannery macht mit Recht darauf aufmerksam, dass es unzulässig sei, aus diesen Einzelfällen den Schluss zu ziehen, dem Heron sei wirklich die Rationalisirung des Nenner's geläufig gewesen. Man darf diess umso weniger, als, was Tannery entgangen zu sein scheint, die strikte mehrmalige Anwendung des von ihm selbst in Abtheilung II durchgeführten Verfahrens zum gleichen Ziele führt. Wir haben in erster Annäherung

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{29^2 + 45 - \frac{1}{16}} \sim \left(29 + \frac{45}{58} \sim 29\frac{1}{2}\right),$$

in zweiter $\dfrac{886 - \frac{1}{16} - \left(\frac{59}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{59}{2}} = \dfrac{14176 - 1 - 13924}{59.16} = \dfrac{251}{944} \sim \dfrac{1}{4}$, und in dritter

$$\frac{886 - \frac{1}{16} - \left(29\frac{3}{4}\right)^2}{2.29\frac{3}{4}} = \frac{886 - \frac{1}{16} - \frac{14161}{16}}{2 \cdot \frac{119}{4}} = \frac{14176 - 14162}{16} \cdot \frac{2}{119} = \frac{28}{16.119} = \frac{1}{68},$$

also sämmtliche Stammbrüche wie oben.

*Abtheilung VII.* Diese siebente Abtheilung Tannery's nimmt drei Werthe in sich auf, welche eine ganz isolirte Stellung einnehmen. Bei Berechnung von

$$\sqrt{108} \sim 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

hat Heron ganz offenbar einen Kunstgriff angewendet. Er setzte nämlich, von der ihm (Kap. I, §. 4) wohlbekannten Relation

$$\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

ausgehend,

$$\sqrt{108} = 6.\sqrt{3} \sim \left(6 \cdot \frac{26}{15} = \frac{156}{15} = 10 + \frac{5}{15} + \frac{1}{15}\right),$$

und diess ist eben der angegebene Näherungswerth.

Endlich gehören hierher noch die gänzlich unerklärlichen Näherungsformeln

$$\sqrt{2460\frac{15}{16}} \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51},$$

$$\sqrt{615\frac{15}{64}} \sim 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

Von beiden Wurzeln ist Tannery fest überzeugt, dass sie überhaupt niemals auf einem wie immer beschaffenen direkten Wege ausgewerthet worden sind. Wer sich die Mühe nimmt, all' unsere verschiedenen Methoden an denselben durchzuprobiren, wird wohl nicht umhin können, ihm in dieser Ansicht beizupflichten.

So hätten wir denn die geometrische Gruppe der heronischen Quadratwurzeln im Zusammenhange untersucht. Indem wir uns einige Bemerkungen darüber für die Schlussbetrachtung aufsparen, wenden wir dem letzten unserer sämmtlichen Untersuchungs-Objekte, der goniometrischen Gruppe von Heron's Irrationalitäten, nunmehr unser Augenmerk zu.

§. 7. *Die heronische Trigonometrie.* Wir gehen also zurück zu jenen merkwürdigen Formeln, mittelst deren Heron die Fläche $F_n$ ($n = 3, 4 \ldots 11$) eines regelmässigen $n$Eckes als Funktion der Seite $a_n$ auszudrücken lehrte. Wir gehen seine Tabelle an der Hand der Tannery'schen Darstellung 278) nochmals durch. Besserer Uebersicht halber haben wir die Formeln in Kap. I, §. 4 ebenfalls in vier Unterabtheilungen getheilt.

*Abtheilung I.* Es soll sein

$$F_3 \sim \frac{13}{30}a_3^2,\quad F_6 \sim \frac{13}{5}a_6^2,\quad F_{12} \sim \frac{45}{4}a_{12}^2.$$

Für die beiden ersten Ausdrücke galt offenbar $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$; da ferner die Gleichheit

$$\frac{45}{4}a_{12}^2 = 3\,(2 + \sqrt{3})\,a_{12}^2$$

bestehen soll, so muss $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$ genommen worden sein. Beide Näherungswerthe sind uns aus unseren bisherigen Untersuchungen genau genug bekannt.

*Abtheilung II.* Es soll sein

$$F_4 = a_4^2,\quad F_8 \sim \frac{29}{6}a_8^2.$$

Erstere Gleichheit besteht wirklich; aus der annähernden Gleichheit

$$\frac{29}{6}a_8^2 \sim 2\,(1 + \sqrt{2})\,a_8^2$$

folgt $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$. Von diesem Näherungswerthe dürfen wir aber das Gleiche, wie von jenen früheren, behaupten.

*Abtheilung III.* Es soll sein

$$F_5 \sim \frac{5}{3}a_5^2 \text{ oder } \sim \frac{12}{7}a_5^2,\quad F_{10} \sim \frac{15}{2}a_{10}^2.$$

Wäre dem so, so hätte man auch

$$\frac{5}{3}a_5^2 \text{ oder } \frac{12}{7}a_5^2 \sim \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a_5^2,\quad \frac{15}{2}a_{10}^2 \sim \frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a_{10}^2.$$

Hier musste also eine doppelte Annäherung erzielt werden. Wahrscheinlich nahm man zunächst $\sqrt{5} \sim 2$ und hatte also $\frac{1}{4}\sqrt{45}$ zu berechnen. Es ist

$$\sqrt{45} = \sqrt{6^2+9} \sim 6 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{45-\left(\frac{20}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{20}{3}} = \frac{405-400}{9}\cdot\frac{3}{40} = \frac{15}{360} = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{45} \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{96} \sim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}\right).$$

Der Bruch $\frac{1}{96}$ war verworfen worden.*)

Ganz auf die nämliche Art kann man die Flächenformel für das regelmässige Zehneck herleiten. Wenn zuerst $\sqrt{5} \sim 2$ gesetzt wird, so ist

$$\frac{5}{2}\sqrt{5+2\cdot 2}\,a_{10}^2 \sim \frac{5}{2}\sqrt{9}\,a_{10}^2 \sim \frac{15}{2}a_{10}^2.$$

Die zweite Fünfecksformel hingegen scheint auf der ersten Annäherung

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} \sim \left(2 + \frac{1}{2\cdot 2+1} = \frac{11}{5}\right)$$

beruht zu haben. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a_5^2 \sim \left(\frac{1}{4}\sqrt{47}\,a_5^2 = \frac{1}{4}\sqrt{7^2-2}\,a_5^2 \sim \frac{1}{4}\left(7-\frac{1}{7}\right)a_5^2 = \frac{12}{7}\,a_5^2\right),$$

wie Heron behauptet hat.

*Abtheilung IV.* Es soll sein

$$F_7 \sim \frac{43}{12}a_7^2,\quad F_9 \sim \frac{51}{8}a_9^2 \text{ oder } \sim \frac{19}{3}a_9^2,\quad F_{11} \sim \frac{66}{7}a_{11}^2.$$

Diese Formeln sind berechnet mit Hülfe der im „liber geeponicus" vorkommenden, freilich sehr rohen, Annäherungsformel

$$d_n \sim n\cdot\frac{a_n}{3},$$

wo $d$ den Durchmesser des um das $n$Eck von der Seite $a_n$ beschriebenen

*) Auf eine (a. a. O.) zu findende sehr hübsche Behandlung, welche Tannery dem Zusammenhang zwischen der Seite eines regelmässigen Fünfeckes und dem Diameter des dem letzteren umbeschriebenen Kreises angedeihen lässt, soll hier, als mit unseren Absichten nur in oberflächlicherer Beziehung stehend, nicht näher eingegangen werden.

Kreises bedeutet, und weiter mit Hülfe der ebenfalls heronischen und in ihrem ersten Theile richtigen Formel

$$F_n = n \cdot \frac{a_n}{2} \cdot \sqrt{\frac{d_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{4}} \sim \left(\frac{n \cdot a_n}{4} \sqrt{n^2 \cdot \frac{a_n^2}{9} - a_n^2} = \frac{n \cdot a_n^2}{12} \sqrt{n^2 - 9}\right).$$

Für $n = 7$ ist $\sqrt{n^2 - 9} = \sqrt{40} \sim 6 + \frac{2}{7}$, vorausgesetzt dass die bei den Arabern bekannte Formel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2(a+1)}, \quad \sqrt{6^2 + 4} \sim 6 + \frac{4}{14}$$

angewandt war. Dann ist

$$F_7 \sim \frac{7}{12} a_7^2 \left(6 + \frac{2}{7}\right) \sim a_7^2 \left(\frac{42}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right).$$

Mit Vernachlässigung eines Zwölftels ist also

$$F_7 \sim \frac{43}{12} a_7^2.$$

Bei $n = 9$ haben wir nach den heronischen Formeln

$$F_9 = \frac{3}{4} a_9^2 \sqrt{72} = \frac{1}{4} a_9^2 \sqrt{648} = \frac{1}{4} a_9^2 \sqrt{25^2 + 23} \sim \frac{1}{4} a_9^2 \left(25 + \frac{1}{2}\right),$$

also

$$F_9 \sim \frac{51}{8} a_9^2.$$

So erklärt Tannery (a. a. O.) die Relation; einfacher ist aber wohl die Ableitung, die hier folgt:

$$F_9 = \frac{3}{4} a_9^2 \sqrt{8^2 + 8} \sim \left(\frac{3}{4} a_9^2 \left[8 + \frac{1}{2}\right] \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{17}{2} a_9^2 = \frac{51}{8} a_9^2\right).$$

Da

$$3 . 51 - 19 . 8 = 1$$

ist, so konnte der ungefügigere Bruch $\frac{51}{8}$ auch durch den einfacheren $\frac{19}{3}$ ersetzt werden.

Auch den zuletzt an die Reihe kommenden Werth

$$F_{11} \sim \frac{66}{7} a_{11}^2$$

glauben wir etwas abweichend von Tannery und zwar folgendermassen verständlich machen zu sollen. Es ist

$$F_{11} = \frac{11}{12} a_{11}^2 \sqrt{112} = \frac{11}{3} a_{11}^2 \sqrt{7} = \frac{11}{21} a_{11}^2 \sqrt{343} \sim \frac{11}{21} a_{11}^2 \cdot 18,$$

da $19^2 = 361$ zu gross wäre. Damit ist

$$F_{11} \sim \left(\frac{198}{21} a_{11}^2 = \frac{66}{7} a_{11}^2\right)$$

gefunden.

Im Ganzen haben wir nunmehr eine Vorstellung davon, dass und wie Heron der Alexandriner

$$\text{cotang}\,\frac{360^0}{3},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{6},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{12},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{8},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{5},$$

$$\text{cotang}\,\frac{360^0}{10},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{7},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{9},\ \text{cotang}\,\frac{360^0}{11}$$

in Zahlen auszudrücken verstand.

---

## Schlussbetrachtung.

Wir werfen, nachdem das gesammte Material des I. Kapitels in den beiden anderen Abschnitten nach Möglichkeit verarbeitet worden ist, noch einen kurzen Rückblick auf den Gang unserer Untersuchung. Unsere wesentlichsten Ergebnisse glauben wir etwa in den folgenden Thesen zusammenfassen zu können.

I. Die Alten gingen bei der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln durchgängig von der Relation $\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$ aus und brachten an diesem Näherungswerthe in fast empirisch zu nennender Weise weitere Verbesserungen an. So verfuhr Heron durchaus, Archimedes wenigstens bei sehr grossen Zahlen.

II. Hatte man eine mehr oder minder befriedigende erste Annäherung, so gewann man methodisch, durch Betrachtungen, wie wir sie gegenwärtig bei der Auflösung der Pell'schen Gleichung anzustellen gewohnt sind, weitere bessere Näherungswerthe. Zeugen hiefür sind uns besonders Archimedes anlässlich seiner Berechnung von $\sqrt{3}$ und Theon Smyrnaeus.

III. Ein Kettenbruchverfahren, das irgendwie mit den bezüglichen Algorithmen der Neuzeit Aehnlichkeit besässe, existirte im eigentlichen Alterthum ebensowenig, wie eine bewusste Auflösung der Quadratwurzel in einer Bruchreihe, einzig das blos den Astronomen geläufige Berechnungsschema

$$\sqrt{A} \sim a + b \,.\, \overset{-1}{60} + c \,.\, \overset{-2}{60} + \cdots$$

ausgenommen.

IV. Dagegen scheinen sich schon im frühen Mittelalter, bei Indern, Arabern, Juden und durch deren Mitwirkung auch bei den Abendländern, die ersten drei und vier Näherungswerthe der Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cdots}}$$

eingebürgert zu haben, natürlich ebenfalls, ohne dass das eigentliche Wesen

des Kettenbruches zur Geltung kam. Bei Indern und Arabern sind auch bereits Spuren der Gleichung

$$\sqrt{A} \sim a + b \,.\, 10^{-1} + c \,.\, 10^{-2} + \cdots$$

anzutreffen. Auch Interpolationen zwischen aufeinanderfolgenden Näherungswerthen dürften bereits im Mittelalter vorgenommen worden sein.

In wieweit ein Leser unserer Arbeit uns in diesen aus derselben gezogenen Schlüssen beistimmen kann, müssen wir dahingestellt sein lassen. Wir massen uns nicht an, auf einem so schwierigen Gebiete abschliessende Leistungen erzielt zu haben, aber der Hoffnung glauben wir uns mit Bestimmtheit hingeben zu dürfen, dass fernerhin Niemand mehr in die Diskussion der bei den alten Mathematikern vorkommenden Quadratwurzeln wird eintreten können, ohne sich mit der vorstehenden Bearbeitung in der einen oder anderen Weise auseinandergesetzt zu haben.

---

## Nachschrift.

Nachdem der Druck vorstehender Abhandlung bereits völlig abgeschlossen war, kam dem Verf. durch die freundliche Vermittelung des Herrn M. Cantor eine handschriftliche Note des Herrn Oberlehrers Hunrath in Hadersleben zu, worin ein neuer und eigenartiger Weg zur Aufklärung des über den antiken Quadratwurzeln schwebenden Geheimnisses betreten wird. In Anbetracht der äusseren Umstände, unter welchen dieses Postskript zu Stande kommt, muss es natürlich bei einer kurzen Skizzirung des Gedankenganges sein Bewenden haben. Herr Hunrath, der — beiläufig bemerkt — strenge geometrisch vorgeht und auf diese geometrische Einkleidung der von ihm benutzten Sätze mit Recht Gewicht legt, geht von den Ungleichungen

$$a^2 > [m = a^2 - b] > (a-1)^2$$

aus und sucht sodann den Bruch $\frac{b}{2a}$ in der Art wieder zwischen Grenzen einzuschliessen, dass er

$$\frac{1}{z} \leqq \frac{b}{2a} < \frac{1}{z-1} \; (z \geqq 2)$$

setzt. Nunmehr beweist er die Richtigkeit der Relation

$$\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 > a^2 - b > \left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2$$

und gewinnt durch consequente Durchführung des in Obigem angedeuteten

Verfahrens immer mehr sich anschmiegende Grenzwerthe. Für $m = \sqrt{3}$ sind die aufeinanderfolgenden Grenzbeziehungen diese:

$$2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}, \text{ resp. } \frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3},$$

$$2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}, \text{ resp. } \frac{26}{15} > \sqrt{3} > \frac{31}{18},$$

$$2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.51}$$

$$\text{resp. } \frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Man bemerkt, dass diese Methode sehr viel Aehnlichkeit mit jener von Radicke hat, insoferne die Wurzel durch einen aufsteigenden Kettenbruch vom durchlaufenden Zähler 1 dargestellt wird; ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch darin begründet, dass bei Radicke die Vorzeichen der einzelnen Glieder dem Zufall überlassen, bei Hunrath dagegen an das strenge Gesetz des Alternirens gebunden bleiben. Zum entschiedenen Vorzug gereicht letzterem Ableitungsmodus der Umstand, dass sich ziemlich ungezwungen die charakteristischen Zahlen des Archimedes ergeben; an Natürlichkeit und Einfachheit aber scheint uns doch nach wie vor Tannery den Vorrang zu verdienen.

Auch die heronischen Zahlen prüft Herr Hunrath durch und weiss einzelne derselben überraschend einfach abzuleiten. Bei anderen dagegen versagt sein Verfahren, wie er selbst hervorhebt, und er scheint uns somit durch die negative Seite seiner Bemühungen für Tannery's Ansicht, dass der Alexandriner durchaus nicht nach einem consequenten Plane vorgegangen sei, einen neuen Beleg erbracht zu haben. Auch die Beeinflussung der Inder durch die Griechen erachtet Hunrath als feststehend.

# Citate.

1) Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik, Prag 1878. — 2) Ibid. S. 6. — 3) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880. S. 73 ff. — 4) Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876. S. 38 ff. — 5) Cantor, S. 112. — 6) Ibid. S. 154 ff. — 7) Ibid. S. 163. — 8) Allman, Greek geometry from Thales to Euklid, Part II, Hermathena, Vol. VII. S. 308 ff. — 9) Rothlauf, Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr, München 1878. S. 27. — 10) Cantor, S. 139. — 11) Dupuis, Le nombre géométrique de Platon, Paris 1881. — 12) Günther, Die platonische Zahl, Leopoldina, XVIII, 1882. — 13) Cantor, S. 191 ff. — 14) Procli Diadochi in primum librum Euclidis commentarius, ed. Friedlein, Lipsiae 1873. S. 427. — 15) Cantor, S. 155. — 16) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 132. — 17) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. S. 165 ff. — 18) Ibid. S. 184. — 19) Lamé-Chasles, Rapport sur un essai de M. Woepcke, Comptes rendus de l'acad. franç., séance du 14 février 1853. — 20) Lamé-Chasles, ibid. séance du 17 octobre 1853. — 21) Cantor, S. 300. — 22) Kästner, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 185. — 23) Archimedis Opera omnia una cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, Vol. I., Lipsiae 1880. S. 264. — 24) Ibid. S. 268 ff. — 25) Cantor, Gräko-indische Studien, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abth., 22. Band. S. 1 ff. — 26) Nesselmann, S. 109. — 27) Archimedes, ed. Heiberg, Vol. III., Lipsiae 1882. S. 272 ff. — 28) Nesselmann, S. 111. — 29) Archimedes, ed. Heiberg, Vol. III. S. 300. — 30) Nesselmann, S. 121 ff. — 31) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 37. — 32) Ibid. S. 170 ff. — 33) Aristarchus Samius de magnitudine solis et terrae, ed. Wallisius, Opera mathematica, Vol. III., Oxoniae 1699. S. 582. — 34) Grunert, Ueber Aristarch's Methode, Die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, Archiv d. Math. u. Phys., 5. Theil, S. 401 ff. — 35) Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst, Leipzig 1875. S. 8. — 36) Ibid. S. 14. — 37) Ibid. S. 60 ff. — 38) Ibid. S. 27. — 39) Cantor, Vorlesungen, S. 333. — 40) P. Tannery, L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Aléxandrie, Mém. de la société des sciences phys. et nat. de Bordeaux, (2 tome III., S. 362 ff. — 41) Cantor, Vorlesungen, S. 320. — 42) P. Tannery, S. 386 ff. — 43) Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, ed. Hultsch, Berolini 1864. — 44) Ibid. S. 163. — 45) Ibid. S. 182. — 46) Ibid. S. 183. — 47) Ibid. S. 184. — 48) Ibid. S. 185. — 49) Ibid. S. 112. — 50) Ibid. S. 130. — 51) Ibid. S. 212. — 52) Ibid. S. 184. — 53) Ibid. S. 93. — 54) Ibid. S. 94. — 55) Ibid. S. 95. — 56) Ibid. S. 95. — 57) Ibid. S. 110. — 58) Ibid. S. 185. — 59) Ibid. S. 217. — 60) Ibid. S. 212. — 61) Ibid. S. 110. — 62) Ibid. S. 126. —

63) Ibid. S. 185. — 64) Ibid. S. 92. — 65) Ibid. S. 95. — 66) Ibid. S. 183. — 67) Ibid. S. 96. — 68) Ibid. S. 96. — 69) Cantor, Vorlesungen, S. 335. — 70) Ibid. S. 51. — 71) Ibid. S. 334. — 72) Heron, ed. Hultsch, S. 212. — 73) Ibid. S. 226. — 74) Cantor, Vorlesungen, S. 337. — 75) Heron, ed. Hultsch, S. 231. — 76) Ibid. S. 58. S. 147. — 77) Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes, Leipzig 1880. S. 112. — 78) Cantor, Vorlesungen, S. 312ff. — 79) Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch, Leipzig 1870. — 80) Id., Die geogr. Fr. d. Eratosthenes, S. 7. S. 19. S. 185. S. 343. — 81) Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, Paris 1851, S. XI. — 82) Mollweide, Commentationes mathematico-philologicae, Lipsiae 1813. S. 72ff. — 83) Halma, La composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite pour la première fois en français, suivie de notes de Mr. Delambre, A Paris 1813. S. 421ff. — 84) Ideler, Ueber die Trigonometrie der Alten, Monatl. Corresp. z. Bef. d. Erd- u. Himmelskunde, 26. Band. S. 3ff. — 85) Mollweide, S. 73. — 86) Theonis Smyrnaei, philosophi Platonici, compositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. Hiller, Lipsiae 1878. — 87) Ibid. S. 43. — 88) Unger, Kurzer Abriss der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant, Erfurt 1843. S. 17ff. — 89) Cantor, Vorlesungen, S. 365ff. — 90) Nesselmann, S. 229. — 91) P. Tannery, L'éducation Platonicienne, Revue philosophique, tome XI. S. 291. — 92) Cantor, Vorlesungen, S. 392; Nesselmann, S. 230. — 93) Nesselmann, S. 231. — 94) Cantor, Vorlesungen, S. 414. — 95) Ibid. S. 404. — 96) Rodet, L'algèbre d'Al-Kharîzmi et les méthodes indienne et grecque, Paris 1878. S. 60. — 97) Cantor, Vorlesungen, S. 405. — 98) Ibid. S. 418. — 99) Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum, ed. Henry, Halis Saxonum 1879. — 100) Nesselmann, S. 144ff. — 101) Ibid. S. 137. — 102) Ibid. S. 147. — 103) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 25. — 104) Nesselmann, S. 148. — 105) Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus, Ansbach 1866. S. 23ff. — 106) Poggendorff, Bibliographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1. Band, Leipzig 1865. S. 100. — 107) C. v. Wolff, Kurzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schriften, Halle a. S. 1717. S. 7. — 108) Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten, 1. Band, Chemnitz 1792. S. 124. — 109) Das Rechenbuch des Maximus Planudes (ΜΑΞΙΜΟΥ ΜΟΝΑΧΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΝΟΥΔΟΥ ΨΗΦΟΦΟΡΙΑ ΚΑΤ' ΙΝΔΟΥΣ 'Η ΛΕΓΟΜΕΝΗ ΜΕΓΑΛΗ) ed. Gerhardt, Halle a. S. 1865. — 110) Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes vom VII. bis XIII. Jahrhundert, Erlangen 1865. S. 85ff. — 111) Cantor, Vorlesungen, S. 433ff. — 112) Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem Griechischen übersetzt von Waeschke, Halle a. S. 1878. — 113) Gerhardt, S. 29; Waeschke, S. 39. — 114) Waeschke, S. 43ff. — 115) Ibid. S. 46ff. — 116) Ibid. S. 54. — 117) Ibid. S. 40. — 118) Mollweide, S. 65ff. — 119) Cantor, Agrimensoren, S. 89. S. 201. — 120) Ibid. S. 92. — 121) Ibid. S. 106. — 122) Ibid. S. 122. — 123) Anicii Manlii Torquati Severini Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque; accedit geometria quae fertur Boetii, ed. Friedlein, Lipsiae 1867. S. 404ff. — 124) Cantor, Agrimensoren, S. 133. — 125) Ibid. S. 137. — 126) Ibid. S. 163. — 127) Ibid. S. 173. — 128) Cantor, Vorlesungen, S. 745. — 129) Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch von

Sohncke, Halle a. S. 1839. S. 519 ff. — 130) Zuckermann, das Mathematische im Talmud; Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhaltes, Breslau 1878. — 131) Cantor, Rezension hiezu, Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-liter. Abtheilung, 23. Band. S. 89. — 132) Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, 2. Heft, Halle a. S. 1878. S. 83 ff. S. 116 ff. — 133) Zuckermann, S. 16. — 134) Ibid. S. 34 ff. — 135) Ibid. S. 60. — 136) Ibid. S. 16. — 137) Ibid. S. 6. — 138) Ibid. S. 8. — 139) Ibid. S. 9. — 140) Zunz, Zur Geschichte und Literatur, 1. Band, Berlin 1845. S. 177. — 141) Zuckermann, S. 11. — 142) Cantor, Vorlesungen, S. 551. — 143) Rodet, Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connues dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 99. — 144) Cantor, Vorlesungen, S. 560. — 145) Ibid. S. 527. — 146) Ibid. S. 531. — 147) Hankel, S. 202. — 148) Thibaut, The Súlvasútras, Calcutta 1875. — 149) Cantor, Gräko-indische Studien, S. 1 ff. — 150) Günther, Die neuesten Forschungen über den Zusammenhang orientaler mit abendländischer Mathematik, Leopoldina, Heft XIII. S. 38 ff. — 151) Thibaut, S. 13; Cantor, Vorlesungen, S. 545. — 152) Ibid. S. 546. — 153) Ibid. S. 547. — 154) Ibid. S. 548. — 155) Rodet, Sur une méthode, S. 100. — 156) Cantor, S. 655 ff. — 157) Ibid. S. 623. — 158) Ibid. S. 625. — 159) Al Kâfî fîl Hisâb des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî, übers. v. Hochheim, 2. Heft, Halle a. S. 1880. S. 10 ff. — 160) Id., ibid., 3. Heft, Halle a. S. 1882. S. 2. — 161) Cantor, Vorlesungen, S. 641. — 162) Ibid. S. 633. — 163) Alkarkhî, 2. Heft. S. 12 ff. — 164) Rodet, Sur les méthodes d'approximation chez les Arabes, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 160. — 165) Beha-Eddin's Essenz der Rechenkunst arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann, Berlin 1843. S. 15. — 166) Kaestner, Geschichte der Mathematik, 1. Band. S. 97. — 167) Peacock, Arithmetic including a history of the science, London 1849. S. 436. — 168) Cantor, Vorlesungen, S. 192. — 169) Ibid. S. 697. — 170) Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans, Paris 1855. S. 36 ff. — 171) Friedlein, S. 154. — 172) Hankel, S. 185. — 173) Roeber, Die ägyptischen Pyramiden in ihren ursprünglichen Bildungen, nebst einer Darstellung der proportionalen Verhältnisse im Parthenon zu Athen, Dresden 1855. — 174) Günther, A. Zeising als Mathematiker, Zeitsch. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheilung, 21. Band. S. 157 ff. — 175) Sonnenburg, Der goldene Schnitt, ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung, Bonn 1881. — 176) Ibid. S. 20. — 177) Günther, Das mathematische Grundgesetz im Bau des Pflanzenkörpers, Kosmos, 3. Band. — 178) Langer, Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze, Halle a. S. 1878. S. 59 ff. — 179) G. Hauck, Die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft, Berlin 1880. S. 8. — 180) Hultsch, Das Grundmaass der griechischen Tempelbauten, Archäol. Zeitung, 38. Jahrg. S. 91 ff. — 181) Id., Die Bestimmung des attischen Fusses nach dem Parthenon und Theseion, ibid., 36. Jahrg. S. 172 ff. — 182) Id., Die Maasse des Heraion und einiger anderer Tempel, ibid., 36. Jahrg. S. 99 ff. — 183) Ibid. S. 105. — 184) Ibid. S. 106. — 185) Hultsch, Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Joniens, Berlin 1881. S. 19. — 186) Id., Rezension zu Cantor's Vorlesungen, Jahrb. f. Philol. u. Pädag., Jahrg. 1881, S. 587. — 187) Ibid. S. 591. — 188) Cantor, Vorlesungen, S. 151. — 189) G. Hauck, Die subjektive Perspektive und die horizontalen Curvaturen des dorischen Styles, Stuttgart 1879. S. 91 ff. — 190) Nesselmann, S. 110.

— 191) Friedlein, S. 81. — 192) Cantor, Vorlesungen, S. 450. — 193) Hultsch, Rezension zu Brandis, Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien, Jahrb. f. Philol. und Pädag., Jahrg. 1870, S. 534. — 194) Friedlein, S. 94. — 195) Rodet, Sur les méthodes etc., S. 67. — 196) Id., Sur une méthode d'approximation etc, S. 99. — 197) Cantor, Vorlesungen, S. 559. — 198) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 14. — 199) Id., Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all' Euler, Bullett. di storia e di bibliogr. delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 226. — 200) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, tome IV., Paris 1865. S. 98. — 201) Larismetique de maistre Estienne de la Roche dict Villefranche, Lyon 1520. — 202) Günther, Rezension zu Treutlein, Die deutsche Rechenkunst im XVI. Jahrhundert, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 2. Jahrg. S. 430. — 203) Rodet, Sur les méthodes etc., S. 162 ff. — 204) Nesselmann, S. 210. — 205) Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Hauniae 1879. S. 62. — 206) Cantor, Vorlesungen, S. 274. — 207) Ibid. S. 273. — 208) Gauss, Rezension zu Mollweide's Commentationes, Gött. gel. Anz. 1808, S. 49 ff. — 209) Ibid. S. 51. — 210) Nesselmann, S. 109. — 211) Cantor, Vorlesungen, S. 370. — 212) De Lagny, Méthode générale pour transformer les nombres irrationaux en séries de fractions rationelles les plus simples et les plus approchées qu'il soit possible, Mém. de math. et de phys. tirés des registres de l'acad. royale des sciences, Année 1723. S. 55 ff. — 213) Ibid. S. 60. — 214) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 18. — 215) Mollweide, S. 74 ff. — 216) Ibid. S. 76. — 217) Ibid. S. 72. — 218) Hauber, Ueber nähernde rationale Ausdrücke für incommensurable Quadratwurzeln, in Beziehung auf Archimedes' Kreismessung, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., 4. Band. S. 95 ff. — 219) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 21. — 220) J. L. Lagrange's mathematische Werke, deutsch von Crelle, 3. Band. Berlin 1824. S. 130 ff. — 221) Nesselmann, S. 182. — 222) Archimedis opera nonnulla a Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversa et commentariis illustrata, Venetiis 1588; Eutocii Ascalonitae commentarius, Bl. 3 ff. — 223) Buzengeiger, Methode der griechischen Geometer, um für Wurzeln solcher Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, annähernde rationale Brüche zu finden, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., 5. Band. S. 85 ff. — 224) Ibid. S. 89 ff. — 225) Libri, tome IV. S. 88 ff. — 226) Woepcke, lettera a D. B. Boncompagni intorno ad un metodo per la determinazione approssimativa degl' irrazionali di secondo grado, Bullett. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 255 ff. — 227) Kaestner, Gesch. d. Math., 1. Band. S. 60 ff. — 228) Favaro, Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo, Bullet. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 484 ff. — 229) Ibid. S. 487 ff. — 230) Ibid. S. 489 ff. — 231) Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, Drei mathematische Charakterbilder aus dem XVI. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 2. Band. S. 373. — 232) Favaro, S. 492 ff. — 233) Ibid. S. 498 ff. — 234) J. Bertrand, Traité d'arithmétique, Paris 1851. S. 287 ff. — 235) Oversigt over de kgl. Danske Videnskab. Selskabs Virksomhed, 1875. S. 21 ff. — 236) Heiberg, Quaestiones Archimedeae, S. 65 ff. — 237) Zeuthen, Nogle hypotheser om Arkhimedes kvadratrodsberegning, Tidsskrift for Mathematik, VI. Raekke, 3. Aargang. S. 150 ff. — 238) Alexejeff, Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 167 ff. — 239) Cantor, Vorlesungen, S. 141. — 240) Ch. Henry, Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et sur deux approximations de $\sqrt{3}$, Bull. des sciences math. et

astron., (2) tome III. S. 515 ff. — 241) Ibid. S. 518. — 242) Alexejeff, S. 170. — 243) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungswerthe, München 1855. S. 7. — 244) Günther, Ueber aufsteigende Kettenbrüche, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 21. Band. S. 189. — 245) Ibid. S. 191. — 246) Serret, Sur le développement en fraction continue de la racine quarrée d'un nombre, Journal des math. pures et appliquées, tome XII. S. 518. — 247) Boncompagni, Question 1111, Nouv. Ann. de Mathém., (2) tome XII. S. 191. — 248) Moret-Blanc, Solution de la question 1111, ibid. S. 477 ff. — 249) Günther, Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Grössen, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen, 6. Heft. S. 82 ff. — 250) P. Tannery, Sur la mesure de cercle d'Archimède, Bordeaux, 1881. — 251) Ibid. S. 12. — 252) Ibid. S. 17. — 253) Hankel, S. 200 ff. — 254) P. Tannery, Sur la mesure etc. S. 19. — 255) Ibid. S. 20 ff. — 256) Ibid. S. 22. — 257) Zeuthen, S. 182 ff. — 258) Ibid. S. 184. — 259) Günther, Ueber einen Spezialfall der Pell'schen Gleichung, Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen, 18. Band. S. 19 ff. — 260) Ibid. S. 22 ff. — 261) Krummbiegel u. Amthor, Das problema bovinum des Archimedes, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheil., 25. Band. S. 121 ff. — 262) Ibid. S. 159. — 263) P. Tannery, Sur le problème des boeufs d'Archimède, Bull. des sciences math. et astron., (2) tome V. Sep. Paris 1881. — 264) Heilermann, Bemerkungen zu den irrationalen Näherungswerthen der archimedischen Quadratwurzeln, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheil., 26. Band. S. 121 ff. — 265) Ibid. S. 123. — 266) E. Lucas, Recherches sur plusieurs travaux de Léonard de Pise et sur diverses questions de l'arithmétique supérieure, Bull. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., tomo X. S. 131. — 267) Ibid. S. 135 ff. — 268) E. Lucas, Sur les fractions numériques simplement périodiques, Bruxelles 1878. S. 2. — 269) Ibid. S. 14 ff. — 270) Ibid. S. 4. — 271) Ibid. S. 15. — 272) Rodet, Sur une méthode d'approximation etc., S. 98 ff. — 273) Cantor, Vorlesungen, S. 545. — 274) Thibaut, S. 13 ff. — 275) Kaestner, Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, Göttingen 1794. S. 213. — 276) P. Tannery, Sur la mésure etc. S. 2 ff. — 277) Id., L'arithmétique des Grecs dans Héron S. 376 ff. — 278) Ibid. S. 386 ff.

---

## Verbesserungen.

Seite 27, Z. 11 v. u. l. $\sqrt{4500}$. — S. 29 ist zur Randnote zu bemerken, dass nach Heiberg (Literargesch. Studien über Euklid) Dasypodius nicht das hier genannte, sondern ein anderes Werk des Barlaam zum Druck befördert hat. — S. 75, Z. 5 v. o. statt $AEFG$ l. $AE'F'G'$. — S. 88, Z. 16 u. 19 v. o. l. $E(\sqrt{a})$. — S. 108, Z. 14 v. u. l. $E\left(\frac{d_1}{r_1}\right)$.

# DER TRAKTAT FRANCO'S VON LUETTICH:

## „DE QUADRATURA CIRCULI."

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. WINTERBERG.

In der Ausgabe von Aug. Mai: „Classici autores e vaticanis codicibus editi". Roma 1831. wird unter den, in der Zeit des Verfalls der Wissenschaften des Abendlandes hier und da sporadisch auftretenden Vertretern der exacten Fächer u. A. (cfr. III. 346—348 ebendas.) des Dominikanermönchs Franco von Lüttich als Verfasser eines Traktats „de quadratura circuli" Erwähnung gethan, wovon ein Manuscript sich gegenwärtig noch in der Vaticanischen Bibliothek befindet, über dessen Inhalt jedoch a. a. O. nähere Angaben fehlen. Nur soviel wird angedeutet (cfr. M. Cantor, Geschichte der Mathematik I. S. 649—650), dass in jenem Manuscript die Resultate früherer Autoren über denselben Gegenstand, u. A. Adelbold, Wazo als fehlerhaft nachgewiesen und sodann eine neue Lösung des Problems gegeben wird. Montucla erwähnt in seiner Geschichte der Mathematik Franco's auffallenderweise nicht, während Adelbold nicht blos von ihm genannt, sondern auch seinen wissenschaftlichen Leistungen nach characterisirt wird. Dagegen findet sich ebenda eine Notiz, worin Campanus von Novara als Autor eines Traktats de quadratura circuli erwähnt wird, dessen Inhalt, obwohl derselbe hiernach einer viel späteren Zeit entstammen würde, doch kaum wesentlich mehr Neues zu bieten scheint, als der in Rede stehende, denn derselbe wird a. a. O. mit den Worten characterisirt: „on a enfin de lui (scil. Campanus) un traité intitulé: „de quadratura circuli" où s'étayant du rapport donné par Archimède il resout quelques problèmes sur le cercle. Il faut convenir que le bon Campanus se fourvoye ici en confondant ce qui chez Archimède n'est qu'un rapport approché avec un rapport exact" etc. Ohne an diesem Ort auf eine nähere Untersuchung einzugehen, ob und inwiefern hier vielleicht eine Verwechselung beider Autoren vorliegt, scheint es doch schon wegen der Bedeutung des Gegenstandes an sich, der bekanntlich Jahrhunderte hindurch die hervorragendsten Gelehrten jener Zeit erfolglos beschäftigte, von Interesse den erwähnten Traktat etwas näher ins Auge zu fassen. — Die davon in der Vaticanischen Bibliothek enthaltene Handschrift gehört der älteren Sammlung an und trägt die Nummer 3123. Sie ist auf Pergament geschrieben, im Allgemeinen noch gut erhalten, bis auf den oberen Rand verschiedener Blätter, der in Folge von Feuchtigkeit verschimmelt, wodurch einzelne Stellen unleserlich geworden und gehört den Buchstabencharacteren nach unzweifelhaft dem zwölften Jahrhundert an. Sie ist mit zwei andern Handschriften aus derselben Zeit in einem braunen Ledereinbande enthalten, welche ihr daselbst vorangestellt sind, die erste „Computus Gerlandi" überschrieben ein ziemlich

umfangreiches Werk, das sich über Arithmetik, Geometrie und Astronomie erstreckt. Diesem folgt sodann eine lateinische Uebersetzung und Erläuterung von Euklid's Werken, durch Boetius*).

Diesem schliesst sich der 28 Folien fassende Traktat Franco's an. Die Schrift ist mit Ausnahme einzelner zweifelhafter Stellen gut und leserlich, die Anfangsbuchstaben dem Gebrauch damaliger Zeit gemäss, sorgfältig in rother Tinte und in grösseren Dimensionen ausgeführt. Die Abkürzungen lassen, sofern sie auf gewissen durchgehends beobachteten Prinzipien beruhen nur selten Zweifel. Hinderlich für das Verständniss sind nur die, gerade an den interessantesten Stellen oft eingeschobenen Correcturen und Zusätze, deren viele kaum zu entziffern. Doch wird trotz alledem der Gedankengang hierdurch nirgends unterbrochen. Durchgehends ist die Schrift von derselben Hand, ein Umstand, der als Beweis dafür gelten kann, dass das 7. Buch, welches auf den drei letzten Seiten über musikalische Gegenstände handelt, nicht etwa einem späteren Autor, vielleicht dem Musiker Franco von Cöln angehören kann, was der chronologischen Folge widerspräche, abgesehen davon, dass das siebente Buch nur zum geringsten Theil über den fraglichen Gegenstand handelt.

Hinsichtlich der Zeichnungen finden sich grössere Mängel. Sie befinden sich nicht gesondert oder auf freigelassenem Rande, sondern an den betreffenden Stellen im Text verstreut. Auffallend ist zuvörderst die grosse Nachlässigkeit mit der die Figuren durchweg dargestellt, abgesehen von der oft pygmäenhaften Kleinheit, welche die Buchstaben kaum errathen lässt. An keiner Figur sind die dem Text entsprechenden Verhältnisse beobachtet, die richtigen Längenmasse innegehalten, wie sie zur leichten Uebersicht und Klarheit des Ganzen nothwendig. Dabei fehlen oft die Buchstaben an den fraglichen Puncten, oder sind an verkehrte Stellen gesetzt. Da endlich, wo eine correcte Figur am meisten nothwendig gewesen wäre, am Ende des sechsten Buches, weil ohne sie der Text unmöglich zu verstehen, fehlt sie auffallenderweise ganz, während a. a. O. der Raum dafür frei gelassen.

Sieht man von diesen im Ganzen immerhin noch erträglichen Uebelständen ab, so dürfte der Traktat nicht blos als historisches Monument, sondern auch vom rein wissenschaftlichen Standpunkt betrachtet, in vieler Hinsicht nicht ohne Interesse sein.

*) Der vollständige Titel ist: „Euclides (?) in greco boetius transtulit in latinum commentatus in difficiliora capitula. dirigitur autem ad simmachum socerum suum cum prologo sicut in arithmetica imitatus nicomachum. dirigitur ad eundem.“ In der Friedlein'schen Boetiusausgabe (Leipzig 1867) ist pag. 372 unser Codex durch den Buchstaben $n_1$ bezeichnet und irriger Weise in das X. Jahrhundert versetzt.

# Inhaltsübersicht.

Der nachfolgende Traktat des Dominikaners Franco v. Lüttich aus der Zeit Otto's III sucht das von den Gelehrten damaliger Zeit vielfach behandelte Problem der Quadratur des Kreises zu lösen. Indem er dabei von der Voraussetzung ausgeht, das Verhältniss der Peripherie zum Radius sei absolut bestimmbar, und durch die Zahl $\frac{22}{7}$ ausgedrückt, gelingt es ihm ohne Schwierigkeit, den der ganzen Deduction zu Grunde gelegten Kreis vom Durchmesser 14 in ein Rechteck von den Seiten 11 und 14 zu verwandeln. Da ihm aber die Transformation des letzteren in ein Quadrat auf geometrischem Wege unbekannt war, so beginnt erst hier, wo man eigentlich Alles beendet erwartet, die Hauptschwierigkeit und es gelingt ihm schliesslich nur einen angenäherten Werth für die Seite des Quadrats zu ermitteln.

Der ganze Traktat zerfällt in 6 Bücher, welchen sich am Ende noch ein, aus späterer Zeit stammendes anschliesst, worin sich einige historische Notizen über den fraglichen Gegenstand finden.

Das erste Buch zeigt kurz die Unmöglichkeit, das Problem der Quadratur des Kreises dem Standpunkt der damaligen Wissenschaft gemäss vollkommen zu lösen. Auch der vorliegende Traktat werde darum keine völlig abgeschlossene Lösung geben. Hierbei werden die Fehler früherer derartiger Versuche nachgewiesen, wobei sich die ersten Versuche der Darstellung irrationaler Grössen in Reihenform finden, nur dass die Reihen bei einer endlichen Gliederzahl abbrechen.

Die Unmöglichkeit, weder durch eine Zahl direct, noch durch Zusatz kleiner Grössen die Fläche des Kreises = 154 darstellen zu können, wird zu Anfang des zweiten Buches nochmals hervorgehoben und darum der Uebergang zu einer Mittelfigur, einem Rechteck von den Seiten 11 und 14 vorgeschlagen. Nachdem diese ausgeführt, werden etwaige Einwendungen über die Gleichheit der Flächeninhalte von Kreis und Rechteck durch geometrischen Nachweis widerlegt.

Das dritte Buch beschäftigt sich mit der Verwandlung des Rechtecks

in ein Quadrat. Die geometrische Construction ist jedoch nur angenähert richtig, wie oben bemerkt. Sodann wird gezeigt, dass auf arithmetischem Wege die Verwandlung unmöglich. Als besonderer Fall wird dabei das Quadrat untersucht, dessen Fläche die doppelte eines gegebenen und gezeigt, dass die Seite jenes, d. i. die Diagonale des gegebenen nicht aus der Seite des letzteren durch Hinzufügung kleiner Theilchen entstehen könne.

Das vierte Buch enthält eine allgemeine Betrachtung über die Verwandlung der Figuren gleichen Flächeninhalts, Dreiecke und Vierecke, in einander. Es werden mit Bezug auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten solcher Figuren 9 Fälle unterschieden. Den dieselben erklärenden Zeichnungen fehlt jedoch theilweise die Angabe des Verfahrens, um jene aus diesen, oder umgekehrt zu erhalten. Die ganze Betrachtung scheint wesentlich zu dem Zwecke zu dienen, um das im dritten Buche angegebene Verfahren zu rechtfertigen, dass man den Kreis nicht direct, sondern durch eine Zwischenfigur in das Quadrat überführen müsse, welche mit jenem eine Dimension gemein habe, wie das Rechteck von der Seitenlänge des Durchmessers.

Das umgekehrte Verfahren: die Verwandlung des Quadrats in ein Rechteck von den Seiten 14 und 11 wird im fünften Buch vorgeführt, und zwar nach Analogie des bereits im dritten angegebenen inversen Verfahrens. Hieran schliesst sich eine directe Ueberführung des Kreises in ein Quadrat, dessen Seitenlänge jedoch mit der, aus dem vorhergegangenen Verfahren sich ergebenden nur angenähert übereinstimmt, ohne dass ein Beweis oder sonstige Motivirung dieses letzteren Versuchs gegeben wird. Das Resultat ist, wie bereits das frühere, eine Uebereinstimmung der Flächeninhalte beider Figuren bis auf kleine Bruchtheile. Es werden im Anschluss an diese Construction die gegenseitigen gleichen Ueberschüsse ihrem numerischen Werthe nach festgestellt, welche bei concentrischer Lage des Kreises und des ihm flächengleichen Quadrats sich ergeben: nämlich die Ecken des Quadrats und die Segmente des Kreises. Auch hier hat das Resultat nur angenähert seine Richtigkeit. Dasselbe gilt hinsichtlich der gegenseitigen Ueberschüsse des Rechtecks von den Seiten 11 und 14 und des ihm gleichen concentrisch und mit parallelen Seiten liegenden Quadrats.

Im sechsten Buche wird von der Theilung der Flächen speciell der Quadrate resp. der Darstellung ihrer Seiten bei gegebenem Flächeninhalte gehandelt. Der Verfasser ist der Ansicht, zur Vervollkommnung der obigen Methoden müsse man vor Allem lernen Rechtecke von bestimmtem Flächeninhalte in Quadrate zu verwandeln, oder zu jedem gegebenen Inhalte eines Quadrats dessen Seite zu ermitteln. Es werden dabei 3 Methoden in Be-

tracht gezogen. Die beiden ersten auf Veränderung der Masseinheit beruhenden genügen nicht. Es bleibt daher nur das frühere Mittel des Zusatzes kleiner Theilchen oder die genäherte Reihenentwickelung irrationaler Grössen. Sie hat auch hier, wegen der endlich begrenzten Gliederzahl denselben Uebelstand wie die früheren. Darum wird es vorgezogen, wieder zur geometrischen Construction überzugehen. Zuerst werden zu einer Reihe von Quadraten, deren Seiten und Flächen bekannt, die letzteren als Dreiecke aufgetragen, so dass ihre Seiten den Diagonalen der Quadrate entsprechen, welchen diese Dreiecke an Flächeninhalt gleich. Zwischen diese Reihe in demselben Winkel liegender ähnlicher Dreiecke werden sodann andere interpolirt, deren Inhalte die Hälften der bereits vorhandenen. Nachdem so die Zahlenreihe, welche den Flächeninhalten entspricht, möglichst ausgefüllt, handelt es sich noch darum, die noch fehlenden einzuschalten, welche durch das obige Verfahren nicht bestimmbar waren. Die erste dieser ist die Zahl 3 als Dreiecksfläche. Zur Auffindung der ihr entsprechenden Seitenlänge wird eine Construction angegeben, die wegen der fehlenden Figur leider unverständlich, die aber jedenfalls, wie alle ähnlichen früher gegebenen, nur näherungsweise richtig, da der Pythagoräische Lehrsatz in seiner Allgemeinheit nirgends zur Anwendung kommt.

Hiermit endigt der eigentliche Traktat. Das folgende Buch scheint, da es nicht als siebentes bezeichnet ist, auch seinem Inhalt nach nicht ursprünglich dem ersten Traktate zugehört zu haben. Es enthält zunächst einige historische Notizen, die, wie der Verfasser bemerkt, dem Leser zeigen mögen, auf welche Art er durch das Studium der Alten, Plato und Boetius, auf seine Lösung verfallen. Von des letzteren Verfahren bei der Quadratur des Cirkels gibt er eine kurze Darstellung, indem er durch Zahlen die Fehler jener Methode nachweist. Ein zu damaliger Zeit wohl praktisch gebräuchliches Verfahren der Quadratur, welches darauf basirt, wird am Schlusse kurz erwähnt.

Die letzten zwei Seiten des Manuscripts enthalten, obgleich ohne Unterbrechung an das Vorige angereiht, einen ganz heterogenen Gegenstand: die Bestimmung der Pfeifenlängen an musikalischen Instrumenten, einige Angaben über Construction von Cimbeln u. s. f., wie es scheint von vorwiegend praktischem, weniger theoretischem Interesse, weshalb von einer näheren Darlegung des Inhalts Abstand genommen wird.

Bedenkt man mit was für rohem Material die Wissenschaft damaliger Zeit gearbeitet, der die Resultate des Pythagoras, Euclid u. s. w. gänzlich unbekannt, so muss man staunen über den Scharfsinn und Erfindungsgeist, welcher aus dem Dunkel jener Zeiten hin und wieder hervorleuchtet.

---

## Incipit prologus in primum librum domini franconis de quadratura circuli.

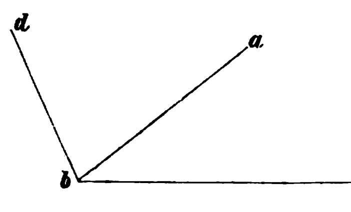
Ex quo mi . . papa presulum decus Corona totius per orbem cleri nullius unquam immemor honestatis ex quo liberalitatem tuam gratuito in me confirmasti ex eodem tua temperantia nulla hora sollicita esse non potui cuius officii ratione tantam gratiam promereri deberem. Quippe pecuniarum nihil erat nec caua superbi corruptelis ungula nec mineruale pecunia operose arteque elaborate vestis nec fusilis metalli admirandis figuris ope incusum nec peregrini lapidis multiplex ac varius coloris aspectus. Quamquam ego si eiusmodi rerum habundantia pollerem haut unquam in animum subrepere auderem tante nobilitati tanteque dignitati ex eisdem munuscula offerre. Hec et cum principium largitione distribuuntur in uulgare indigentie et necessitate subuentata. Cum vero eorum oblatione ipsorum principium beneuolentia comparata procul dubio auaritie illorum occulta quodam elogio exprobratur. Neque et redimi muneribus possunt si non eos quod nimirum accidit ex illo auaritie monstro ipsa munera delectarent. Quis autem nescit omnem illam ydolatrie seruitutem ab arce animi tui procul extrusam? velud in infima precipitatam. Quod si uero ita se habet ubi ille facultates quibus affluit tibi cum amplissimis rebus diuitis et ditis (?) colonie tantum heditarius et imperialis fiscus. has tu profecto ut ita dicam profligare nullo tempo desistis quicumque eis indigeant hylariter erogando. Quid tum? Nempe aurum in massa contrudere diabolicum putas distribuere autem humanum et proximum deo. Qua proprietate iure metuerem talia eulogia tuis conspectibus prensentari cum rem operum precipue contemptorum existas.*) Nam undique circumspecta prudentia oculata infirmam scientiam animalis ante et retro ista fortassis exprobrationi sue cupiditatis assignaret. Sed tamen per multas et uarias deliberationes occurrit animo nichil esse in quo eque deuotio mea preclarescet. quodsi procurarem iuxta uires ingenii munus aliquid liberale. Nempe hoc munus summa illa ingenuitas in rebus honestissimis et nata et omnem etatem

*) b. existimas.

uersata hoc ita auide amplexatur*) ut infelici auaritie longe munus blandiantur ignaue opes. Itaque ita hac uia adductus sum ut ederem libellum de circuli quadratura imperuia plurimum renitentem ad temerarios uersus pro unguente deuotione. hoc igitur opus quoniam edictum est te ad studia nos beneficiis inuitante alterius opus nisi tuum esse non potuit. Quamobrem circumesto omnem ejus diligentiam siue penitentia reprobandum sit siue in parte corrigendum siue ex toto prouehendum id tua maxime interesse. Ergo quidem facto opus sit exemplo consultus eris augusti. Habes inquam plures aetuccas ruatos quibus immune sit moris alienis studiis innidere. he fidei horum karitati laborem nostrum committes ut in tantum superflua resecent. si erratis quo adhibeant te probante correctionem itaque hoc opus sue emendationis opera castigent ut non sit indignum quod tuo nomini ueluti cuidam numini debeat consecrari.

## Domini franconis liber primus incipit de quadratura circuli.

Quadratura circuli inter occultas rerum adeo est abstrusa natura ut de eius ratione nemo hodie dubitaret nam aristoteles quem rei inuentorem ferunt ipsius inuentionem predicamentis suis indidisset. (?) Eius uero scientiam haut dubium ferunt usque ad boetium perdurasse illo autem sublato ipsa quoque omnibus simul minuit propter solam dubitationem qua ratione ac tanta(m) ut in ea omnes italie gallie atque germanie defecerint sapientes. Siquidem hanc rem adelbold hanc maximus doctor Wazo hanc ipse studiorum reparator Gerbertus multique alii studiose inuestigarunt. Qui si effectu potiti fuissent num id ab illis profectos quorum aliqui adhuc supersunt universos lateret? Et Gerbertus quidem geometrus libellum habebat. aliaque eiusdem scripta aliquibus (?) ut fallor**) numquam exclussisset. si quidem eius diligentie supra hac scientia cooperatum fuisset. Quamobrem dementis esset in tanta difficultate perfectam cognitionem polliceri. Nihil ergo uolumus promittere presentare studiorum laborem qui primo sudabit nulla questione quod plurimum etiam fatigauit maiores nostros de comparatione uidelicet angulorum. quorum una quidem diuisio secundum propriam superficiem in rectum hebetem et acutum alius secundum positionem eam aliorum exterior aliorum interior appellatur uidelicet quod hic inter figure terminos comprehensus sit ille ubi extat appositum ad hunc modum. Est enim interior angulus sub *abc.* exterior sub *abd.* Neque et illis credendum qui nihil uolue-

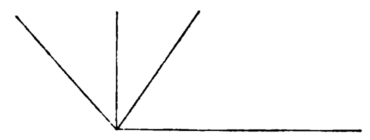


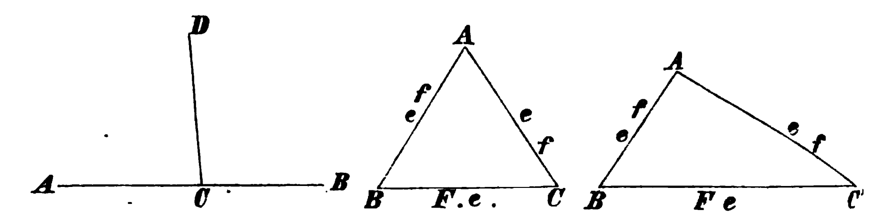

*) amplectitur?

**) fallorem?

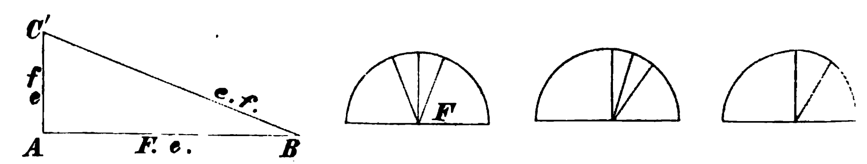
runt interius ac exterius dici nisi aliquid intelligatur interius aut exterius.

Siquidem hi tali utentes figura rectum angulum ita collocant ut sit intra hebetem et extra acutum. Ad quem hebetem referentes exteriorem appellant uidelicet quod magis a recto extra acutum inueniatur atque ad eundum acutum cooperantes interiores iudicant quod inter hebetem magis contineatur a recto. Sed his magnis est hic error nihilque aliud fuit quod impedisset eos qui conati sunt approbare triangulum ut interiores angulos equos haberet duobus rectis. Siquidem si bene comprehensum fuisset quod interior angulus accipi debet nihil esset reliquum quod eis posset abstare. Quare sciendum est omnem angulum exteriorem et interiorem iuste uocari prout se habebit circa propriam figuram aut extra aut intra et exteriorem dici ad compositionem eius qui fuit intra ipsam figuram interiorem ad illum qui extra positus fuit referri quomodo ulterior gallia exemplum eius compositionis quod ultra sit uel citerior gallia ulterior nuncupatur et ulterior



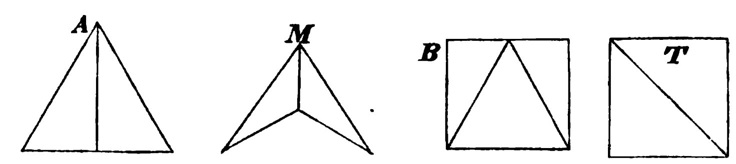



hispania* ad hispaniam dicitur citeriorem. Igitur de his angulis et lineis ipsorum intra eos qui curam habent geometrice discipline difficillime questiones uersari solent qui anguli quibus angulis componentur (unum?) et hic nata questio cuius nunc querimus rationem. quam nos sepe tractatum nondum perfecte solutioni apertiori reseruatum in presenti loco ne patiamur. Nam demonstrata in diuersis angulis equalitate spatiorum probabile erit eandem equalitatem repperiri in figuris licet inter se qualitate




geeme diuersis. Sit ergo propositum ut III. interiores angulos equos ostendamus duobus rectis. Describo in primis duos rectos hoc modo iacente in plano *AB* linea recta . . aliam rectam id est c. d. lineam supra impono d. puncto ab *A* et *B* punctis equaliter distante. Sunt igitur recti duo.

requiro num quilibet III. interiores sint diffinite trianguli forme. III interiores angulos propositos teneo hos angulo II. per se constituto siue circa triangulos quos*) anguli sint requiro itaque triangulum equilaterum constituo cuius anguli sint *a. e. f. b. e. f. c. e. f.* hos compono II. *Γ.*(?) rectis et equale spacium inuenio. Idem accidit si quidem in ortogonis eiusdem rei gratia nichil diuisum proueniet. Et postremo cum VI**) existant triangulorum genera nullum esse poterit cuius anguli huic comparationi dissentiant. sicut harum descriptionum probatur exemplis. Et hic interiorum angulorum consensus ad rectos. Exteriores *c.*(?) uerum supra equalitatis modum longe exuberant. In hac uero demonstratione dominus Wazo




ascribit figuram hanc *M.* Magister adeloxanus hanc *B.* Ratechitius hanc uidelicet *T.* Et preter hos alius quidam hanc *A.* et alii alias. Scilicet nos potius animum proposito operi commodemus.

Igitur quadratura circuli reductio quadrati uidetur esse ipsius circuli in quadratum et adequatio figure ad se inuicem utriusque. hanc quadraturam ita constituunt ut a puncto in octo diuidant portiones desumptaque portione octaua latera quadrati ducant. Sunt qui rursus diametrum a medietate quadrati partiant. reiecta quatuor angulos statuant quadrati. Preterea existunt qui ambitum circuli in quatuor distrahunt partes ex quibus quadratum struunt quas aiunt illi circulo equales. Sed hi omnes a ueritate longe absunt eo quod ubi equalitas inuestiganda sit non attendunt. Nam quicumque demonstrare uoluit formarum quarumlibet equalitatem. Hunc primo aduertire oportet ubi illa uisetur equalitas. Omnium enim figurarum equalium alie solo numero coequantur alie spatio tantum alie utroque. Ergo cum sint figure circulus et quadratum necesse est aut primo aut ultimo aut medio modo equalitatis comparatione. sed numero solo nequeunt equari. Nam quicumque solius numeri seruant equalitatem ut triginta sex triangulos ideoque tetragonum in illis areas numquam eiusdem repperient quantitatis. Si equales sunt aree quadrati et circuli. Non igitur equatur numero solo. Neque uero numero et spacio has quisquam formulas probabit equales. Hoc autem ita probo. Quecumque et equalitatis hunc retinent modum in his communis numerus secundum regulam utriusque

*) quales?
**) Wohl III.

figure potest inueniri ut in his quadratum una quatuor in hoc latere in illo nouem. altera uero in omni latere sex gestat. In his uidelicet et quatuor per nouenos et sex per sex multiplicatis tringinta sex inuenitur qui utriusque figure communis est numerus. Sed in quadratum et circulum non cadit ut uidelicet communis numerus propria inueniatur regula utriusque. Quam propositionem etiam probamus hoc modo. Est uidelicet communis numerus tantum circuli quantum quadrati equale circulo CLIIII. Hic autem facile est inuenire iuxta regulam circuli quantitatis. Triplicata diametro adiectaque septimam(?) diametri fit numerus qui circulus sine circuli ambitus appellatur. Cuius medietate in medietatem diametri ducta prouenit numerus qui pro ipso circulo reputatur. Est autem diametrum CLIIII. circuli XIIII qua triplicata et omnibus que regula docet deinceps obseruatis CLIIII circulum secundum rationem circuli repperimus. Sed eundem secundum quadrati rationem nullo modo possumus inuenire. Est enim ratio quadrati ut ex qualibet summa in se ipsa multiplicata acrescat. Hoc autem modo CLIIII non creatur. Nam si ab aliqua summa in semet ducta procrearetur id profecto fieret vel: a XII vel a XIII. Sed XII: si duodecies sumantur X numeri CXLIIII inuenies. Quod si XIII. XV amplius habebis. Non igitur CLIIII cum sit communis numerus et circuli et quadrati propria colligitur utriusque ratione. Quare si in omnibus figuris quicumque spacio et numero sint equales communis numerus propria utriusque regula colligitur CLIII uero communis numerus circuli et quadrati propria utriusque nec concrescit assero nec esse equales spacio et numero quadratum et circulum. Adhuc aliud argumentum pono. Si circulus et quadratum in spacio et numero equalitatem reciperent facile ac sponte alterum in alterius formam transiret. Hoc enim in omnibus aliis peruidetur. quecumque numeri et spacii retinent equalitatem. Exemplum aliquid dare placet. Sit item figura in hoc latere IIII. pedum in illo IX cui superponatur altera illa profecto que ex omni latere senario metitur. Dico in his figuris palam esse qualiter una in alteram transformetur. Quod ea de causa putamus contingere quod nec solo numero nec solo spacio comparationem habent equalitatis. Quod idem ipsum profecto in circulo et quadrato accideret si in eodem modo inter se comparabiles existerent. Sed neque circulus in quadratum neque rursus quadratum in circulum nisi cum summa difficultate quam deo prestante tradituri primo dum sumus neuter unquam in neutrum transire possit. Causam uero quare non possint eam quamquam posterius si diuinitus permiserit monstrare conabor. Hinc igitur concludendum quibus ita se habentibus num recte utroque(?) judicentur equales quadrata forma et circularis. Adhuc aliud. Si essent sepe dicte figure juxta numerum et spacium equales numerus communis ut puta CLIIII. non

solum circulus sed et quadratum esset. Sed non est quadratum CLIIII. hoc ita probo. Omnis tetragonus sic est.*) . . . .
arithmeticorum regula docet ex imparium coaceruatione generatur. At uero CLIIII coaceruatis super se ipsos ab uno quosque uelis imparibus nusquam occurrit. Non igitur CLIIII quadratum. Eadem lex alios quoque circulares numeros includit. neque unquam poterit numerus repperiri quicumque circuli proprietate nitatur quadrati quoque ratione participet. Sed fieri poterit ut aliquis dicat CLIIII et si minime numero minuciis tamen quadrari posse. Quare procuraui inuestigare et hoc. Ergo quamvis contrarium naturam videatur ut CLIIII in quadraturam redigatur. incipiamus tamen ipsique nature iura inferentes ad untias quoque animum vertamur an forte illis appositis numero, totaque illa summa per eundem numerum et per ipsas uncias dimensa CLIIII tetragonare ualeamus. Et quare hic ipse numerus si ab aliqua summa in se ducta crearetur id a XII vel a XIII ut supra dictum fieri oporteret. XII in primis assumatur. huic autem adjiciatur triens aut quincunx. Sed quincunx exuberat. Nam XII in se et XII quincunx postremo quincunx in quincuncem supra CLIIII sextantem q. dimidiam sextulam apponunt. Triens autem minus reddit eisdem CLIIII. Namque (XII) et XII triens item XII triens ad extremum triens in trientem CLII acrescente uncia et duella accumulant quibus adhuc desunt ad perficionem CLIIII. assis dextans**) et II duelle.[1]) Quamobrem quincunce exuberante triente vero ab integritate plenitudinis refugiente nonne dementie est et illo minore et illo summe potiore? Illud tamen adhuc fieri potest ut eisdem XII et trienti minutias apponamus diligentius investigantes ante si et per qualem multiplicationem ad eam quam querimus summam pertingamus. Erunt autem hec minutie que apponantur. Semuncia sicilicum sextula.[2]) Quippe alie aut plus componunt aut multo minus. He autem sole ad ipsos CLIIII tam proxime accedunt ut exceptis partibus unius oboli tercia. IIII. IX. nihil excrescat, nichil excedat nichil exuberet. Quod apertius ostendi ualet abaco quod stilo computando potius (potius) quam disputando. Neque id quicumque proficiet si quis minutias confingat a numero denominatas quomodo solent calculatores ad minutissimum aliquid quod iam nomine careat diuisione perducta. Quis autem nesciat quantam partem aut scipuli

*) Fehlt der Rest der Zeile.
**) sextans?

1) $$\left(12+\frac{5}{12}\right)^2 = 154+\frac{1}{6}+\frac{1}{144}$$
$$\left(12+\frac{4}{12}\right)^2 = 152+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}.$$

2) d. i. $\frac{1}{24}$; $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{72}$.

aut obuli aut ceratis aut nouissimi calculi assumat. nonne frustra pro hac equalitatis propositione operam insinuet. Et certet quota pars accipienda sit quomodo poterit nosse disciplina? Omnis autem tetragonus quotum ab unitate locum obtinet in ordine tetragonorum totam ad sui multiplicationem expostulat summam. Hac arte cujuslibet quadrati longissime et ultra mille milia positi tetragonicum latus facile et cito peruestigamus. Quod in CLIIII et alio quolibet circulari numero cum ipsi minime tetragoni sunt quis ualeat inuenire? Nimirum inter tetragonicum latus ipsosque tetragonos hoc quasi pactio firmata: ut (tamen?) latus nisi ex loco et ordine ipsorum nequeat deprehendi quod ipsi per multiplicationem creari non possunt propter lateris libratam dimensionem. Sed quomodo rursus nichil addere potitur ut CLIIII in quadratum prouehatur ita etiam XIII numero nihil auferre ut idem quadratum equalibus ex omni parte lateribus construatur. Quamobrem non opportet ulterius cum ipsa concertare natura quod nulla uisa suo statu inflectere ualet. Et his demonstratum sit CLIIII quadrari non posse quod minime mirabimus si ad alios numeros quicumque naturaliter quadrati nostram considerationem uertamus. Nam nullus eorum in quadraturam reduci neque integris terminis in se multiplicatis neque si untias vel minutias adjiciamus. quod mox in nostro libello monstrabimus.

## Prologus secundi libri.

Et si nullus omnium quantalibet sit felicitate prestantior haut vereor tamen mi cesar dedecoret hoc ueluti quoddam diadema quod tuo capiti fabricare molimus. (?) Sed quantum nobilis materia in tantum artifex sapiens esset. Verum propendas opporteret quoniam aurum non tantum ex arte placet. quam ex propria virtute. neque ita preciosum celatura quantum naturale prestantia judicatur. Sed forte aliquis dicit geometricalis scientie curam a societate presulari alienam existere. Nimirum qui ita putauerunt In minime recolunt scientiam moysen quem maxime hujus discipline habuisse peritiam. Hi per mensuram diluui arcana egyptiis cubitis ne quaquam retractant. Ipsique reputant omnem terram repromissionis (?) funiculis geometricabilibus distributam. Adhuc salemonem tum ipsum templum tum portionem tum atrium templi postremo quicquid ad templum respiciet conuenientibus ordinasse misuris. Preterea ap. ezechielem uirum cuius erat species quasi species artis totum edificium illud ciuitatis multaque in eo preterea numero linea misurali calamoquę designasse. Quod si ita est que religio sit et sacerdotes diutius a tanto studio prohibere? nonne ezechiel sacerdos? Nonne uir ille cuius species erit ipse x p c. summus et maximus sacerdos. Sed que jam supra distulimus ingrediamur ostendere.

## Prologus explicit. incipit liber II.

Omnium numerorum alii sponte et naturaliter tetragoni alii minime cuicunque gnaro natura tetragonorum teneantur: Nos si quis quadrare uoluerit nulla difficultas impediret ut si forte in quadrati figuram disponere uelit siue quaternarii summam siue nouenarii siue quorumlibet reliquorum. naturali tetragonorum ordine subsequentium. Sin autem ceterorum aliquem qui ab natura tetragonorum separantur in eorum formam reducere contendas id quantum ad se ipsos nullum unquam consequeris effectum. Verum tamen circa superficies spatiorum idem fieri possibile: Nihil enim prohibet ejusmodi spatia inueniri quadrati formam habentia: quod aliud duobus pedibus constet aliud trium in se misuram retineat. aliud quinis aliud senis aliud septenis vel octonis vel et pluribus ultra pedibus teneatur. Itaque in hunc modum omnes minorum quantitates circa subiectas corporum materias quo minus debeant quadrari nullatenus recusant. Ceteris in se ipsis et seorsum extra considerationem mensurabilium spatiorum sola animi speculationem perceptis uacuum quisque consumet laborem si eosdem numeros redigeré curet ad quadratorum rationem. Potest tamen compositis ex adjectione minutiarum equis lateribus ad eorum summam proxime accedi ut parum inuenias aut deesse aut ad perfectionem et integritatem supra habundare. Et aliis quidem ut certe binario latera creantur ex uno et triente semiuntia. duella dimidia sextula. IIII a binario paulo minus conficitur vel item ex uno et quincunce numerus paulo amplius eodem binario acrescit. aliis autem alie unciarum aut sole aut cum minutiis pro tetragonicis et ex quatis(?) lateribus constituuntur ut quisque calculandi peritus per semet ipsum intelligere ualet. In quibus omnibus ut dictum perfecta integritas numquam inuestigare poterit. sed id incu(?) semper addito ut licet parum tamen aliquid aut superabundet aut desit. Nichil igitur mirum si circularis numerus ut puta CLIIII et quilibet ejusdem generis quadrari non potest quando quidem et aliorum omnium nullus potest preter naturales tetragonos. De qua re ea de causa longius traximus disputationem quia sunt nonnulli qui putant quadraturam circuli in numero per minutias cónstitui posse. Scio Werenboldum hac opinione inductum XXXVIII senariis ideo aream XXII(?) circuli in quadratum ut supra uisum est redegisse multiplicata in se senarii summa et adjectis minutiis que sibi uise sunt ad rem pertinere. Quem hoc quidem fefellit quod per senarium tum senario multiplicato tum et minutiis ipsas tandem minutias sicut possit quadratum fieri opportet in sese multiplicare neglexit. Sed ut ad proposita reuertamus cum CLIIII aliique circulares quadrari non possint manifestum, non esse equales in computatione numeri et spacii quadratum et circulum. Restat ergo aut

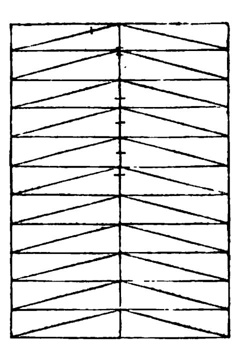
solo spatio comparationem habere aut prorsus equari non posse. Sed quis hoc dicat cum nulla sit figura que alteri per equalitatem conferri non possit? Quare ut etiam iste equandi facultatem non habeant stultum arbitrari. Restat ergo ut hanc exceptionem in spatio solo queramus. Nam supra diuersis conclusionibus extortum: ne ulterius vel in numero solo requiratur vel in utroque. Sed omnium figurarum que solo spatio sunt equales alie per se demonstrari possunt alie non per se sed per alias probantur equales. Per se monstrari dico quod ipse in equales suas absque medie alicuius interpositione resoluuntur. Per se non posse dico quod nisi per medias resolutionem non capiunt. De hac resolutione propterea tractabimus. Id prorsus uero sciendum quod in hac parte quadratum in comparationem circuli ponimus. quod non per se ad equalitatem reduci possit. Semper enim media quaedam figura opus est ut uel circulus in quadratum uel quadratum reducatur in circulum. Hinc autem figura una nascatur in hoc libello monstrare propono. Nascitur sane ex ipso circulo vel per diametrum ejus vel per resolutionem inuenitur. Sit igitur a quolibet imperatum ut sibi quadratum producatur aequale scilicet a. b. c. a. circulo. Quem cum dederit diligenter attendo possitne statui a principio equale a circulo quadratum produci? Video non posse sicut in priore libello satis est approbatum. Nondum tamen desisto utor illo terentii consilio quod hac via non processit: aliam aggredior et rursus perquiro. num saltem valeat aliquid spatium IIII latere appropposito circulo procurari ut vel per illud ad inuentionem quadrati proaccedam quod ipse circulus nullius modi per se aditum aperiebat: Et hac uire. Nam omnis quadrata figura quadrato proxima et quasi consanguinea existit cum presertim eodem modo rectis nitatur angulis. Quare nihil mirum si per illam ad hanc familiaritatem accedi potest. Hujusmodi autem figura facillima est inuentu. Denique propositi circuli diametrum in partes XIIII diuido deinde quadrilateram figuram constituo hac nimirum ratione ut per duo latera diametrum totam item per alia duo latera XI ejusdem circuli prorsus equales spatii quantitate dumtaxat. Haec igitur figura *abcd* litteris per IIII. angulos designata in hunc modum describatur ut a lateribus ad latera partium sursum et per longum pro numero partium diametri et XI et XIIII linee ducantur quatenus ipso intuitu manifestum sit quomodo in tota figura partes includantur. habeo CLIIII ad hoc modum. Dico igitur quadrilaterum ex appositi circuli diametro pro-

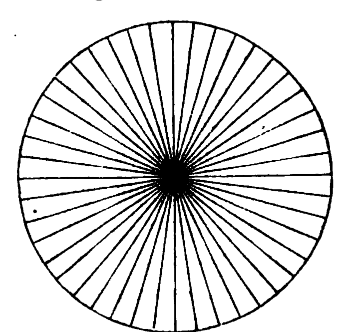
a b c d

ductum esse. Undecies autem XIIII CLIIII fiunt eadem videlicet summa qua area circularis includitur. Sed hic aliquis fortassis obuiet. Quis umquam scire potuit quantum area circuli comprehendat ac per hoc quis ualet scire quid circulo vel sit, vel non sit equale? Cujus enim nescias propriam quantitatem quid extra valeas existimare ad ipsius equalitatem? His ita obiectis quibus obnitar rationes desunt. Peritia inquam geometrice discipline de inueniendo circuli embado ejusmodi regulam describit ut medietas diametri in medietatem circuitus debeat protendi. Quare cum hujus circuli diametros XIIII circuitus autem XLIIII. horum autem dimidium VII et XXII existat non potest incertum esse habere circulum CLIIII. Si quidem hanc summam conficit VII et XXII multiplicatio. Quibus ita se habentibus verissime dictum illud equilaterum esse circulo equale quod ex tota diametro et ejus XI partibus constat esse productum Ob hoc nimirum quod quantum VII. XXII tantundem conficiunt undecies. XIIII. Sed adhuc instabit et his contradictionum ualidis impugnabit telis. Nulla est auctoritas regule nisi quod ipsa docet. ita se in rebus habere aut animo perspiciatur aut sensu teneatur. Alio quidem fidem praestare non opportet. Num soli regule credatur? Nonne omnis regula ex subjectis rebus accepta et proscripta est? Certe de quadrilatero cum per II latera undenario metiatur in aliis uero duobus. XIIII gerat quia ut dictum est in se multiplicati CLIIII reddit non est dubium quin in tota aree sue latitudine CLIIII nec plus nec minus comprehendat. Quod et in superiore figura promptum est peruidere. Sed in circulo cui id ipsum copia est perspicere a quo potest circulus aliquando simili modo veluti quadrilateri in CLIIII partes aequaliter distribui ut hoc nobis uidere liceat et sic tandem fidem adhibere. Numquid nos in rebus uisibilibus credere opportet quod nequaquam oculis uideri potest. An negat quisquam figuras geometricas uisibiles esse cum omnes circino aut regule ad dimensionem subjaceant. Ergo CLIIII inesse spatio circulari (aut) uisibili argumento cum nimirum res ipsa uisibiliter existat. probandum est autem non credendum. Sed probari non potest circumferentis linee prohibente natura. Igitur ne et credi opportet. Validissime sunt hujus modi objectiones. Quid ergo dicemus? Faciendum ergo quod exigimus et uisibili ut ita dicam argumento utendum. Verisimillimum ego quidem puto cum studiosi geometrice discipline diuturna dubitatione turbarent quid existimare de quantitate circularis embadi deberent neque sicut areas angulis rectis inclusas ita quoque comprehensionem circuli manifeste deprehendere potuissent ullo mensurarum genere neque unciis neque pedibus neque aliis quibuslibet quibus omnis dimensio siue in longum siue in latum siue et in altum proficiscitur quibus porticus quibus miliaria quibus stadiorum longitudo quibus agrorum, fluviorumque latitudo quibus parietum montiumque altitudo

comparatur. cumque nullatenus pateretur circumferentis ambitus curuatura huiusce diuisionis rationem ipsi autem nihilominus citissime rescire uellent cuius estimationis esset planicies circularis animadvertunt quod linea ejus et si curua ac circumferens esset equaliter tamen undique: uersus a pūncto medietatis distaret. quo deprehenso res etenim manifesta est diuisere totum circuitum in quot eis uisum partes ut pote in IIII et XL quasi toti deinde punctis designauere. Et a punctis ad medium tocius circuli punctum lineas duxerunt adhibitoque sectionis labore XLIIII pertulere partes quarum unaquaeque VII mensuras id est medietatem diametri in longitudinem habebat. per latum uero XIIII inueniebatur ejusdem diametri. Nec mora partes partibus adjungentes acumen latitudini obuerterunt. Quo facto inuente sunt undene et undene sibi universe congruentes facteque sunt due formule ex XLIIII quarum utraque XXII illarum XLIIII id est medietate circuli constabat habens VII in uno latere XI uero in latero*). Quibus sibi e omnibus copulatis quo plurimum posset latitudini respondens longitudo egressa est forma binis lateribus undenas binis autem XIIII gerens unitates. Quorum exemplo uti res manifestior fiat datum circulum in IIII partes diuido ductis diametris altera ab a. in s. altera a t. in a.[1]) Quo facto singulas circuli quartas per XI distribuo sicut haec figura demonstrat.[2]).

Facta autem resolutione XI partes. XI partibus intermiscendo compono





versis aliarum extremitatibus ad capita aliarum secundum hujus descriptionis exemplum. Hoc modo resoluto circulo et partibus ejus hac arte dispositis inde producta est quadrilatera figura. Que profecto ducit XI in latitudine

---

*) l. in altero.

1) Die Buchstaben fehlen in der Figur des Manuscripts.

2) Die Figur des Rechteckes bedarf keiner Erläuterung. Von den 42 Dreiecken, in welche der Kreis getheilt ist, werden je 2 diagonal gegenübergelegt, so dass sie ein Rechteck bilden, was freilich nur annähernd richtig. Das gesammte Rechteck besteht somit aus denselben 42 Dreiecken wie der Kreis, nur in anderer Weise geordnet.

in longitudine uero XIIII gerat(?) que in se multiplicate CLIIII componunt manifeste ostendit quantum inter se spatii circularis ambitus comprehendat. Veruntamen nulli potest dubium esse quin ex hac resolutione subtiles geometre regulas illas collegerint quas percipiunt ad inueniendam aream circuli aut diametri medietate medietatem circuitus utendi aut totam diametrum quarta parte circuitus, aut totum circuitum diametri quarta aut quolibet alio modo ad idem ipsum proficiente. Quam regulam idcirco compendii causa inuentum putamus ut non semper necesse esset circulum resolutione quotiens uellemus arealem ejus quantitatem scientia tenere cum presertim circa ea subjecta sepe considerandum scirent que nullatenus resolutionem paterentur. Nec enim nisi in membranis et pelliculis et si quidem sunt ejusmodi exercitium commode non ualet. quibus igitur objectionibus supra memoratis satisfactum arbitramus simulque demonstratur qualiter illa media figura per quam circulo quadratum equalis(?) esse probatur ex ipso circulo et per diametrum ejus vel per resolutionem signatur. Iam igitur hujus scientie quasi fundamento quodam firmati consequuntur certis incerta et notis ignota perquiremus. Ac deinceps quemadmodum ex eodem quadrilatero in quod circulum resoluimus quadrati species promoueatur curabimus intimare. Hoc autem faciemus si prius confrugosa oratio alicujus proemii interpositionem lenigetur.

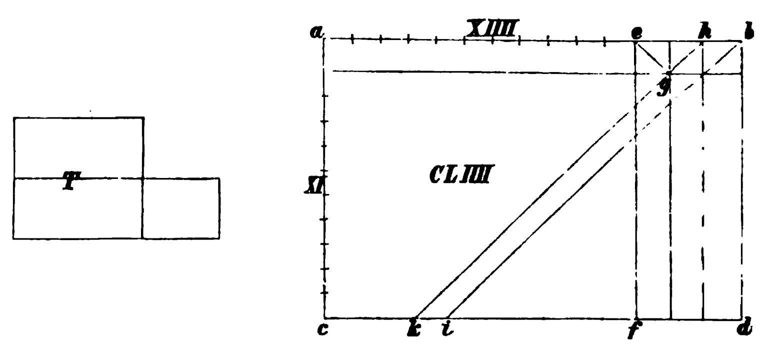
## Prologus tertii libri.

Si tu is esses presul eximie cujus sue laudes animum delectarent et pascerent nulla facundia satis esset his quantum de te ipso tum de auis de proauis. deque uniuersis majoribus tuis non modo romanorum sed graiorum quoque principum illustrissimis de horum nobilitate de dignitate de gratia de potencia de copiis de amplitudine rerum de preclarissimis factis de uirtute de sapientia de meritis eorum jactari ualerent. Virgilius cupiens a parentibus magnificare augustum eneida XII libris conscripsit. Quanto pluribus quis esset si quisque uellet colligere quod primus quod secundus quodque tercius gessit octonum quorum primus ab henrico patre suo suscepit regnum. sed filio reliquit imperatori IIII. pater ap. theutones primus regnauit filius ap. ipsos primus imparauit. Et quibus nisi illis germania debet quod sibi cum tanto orbe ipsa esoluit tributum italia? Per quos alios nostri imperatores romani sceptri facti sunt successores? Vellem mi diceres o maro. Quid tale contulit nostro latio ille tuus ille primus ille magnus ille diuonatus eneas? Ignosce auguste quanto sit infra tuum genus piis et preclaris octonibus comparatum. Sed esto fuerit tale eneas ille quid tua refert? Tu enim eneam ut X millesimus attingas nepos. Putasne igitur octonum nepos si qualem tu uirgilium haberet qui eum

extolleret a laude parentum. putasne tuam famam quanta gloria obfuscaret? Ita quidem ut pote qui non millesima sed prima tamen preclari sanguinis proles existat. Verum hec uniuersa scientes ac religiose pontifex prudentes aspernaris sicut omnia in te pie humilitatis signa et opera attestantur bene memor quod neque nobiles neque sapientes sed ignobilia et contemptibilia mundi elegit deus. Quare cantus sui ita scribendo nequaquam attingere quod animum cupidum laudis insanum reddent tuis uero auribus suis fauoribus merito infestis offensionem incuterent. Itaque uerti stilum ad ea potius dictanda que sensum instruerent. ingenium acuerent sollertiam excitarent. haud ignorans in tantum tibi placet rationabilium studiorum utilitatem quantum minime de diligentia uales inanis gratie. ac uentose iactantie odiosam uanitatem..

## Explicit prologus, incipit liber tercius.

Superiori libello qualiter a circulo quadrilateri species exiret ostendimus neque autem ex eo opus quidem difficile et laboriosum nec minus ipsa circuli quadratura intemptatum et*) in quo nisi geometrice subleuemus auxiliis necessario arbitrer deficiendum. Quis enim adhuc quadrandi tradidit rationem? Et quare ab omnibus partita nisi propter difficultatem ejus circuli iniunctam? Quam ob causam non paruis in hoc loco augustiis torquemur. et quocumque transire temptamus ueluti clauso




repellimur limine. Si enim illud quo longitudo latitudinem superat diuidamus dimidium uero relinquimus longitudini nne.(?) uelud angulari subducto trunca quedam nascitur figura. hoc siquidem in apposita peruidetur descriptione.

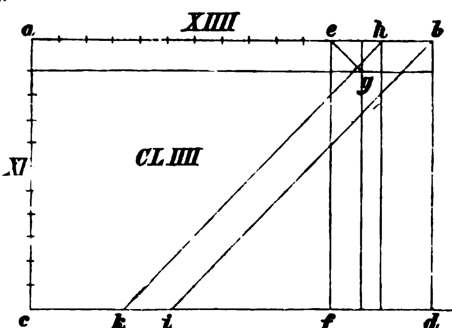
Quod si per obliquum sumere uelimus ejusdem spatii quantitatem quo temperamento fiet quatenus ne infra sit nec modum excedat? Puto manifestam esse dificultatem. Nec ut a nobis potest demonstratio detur breuissima. Quadrilateri latus scilicet *ab* diminuatur in partibus ad *e* signum. similiter *c d* latus ad signum *f* totidem partibus sit precisum. Igitur spa-

*) l. est.

tium inter *ef* et *bd* lineas diuidi opportet. quod fiet hac arte. Ducetur[1]) angularis ab *e* usque *g* ad cuius mensuram inter ipsum *e* et *b* affigetur *h* punctum sumptaque distancia eiusdem *h* ab *a* secundum ipsam *h k* et *b i* linee fiant. Quo facto si spatium quod includitur de medio subtrahatur figureque ad latitudinem apponatur dico ex quadrilatero productum esse quadratum.[2]) Et hoc modo illud quod ex circulo procedit in quadraturam redigitur. Ad finem uero arrepte disputationis in omni quadrilaterum uniuersalem quadrandi dabimus rationem. Hoc autem nomine appello quicquid excepto quadrato IIII latera et totidem rectos habet angulos. Sed hanc quo modo produximus quadrati figuram equalem asserimus circulo. Nam si quadrilatero nimirum equatur cuius uidelicet numerus processit equalis equalem circulo quis neget quin quadrilatero existat equale*) utrique spatio. Sed quadrilatero nimirum equalis cuius uidelicet nulla pars relicta sit exterior. Haut dubium igitur quin et circulo omnibus modis quantitate conferatur equali. Verum equatur utrique spatio solo non et numero. Non autem hoc dico — — — siquidem numerus omnibus his insit figuris cum ut prima et secunda sic et tercia. CLIIII pedibus constent

1) Die Figur des Textes, wie hierüber verzeichnet, ist mit dem Wortlaut unvereinbar, wonach $eg = eh$ sein soll, wie es die folgende Figur anzeigt. Ebenso soll $hk = ah$ sein, was nach der Fig. des Textes ebenfalls nicht zutrifft.

2) Das angegebene Verfahren besteht darin, die Diagonale $eg$ des Quadrats, dessen Seite $= 1$ zu construiren und ihre Länge an die Seite $ae = ac = 11$ anzutragen. Dann soll die Summe beider d. h. $11 + \sqrt{2}$ die Seite des Quadrats sein, das mit dem Rechteck 154 gleichen Flächeninhalt hat. Der Beweis wird nur angedeutet: das Rechteck $hd$ ist zunächst gleich einem Vierseit von gleicher Grundlinie und Höhe: nämlich $hi$, dessen Seite $hk = bi = ah$ oder der Seite des gesuchten Quadrats gemacht wird. Hieraus würde folgen, dass die Höhe dieses Vierseits $hi$ von der Grundlinie $11 + \sqrt{2}$ gleich $\sqrt{2}$ sein müsste, denn die Fläche $hi$ muss gleich dem an $ah$ anzutragenden Rechteck sein, welches $ch$ zum Quadrat vervollständigt. Dass dies jedoch nur angenähert der Fall ist, erkennt man ohne Schwierigkeit. Später wird übrigens gezeigt, dass der Flächeninhalt wirklich nahezu 154 ergiebt.




*) Scl. spatium.

uel assibus. Nec tamen quadratum numero equale dicimus · quod numerus iste non ita recipere potest equalem multiplicationem laterum sicut circuli siue quadrilateri proprietate constitui. Sed rursus hic aliquis dicet: in minutiis hoc fieri posse. Licet dudum probauerim placet tamen adversus hanc opinionem aliam hoc in loco introducere argumenti rationem. Dico enim si quadrata equilatera constituuntur in minutiis nichil omnino et in numero equalia constitui. Nam quicquid multiplicant minucie idem numero quoque multiplicatur integro. Sit autem exemplo quadratis minutiarum cuius sint latera unitas et semis eo quod omnibus iste uideatur apertior. Hic uero tali constituitur modo. Multiplico 1 in se nascitur unum. Deinde semissem per eandem unitatem. His propositis II latera duco Rursus mihi prouenit unum. Quo iuncto superiori habeo II. Deinde semissem in se ipsum duco egreditur quadrans. Qui appositus II quadratum efficit. supradictum continentem in tota superficie sua. quadrantes IX. Similiter IX invenio non iam quadrantes sed asses. Si unitatem. semissem quod erat latus huius quadrati dupplicauero que dupplicatio III producit. Qui in se ductus nouenarium generat quadratum nihil a superiore in eo uidelicet quod IX partibus constat differentem.[1]) Ad hunc modum et quadratum circuli si minutiis constaret integro reperiri posse arbitramur. Sed ut manifestum est impossibile in integris eum reperire. Ne igitur requiras in minutiis nisi frustra fatigari malueris et inutili labore consumi. Adhuc aliud dicam. Si sint duo numeri alterum cum minutiis absque minutiis alterum, ille autem cum multiplicetur in se alterum uero ratione que in circulo seruatur accrescat: quam comparationem ad se habuerint summule in hunc modum producte fuerint utroque multiplicando secundum eandem proportionem intregro sumpto. Sit ergo numerus cum minutia VI. *g.* Item sit absque minutia VII. Rursus sint alteri duo uterque integer eadem proportione seruata id est XIII*) et XIIII. Assero ergo XIII*) in se XIIII uero iuxta regulam circuli ducto quo modo nascuntur numeri eandem inter se comparationem seruare quam et illi habent quorum alter a VI a VII utroque iuxta suam rationem multiplicato concrescunt.[2]) At uero nullos

1) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

*) l. XII.

2) $14 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{14}{4} = 154$

$12 \cdot 12 = 144$

$7 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{77}{2}$

$6 \cdot 6 = 36$

reperimus integros numeros qui ad inuicem conseruent comparationem circuli et equaliter sibimet quadrati. Quid igitur in minutiis requirere labores quod numquam sunt inuenire natura? Sed et si ratione calculandi abacique peritia subtilissima illic reperire conuincetur quid hoc mensoribus et studio geometricali conferret? Quis enim redigeret sub mensuram tum obulum tum ceratem. tum calculum et harum particulas infinitas? Quod nos quidem ita impossibile rati sumus ut facilius concedamus quadraturam per minutias circulo equari quam easdem minutias sub dimensionem uenire posse. Iure igitur circa has illas querere recusans artem potius geometricam qua meciendo componi possit peruestigare curaui. Neque hoc temere proprioque arbitrio ac propter exemplum fecisse me sapiens quisque redarguat qui sciat geometras in multis mensura tam contemptos esse neque se inquisitione numerorum occupare ut puta cum interiores tres anguli duobus rectis componantur. aliaque permulta que longum esset enumerare.

Quis hanc equalitatem in numero hac non potius in spatio et mensura estimet requirendam? Neque hoc in equalibus dumtaxat faciendum uerum in duplis in triplis in quincuplis et in his que sexcuplam uel septuplam uel octuplam habent comparationem ut nulla earum in minutiis aut in numero requiratur magnopere seruandum. Dicet aliquis quomodo probas duplum e minutiis simplici quadrato non conferri? Superiore quidem ratione hoc quoque probo. Nam in qua comparatione erunt duo numeri quorum alter ex integro alter uero productus ex eo latere quod minutie componunt. eadem seruabitur in illis quoque summularum quarum latera omnino sunt integra sic tamen ut unum habeant proportionem ut si sint duo numeri IIII et V. Quorum alterius latus duo(?) alterius quinque. Item et duo numeri(?) XVI et XXV alterum IIII alterum V iuxta proportionem superiorum laterum id est duorum item duorum.(?) Sed ipsi quoque latera habentes dico in qua proportione reperiuntur IIII et V quadrans in eadem proportione et XVI et XXV reperire.[1]) Atque enim minorem in se habent minorisque medietatem et ipsius medietatis octauam.[2]) Ad hunc modum itaque si comparatio dupli et simplicis quadrati in minutiis

---

$154 : 144 = \frac{77}{2} : 36.$

1) $4 : 6\frac{1}{4} = 16 : 25$ d. h. das Verhältniss der ganzen Quadrate überträgt sich auch auf ihre kleinsten Theile, wenn beide Quadrate in dieselbe Anzahl Elemente zerlegt werden. Besteht also zwischen den ganzen Quadraten kein rationales Verhältniss, so besteht ein solches auch nicht zwischen den Summen ihrer Elemente.

2) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{16}$ d. h. es kommt bei jeder Zerlegung stets wieder das ursprüngliche Verhältniss heraus.

constaret nihilominus intregris terminis eandem facile esset inuenire. Sed quis in minutiis deprehendit dupli et simplicis quadrati comparationem? Nam simplo habente latus quod numero sit dimensum numquam in latere quoque dupli numerum inuenies ut si quaternarium cum sit quadratum duo habeat in latere quo numero dupli ejus latus notabitur?[1]) Quod si in latere dupli secundum integrum numerum facta est diuisio tum nimirum latera simplicis iuxta numerum impossibile est metiri ut puta XVI duplicis quadrati uel octo quaternario metimur[2]) latus. Quomodo putas latera simplicius partiemus? Quare cum omnis comparatio que ex minutiis creatur in integris et numeris existat cumque dupli relatio ad simplicem quadratum (in numeris illis)*) unquam**) numeris sit recepta hinc audaciam arripimus: Hoc demum concludendi quod ne per minutias quidem latera illorum ualeant comparari quamquam doctissimus uir Reginboldus asserat illatere dupli quincuncem et latus simplicis contineri.[3]) Quod et ipse et cum Gerberto noster racechinus fatetur. Hoc autem aliter in re esse tali probamus argumentacione. Omne latus dupli eiusdem mensure est cuius et diagonium simplicis quadrati. Omnis autem linea triagonis diagoni tantum solum modo maior esse libet laterali linea[4]) ut dico exemplum illa equaliter duplum efficiet quadratum cui nihil desit nihilque accedat. Hoc cum omnes geometrice discipline peritissimi attestentur tum et uisibili argumento si quis artem meciendi non nesciat. ita rem esse facillime comprobabit. Quod cum ita se habeat sumatur exempli gratia XXV quadratus. is retinet latus V de quo proficiamus diagonum eiusdem lateris quincunce sibimet adjecto. Est autem in V assibus duo asses untia proportio quincuncis. Hanc ipse quinarius recipiat erunt ergo VII untia.[5]) Hoc igitur

1) Wäre $2a^2 = b^2$, so wäre auch

$$(2a)^2 = 2b^2,$$

d. h. es müsste sowohl $b^2$ wie $2b^2$ ein Quadrat sein. Welches wäre dann die Seite des letzteren?

2) $2 \cdot 16 = 8 \cdot 4$.

*) Corrigirt.

**) nunquam.

3) $\left(1 + \frac{5}{12}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2\frac{1}{144}$ also um $\frac{1}{144}$ zu gross als der vermeintliche Werth.

4) Bezeichnet $a$ die Seite, $d$ die Diagonale des Quadrats, so ist: $d^2 = 2a^2$.

Die als linea triagonis bezeichnete ist dem Text zufolge die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $a$ und $d$.

Auffallend ist, dass bei Erwähnung dieser und ähnlicher geometrischer Sätze zum Beweise nur auf das durch die Praxis Ueberlieferte hingewiesen wird, ohne irgend eine Autorität dafür zu nennen.

5) $5 + 5 \cdot \frac{5}{12} = 7\frac{1}{12}$.

est diagonum propositi quadrati quantum ad magistri reginboldi sententiam. nempe ego cum omne diagonium nihil plus minusue nisi duplum equaliter prouehat uideamus sicut V in se ducti XXV, an eodem modo VII uncia in VII uncias ducti secundum tetragonicam multiplicationem quinquagenarium accumulant qui nimirum ad XX dupla proportionem confert.(?) Minime septies; namque VII XLVIIII multiplicant. Inde septies untia nouissime untia in untiam assem sextantem et dimidiam sextulam coaceruant.[1]) Quorum assis XLVIIII (adiectis) quinquagenarium pluritatem complicant. Superat quantitas sextantis et dimidie sextule (id ipsum) nihilominus integro numero licet approbare. Et quoniam ipse confirmat diagonium quadrati et latus eiusdem in tali proportione reperiri qualis est inter X ac XVII*) quorum duodenarium claudit et eius insuper V duodecimas quod appellant quincuncem**) utrosque in se XII duodecies et XVII decies septies congregemus. que summa proueniet? Nimirum ex priori *C* quinquaginta IIII (?) ex posteriore CCLXXXVIIII colligentur sed diagonium nihil a duplo relinquit nec amplius curare debet. At uero ducentum sexaginta XXXVIIII unitate excedunt duplam proportionem et CLIII***) per comparationem reducti.[2]) Tamen absque dubitationis scrupulo constet diagonum non habere in se (in) quincuncem et latus sui quadrati. Quare si in duplo quadrato mensura lateris ab hoc diagonio nihil distat manifestum est ita ut nullatenus refutari possit quid (ne ipsum quid) latus dupli minoris lateris eiusque quincuncem possit includere. Sed his tandem qualicumque modo finitis illud uolumus intimare quadrati formam vix stantibus difficultatibus receptam si quis nouerit equabilitatem collocare: ita sane ut quanto circulus quadrati (circulus) tanto quadrati latera circuli excessionibus superentur. His profecto preciosissimam illam et doctis uiris sepe ac diu perquisitam que uocatur geometrice peritia circuli quadraturam. Atque (hic) excollocatio quomodo et per artem fiat monstrare curabo. Sed hoc post modum fiet nec uero istic quiescao.(?)

---

1) $\left(7 + \frac{1}{12}\right)^2 = 49 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{144}$.

*) L. XII an XVII.

**) cf. unten.

***) Wohl: ejus CXLIIII.

2) Der Sinn dieser unklar ausgedrückten Stelle ist unzweifelhaft:

$2 \cdot 144 = 288$

$17^2 = 289$ d. h. das nach der im Text angegebenen Regel bestimmte Quadrat des doppelten Inhalts wird um eine Einheit zu gross gefunden.

## Prologus quarti libri.

Cum singule rerum tullio in topicis auctore multas habeant causas ea que inter omnes principales existat preterquam cetere stolide sunt et nihil agentes quomodo materia et instrumentum nichil agunt si non manus artificis fuerit adhibita tu modo decus pontificum solus es si quidem in hoc opere placerent primaria ipsaque effugiens causa ego uero qualecumque instrumentum iure uidear quo tu sis abusus ad huius operis effectum. Abusus inquam quod inutile instrumentum. Siue instrumentum utile opus non esset bonum non posset cum presertim et materia sit integerrima et auctor ut melior nullus. An ne auctor ille qui incitator? Hic itaque auctor. numquid enim operarum mercede conducti romam condidisse dicuntur pro habita romuli memoria qui illos forsitan operarios mercede conduxit? Sed illorum potius obsoleta est omnis memoria. Quis enim scementa confecerit qui lapides portauerint. quis iecerit fundamenta quis illum murum compleuerit nemo recordari nemo dicere ualet siue et de diuinis exemplum petatur cuius illa ap. matheus vinea. Patrisne familias an eorum qui denarium accipiunt. Destinguit hunc matheum ipse his uerbis conducere inquit operarios in uineam suam. suam attendit non eorum. Sed apertius ipse pater familias suam esse testatur dum attendit ad illos. Ite et uos in uineam meam. in meam ite non in uestram. Ergo tu quoque cujus operis auctor. Quare nisi tibi qui pigrum et stolidum ingenium beneficiis impulisti si quid in hoc opere gratum existeret nulli debetur. Quisquis enim in nos retorqueret his quasi lime quasi serre quasi acie aut securi scriberem laudem quam artifex meruisset. Sed unum est in quo hoc ipsum tibi magis addicere queras quippe si dignis illud maiestatis tue patrocinio tueri. Ratus enim scriptor sua auctoritate ita umquam fretus fuit qui principium (?) defensionem non indigeret. horatius mecenatis presidio gaudet. amat pollio uirgilium. utrosque augustus fauet. terentius concitante emulorum inuidia odium pro gratia incurrisset nisi calliopius callidis argumentis accusatoribus restituisset. Mallius torquatus boetius vir cunctarum artium perfectione et consolari dignitate principum cum in latinos thesauros insignis quadruvii precium transtulisset quod a pythagora omnium ducum ueteris philosophie judicio probatum et excoctum esset frequenter tamen et humiliter orat quatinus patricii simmachi paterna gratia labor ille prouehatur. quod si tanti nominis jure preclarissimo labori suo absque fauore principium(?) diffisi sunt multo magis ego quem neque fortuna neque scientia commendat sine tuo presidio nihil habeo spei. Quo ego si fuero potitus tanto securior ero horatio marone ac ceteris quanto meliore*) — — —

*) Die folgende Zeile ist durch Verschimmelung unleserlich.

— — patriis melior tu maior augusto — — Quodsi de me senseris bene haut uereor male estimatione quisquam presumat. Certe ubi radius splendide auctoritatis tue uelut ipsius solis effulserit necessarium erit ignorantie mee tenebras non apparere. Ea posita circuli quadratura cur circulo quadratum principaliter et per se ipsum et in mensura comparetur iam placet continuam disputationem adjungere. Sed de ea altius ordiendum est tali principio.

## Explicit prologus incipit liber quartus.

Omnium equalium formarum de his enim agitur alie sunt eiusdem forme alie diuerse. Eiusdem forme ut triangulum et triangulum, quadratum et quadratum, circulus et circulus. Porro diuise ut triangulum a quadrato aut triangulum a circulo aut item quadratum a circulo. Nam triangulum alias uno obtuso et II. acutis alias uno recto cum II reliqui sint acuti alias omnibus acutis constat. Quadratum autem IIII semper lateribus et totidem rectis angulis continetur. a quorum utroque circuli figura distat. cum eadem et angulos ignoret et unius linee circumitione ambiatur. Tales itaque communem mensuram non recipiant nec umquam ualet ipsarum quantitas arealis eodem circino deprehendi. Quomobrem sepe contingit dubitationem creari dum inter se comparantur utrum altera tantundem spatii comprehendat necne. Neque enim uidetur proposito circulo et quadrato siue item triangulo et circulo tantundem spacii continere eo quod hoc in acutos angulos continetur altera in rectos latius porrigatur III$^{ia}$. angulorum nullis quasi faucibus obnoxia liberiori spacio dilatetur. Que dubitacio tamen maxime potest excludi certo scientie fine si hec in illorum redigatur figuram ut uidelicet uel triangulo si forte dubitetur prouehamus circulum uel quadratum uel cetere longilatere aut alia quarumlibet formarum prout opus fuerit in alias reducamus. Sed sciendum hanc reductionem nullatenus ad effectum perduces nisi per — — — gnito quod*) — — —

alie plus a se distant. Minus distant que uel longitudine uel latitudine concordant. Inter illas uero hoc modo maior distantia quod utroque sunt diuerse. Sciendum quoque quod minus distantes amplius distantium in medio uersentur. Quam ob rem ad illas nisi per has nulla suppetit facultas transeundi et quomodo ad diuersissima nisi per minus diuersa prouenias? Nullo id pacto natura promittente contingat. Sic a bono ad malum nisi per id quod neque bonum neque malum est. sic a iusto ad iniustum nisi per illud quod indifferens uocatur. sic a nigro ad album nisi per uenetum pallidum aut rufum aut per alia huiuscemodi non peruenitur. Idem et spetialissimorum a generatissimis distantia preaffirmat.

*) Wegen Verschimmelung ist die folgende Zeile unleserlich.

ubi nisi per subalternas species et genera neque ab his ad illa neque ab illis ad ista descendes siue conscendes. Quid cum et mollissimarum aquarum liquor(um) in lapideam cristallorum duritiam solidatur num id fieri potest nisi in glacialem rigorem constipetur? Infinita sunt in rebus extremis huius transitionis exempla. Verummodo ut idem indubitanter in eisdem figuris agnoscas de ipsis potius aliquot exempli causa proferemus uerum prius harum ipsarum formarum pressiore (?) uersus fuero dimensione*) hoc modo.

Omne quod habet dimensionem et est eiusdem quantitatis et equalis spatii aut equale aut maioris aut minoris. Quod nemo miretur quomodo eiusdem spatii esse possit quod sit maioris uel minoris. Quod enim sic maioris est si contingit ut in omnibus dimensionibus sit maioris nequaquam per omnes partes maioris existit. sed per aliquas partes amplius habebis longitudinis et latitudinis et per aliquos minus et tanto minus in aliis partibus quanto in aliis amplius retinebis quod posterius manifestum erit. Eadem ratione est de minore. Tamen contingit ut equales uel maiores uel minores et non forte — — — — — — — — — quibus excedatur uel aliquid dehabeant que enim tanto minus habent in aliis partibus quanto in aliis amplius. non omnino ab equalitatis comparatione recedunt. Latitudine enim his quantum et illis repperitur.

Sed cum sint III dimensiones id est longitudo latitudo et altitudo hec collecto cum equali et maiori et minori quibuscumque modis colligi possunt equalium figurarum XX et unum faciunt modos.[1])

Quia uero de planis figuris tractatio incidit quod in altum non ecrescunt altitudine reiecta quot modis $AB$ complecti possit longitudine et latitudine potius requiremus. Harumque complexionum rationes et naturas quomodo uel diminui uel augeri debeant et altera in alteram resolui diligentius exequamus ut his ad cognitionem deductis conclusionibus primo circulum in quadrilaterum dein in quadratum religatur neque per se principaliter ualeat quadrari manifestius intelligatur. Hos complexionum modos circa literas *a. b. c.* loco equalis maioris minorisque appositas ostendemus *d.* et *e.* exceptis ad longitudinem latitudinemque significandam. Horum autem VIIII existere arbitramur.

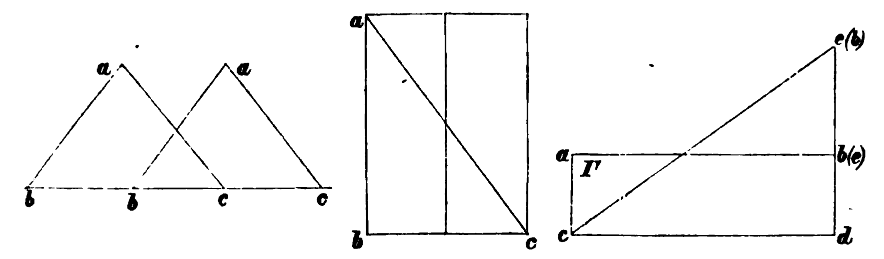
| | | |
|---|---|---|
| *I* | *a* | *de* |
| *II* | *a* | *d* |
| *III* | *a* | *e* |
| *IIII* | *b* | *de* |
| *V* | *b* | *d* |
| *VI* | *b* | *e* |
| *VII* | *c* | *de* |
| *VIII* | *c* | *d* |
| *IX* | *c* | *e* |

*) discussione?

1) Nach Analogie des folgenden im Text gegebenen Schemas für 2 Dimensonen *d, e,* wenn dazu noch die dritte *f* hinzukommt, während *a, b, c* wie ebenda den Modus der Gleichheit des Grösser- oder Kleinerseins bezeichnen, hat man für je einen dieser drei Modi die 7 Combinationen: *def, de, df, ef, d, e, f,* woraus sich in Summa die Zahl 21 ergiebt.

Quod ita probamus ad *a* utrumque copulamus id est *d.* et *e.* solum pro hac *e* fiunt ergo complexionum III figure. Plures autem qui fierent? Nam cum sit *a* solum cui tum *d* tum *e* utrumque comparetur aut utrumque habebit aut unum aut alterum neutrum et non potest habere. Quomodo enim *a* idem equale esset si neque *d* neque *e* equale haberet? Tot modis et *B* signum maioris ad easdem literas id est *d e* potest componi et *c* minoris totidem nota. Quorum coniunctionum ratione nichil habetur diuersum. Quod si quis dicat maiorem neutro esse maiorem minorem neutro minorem hoc minime procedit ipsique nature repugnare conuincitur. Ex eo complectendum est (cum) equalis cum maiori cum minori — —*) — — — — — tractare modos complectendi secundum longitudinem et latitudinem altitudinis dimensione reiecta quod in ipsis partibus uideamus. Omnis enim eiusdem spatii figura — — — — — figuris ad aliud extra relata aut equaliter est longa et lata aut equalis longa aut equaliter lata aut maior et longa et lata aut maior longitudine aut latitudine tantum. aut certe minor utroque aut minor longitudine dumtaxat aut mensura latitudinis sola quod subiecte declarant figure quippe circa quas secundum diuersam positionem acceptus omnes harum complexionum VIIII modi demonstrari non abnuunt.

Nunc igitur cum modos ipsos numero comprehendimus nec non exemplis omnia ad intelligentiam patescunt quod sit ratio ipsorum augendi dimi-




nuendique et quam prorsus habeant resolutionis naturam expedire curemus.[1]).

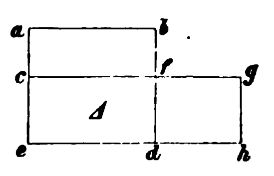
Omnium que tam longa quam lata sunt altera nullatenus in alteram resoluitur. Cuius rei non alia causa uidetur nisi per omnia uidetur conueniens equalitas. Ergo hic modus a ratione auctionis et diminutionis excluditur.

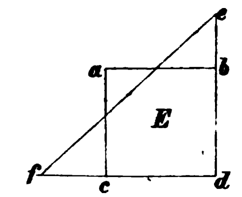
*) Ergo uolumus zu ergänzen.

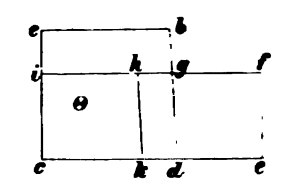
1) Die ganze Betrachtung bezieht sich auf die Verwandlung von Figuren gleichen Flächeninhaltes in einander. Sie hat wesentlich den Zweck zu zeigen, dass die Verwandlung des Kreises in ein Quadrat nicht unmittelbar geschehen könne, weil beide Dimensionen von Kreis und Quadrat verschieden (entsprechend Fall IIII oder VII). Man hat daher den Kreis zunächst in ein solches Vierseit zu transformiren, dessen eine Dimension oder Seite mit der des Kreises seinem Durchmesser übereinstimme, wodurch das Problem auf einen der Fälle II oder III reduzirt ist.

Quid enim ad explendam equalitatem alii quid prorsus equale est addas? Sed neque quid (?) auferre debebis. Sic enim equalitatis destrues comparationem.

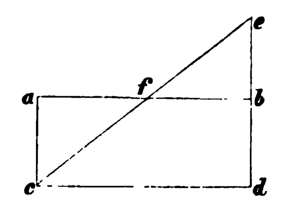
Restat ut ad alias transeamus et primo dicendum de illis que longo tantum aut lato equales existunt. Quibus omnibus — — — — — — omnino inherere uidetur ut — — — — — — opporteret eas uel augeri uel minui — — — — — una tantum resolutio fieri debeat ut si *aAC* trianguli latitudinem rescidas inter *AB* et inter *CB* per medium et adiungas

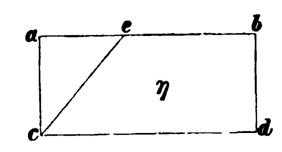


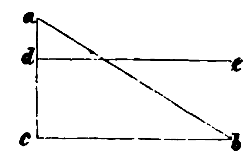





*B* ad *C* dico ex triangulo quadrilateri formam procreatam esse. Sin autem quadrilateri formam *ABCD* ab angulo *C* usque ad *e* quod est medium *BD* partiaris et *d**) iuxta *B* apponas. Rursus ex IIII laterum spacio triangularem formam procurasti unius scilicet reiectionis detrimento nec non unius auctionis additamento quadrilateri quidem longitudine diminuta trianguli uero latitudine recuperata. Videsne familiarem huiusmodi figurarum inter se transitionem? Quodsi iacente quadrilatero








inter *AC* et inter *BD* eadem trigoni superficies longitudine curret ad signum *de* autem *b* (?) apponitur rursus hoc modo ortogonium ex tribus ad IIII latera reduxisti quod idem poteris reparare si ab angulo *d* inter *ed* quadrilaterum diuidas ad signum *e* et *d* colligas ad *c* et his exemplis que sis equalis aut longitudine tantum aut latitudine altera in alterius compositionem transfiguratur.[1]) Nunc de his que sunt uel longitudine uel latitudine maiores minoresue consideremus. horum IIII sunt modi qui eo a superioribus distant quod illi quidem uulgares existunt ut pote qui in se

*) Wohl *e*. Die eingeklammerten Buchstaben dürften in Fig. *Γ* statt der des Originals zu setzen sein.

1) Obgleich die Buchstaben der Figuren denen des Textes nicht völlig entsprechen, ist der Sinn doch unzweifelhaft, wenn man beachtet, dass es sich um nichts weiter als die Verwandlung der betr. Figuren handelt.

ipsos facillime pateant. et a quouis imperito artis geometrice natura tantum monstrante et augeantur et minuantur. At hi IIII priori numquam ualeamus.*) — — — — — homines a homunculo administrari et necesse: a geometricis — — — — — quotiens aliquid spatiorum uel in agro uel in mensura uel in agrimensura uel unicumque fieri parte destinaueris equare ut si quadrilaterum siue stet siue iaceat quadrare uolueris quomodo uel eius longitudinem uel eius latitudinem equaliter poteris diminuere sin artem didiceris? Item si tetragonum uel longiorem uel latiorem reddere desideres ut sic tibi quadrilaterum restituatur id et per artis peritiam quodam modo perficies. Probet unusquisque cui hoc facillimum uideatur. Quare IIII ab illis distant. Ceterum unius resectionis dampnum**) sine dampno cum eisdem patiuntur et unius adiectionis accipiunt emolumentum. Nam quid superat in longitudine desumptum secundum suam rationem si quis eam non nesciat latitudinem emendat uel si latitudo superat ipsa quoque minuta lato equalitatem longitudini restaurat. Cur autem una omnes in se resectione transformantur rationem nobis uidetur esse eo quod in omnibus una dumtaxat reperiatur aut longitudinis aut latitudinis distantia. Sed cum de his disputationem prout potuimus ad finem perducta nempe ad reliquas duas que adhuc de IX supra complexiones animi uertamus intentionem. he igitur tanto difficilius reducuntur quanto se inuicem et latitudine et longitudine excedunt ipseque sole in equales suas non resoluuntur nisi per medias quasdam figuras. Cuius rei est causa quantum nobis conicere fas est adeo magna distantia utriusque dimensionis tum in lato quum in longo. Que distantia id sane efficit ut ad cognitionem equalitatis non proueniant nisi secunda uice mutilentur si forte fuerint maiores uel ex dupplici argumento fulciantur. si minores extiterint. In quibus et hoc est animaduertendum quod maiores non sunt omnino maiores sed dum in aliis partibus exteriores habeantur aliis partibus interiores existant. Quamobrem maiorum partium quantitas truncatur. unde minorum dampna quibus hec forma ab illa uidetur disparari resarciantur et truncantur quidem secunda uice quia nimirum partium longitudine partium latitudine auctores habentur. quatinus latum de lato emendetur et longum de longo compleatur. Eadem causa est cur minores secunda uice augeri epostulant quia uidelicet dum aliqua pars longitudini aliqua latitudini deficiat tam grande dampnum nisi secunda auctione restaurationem non capit. Sed igitur in talibus exercendi si quidem hec que oratione figuramus secundum aridi sermonis possibilitatem subtilius intelligere non dedignentur. Non enim res ex oratione sed oratio ex rebus illustratur. Nunc igitur ad circuli reuertamus expositionem dicti

*) Unleserliche Stelle in Folge Verschimmelung des Pergaments.

**) damnum?

cui precipue inter IX complexiones deputetur. Nimirum quadrilatero comparatur uel illi qui longitudini tantum est equale uel illi qui latitudine tantum non minuto? deputari ualet. habet enim XIIII in diametro tam per latus quam per longum quantum et quadrilaterum per II latera habet. Tamen facillime si quis aduertetur in hanc formam posse*) resolui. Sed quo tempore obsoleta est et antiquitatis geometrice facultatis exercitatio que scabies fere ante ipsum boetium omnes philosophorum greges ipso conquerente inuasit. nullo id existimare presumpsit uidelicet quod nulli uidebatur credibile ut circumferentis linee curuitas illa tenus extendi posset et ad rectitudinem aliquam tenus reduci. idem autem circulus relatus ad quadratum dum distat ab eo tam lato quam longo difficilius in ipsum resoluitur quod uidelicet ab eodem duobus dimensionibus disparatur. Quamobrem et primo resolutionem capit in quadrilaterum. unde non amplius quam una dimensione distat. ut eo resciso et illa distantia iam priuato regulare quadratum habeamus et his rationibus demonstratur cur circulus in quadratum — — — reduci non possit. hoc in loco liber iste suo fine claudatur.

## Prologus quinti libri.

Haud me ipsum latet presul clarissime nostrum hoc studium non usquam quamquam ad dignam subtilitatem extenuatum multaque minus in eo reprehensioni pateret in ipsaque compositione uerborum nedum in rerum unitate quod partim accideret ex inculto ingenio ac raro scribendi usu dum magis procurando corpori quam stilo exercendo dediti sumus mimine recuso partim autem euenire ex nimia difficultate subtilissimarum rerum in quibus et perfectos uiros aliquando falli necesse est. nemo qui te (?) fellat decedit his alia pleraque impedimenta quām maxima. Primo officii cura tum prouincia familiaris rei et si parue deinde crebra inequalitas corpusculi mei postremo interioris hominis quam plures absque termino molestie concepte ex nouis et insolitis rebus quas repente emergere nostris diebus ad dissipationem honestarum rerum nemo tamen ferreis precordiis dolere non potest. Hec igitur res ueluti contra unum hominem legio armata. ita cetera eadem cuius tibi debitor sum deuotionis assistunt ut non tam indigandum**) sit quod in rebus aut uerbis peccatum offendat quantum illud est animaduertendum posse quemque ad scribendum inter tot curas tantasque omnium probationes uoluntatem applicare. quoniam flere quam studere potius libet. Quod certe fieri non posset nisi precipua uis tue dulcedinis hanc in omnibus amaritudinem ueluti mel absinthium temperaret.

*) posset?

**) indagandum?

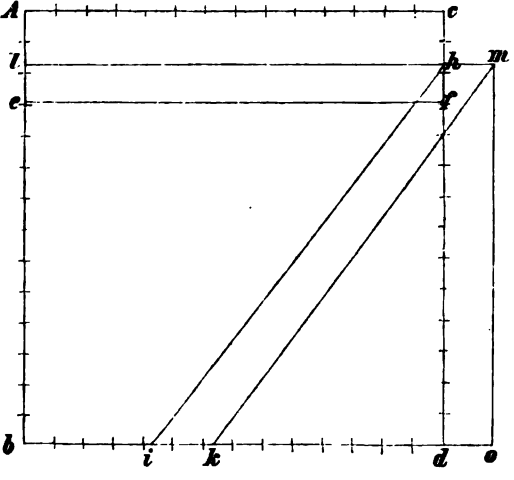
## Explicit prologus. Incipit liber quintus.

Quoniam igitur in perquisitionem circuli quadrati ex circulo. quadrilaterum ex quadrilatero quadratum produximus queret forsitan aliquis contra ne a quadrato ad eandem quadrilateri formam umquam perueniri possit a circulo. Quod cui sit dubium cum non aliter in signis contingat atque solet euenire in qualibet massa plumbi ferri eris argenti auri ceterisque id genus quorum unumquidque ualet eodem pondere conseruato a quadrati forma si forte quadratum existat cum in trigonam. (nam) in pentagonam tum in aliam quamcunque maluerit artifex speciem conuerti et rursus a specie speciem ad pristinam qualitatem cum dentibus mallei retorqueri? Quid ipsum natura ceree molis potissimum non recusat quod ignei caloris in attactu facile amissa sui rigoris duricia nunc in longissimum tenorem distinctus nunc in modum pile eadem sese patitur retundari. et nunc ab hac figura in illam traduci nunc ab illa in hanc non est difficile reformari. Nichilominus exempli ratione tractabilitatem argilli nos instruit liuius. Tamen horatius protulit ita. Argilla quiduis unitatibus. Adhuc in liquoribus eandem naturam copia est perspicere. Nam sciatur aque uini mellis aliorumque id genus in uase rotundo ipseque rotundam conseruat figurationem. Eiusdem autem in uas oblongum transfusio necesse est longitudinis productionem suscipiat a quo ualet item priori forma restitui si reddatur eiusdem uasis rotunde capacitati. Ergo non est dubium ad similem modum omnem (!) spatium eiusdem quantitatis mutua transformatione uariari nec minus a quadratura ad circulum redire. qua articulari compositione quatuor angulorum cum totidem lineis figuram accipe. Verum difficillimum est eiusmodi negotium nec tandem sine labore inuenietur quomodo fiat quod facile cognoscitur quod ita fieri debeat. Nam dato quadrato circuloque magnitudinis ut par eidem circulus producatur num nouerit quis imprimis sitne lateri addendum aliquid an potius aliquid auferendum deinde quid demi qua ratione sumendum? Huius rei conforte ostendemus qualiter omnes figure quadrilatere in quadratas religantur manifesta erit et transformatio et reformatio. Ad perspiciendum autem qua arte quadrati formam in illo modo*) quadrilaterum quod processit reduci oporteat paucis ostendam cum nulla difficultas impediat licet inuentio sit inuoluta labore. proposito igitur quadrato *abcd* latera superioris et inferioris in partes XIIII disparties et ex his III per lineam *ef* excludes atque ad ipsius linee caput ex ipsis lineis XIIII quadrabis unam juxta quam. I.**) ad mensuram eius quadrati diagonium posito supra f circino affigies punctum *h* sub illud quod est *c*. a quo ducetur linea ad appositum

*) fehlt in

**) primam?

sibi inferius $i$ punctum*) excluso spatio quod inter ipsas $hi$ et $ac$ lineas includitur. quod si demiseris a latitudine figure. ad**) eodem modo inferueris ad reparandam longitudinem quo supra ablatum meministi. sed per




obliquum dico quadratum in formam quadrilateram ut propositum fuerat redactum esse ueluti figura monstrat subiecta.

Equale est enim $aeha$ spatium $hlmn$***) spatio. Est autem totum quadrilaterum $lmbo$ cuius si diuidas $cb$ minus latus in XI partes inuenies easdem et III insuper eiusdem quantitatis in $lm$ quantitate maiore. Quare non est dubium reformationem hanc integre perfectum esse cum eadem profecto latera quam ante habuerunt representent comparationem[1]). Huius itaque rei demon-

*) $hi = Ac$ dem Früheren zufolge.

**) l. at.

***) Wohl $alch = hmdo$.

1) Die hier gegebene Construction der Verwandlung des Quadrats $Ad$ in ein Rechteck, dessen Seiten das Verhältniss 11 : 14 haben, kommt auf die bereits früher (III. Buch) gegebene zurück. Auch hier würde man der Construction zufolge haben, da:

$$cd = 14$$
$$mo = 11 + \sqrt{2}$$
$$lm = \frac{14}{11}(11 + \sqrt{2}).$$

Soll das Quadrat $Ad$ dem Rechteck $lo$ gleich sein, so muss sein:

$$196 = \frac{14}{11}(11 + \sqrt{2})^2 \text{ oder:}$$

$154 = (11 + \sqrt{2})^2$ d. ist die frühere Form. In der That findet sich für die Quadratseite $11 + \sqrt{2}$ der Flächeninhalt:

$$f = 154{,}1.$$

In Wirklichkeit würde man übrigens das Verhältniss $\frac{ch}{hf}$, worauf es wesentlich ankommt, erhalten:

$$\frac{ch}{hf} = \sqrt{\frac{14}{11}}$$

statt wie im Text:

$$= \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

stratione completa nunc iam constitutio quadrature circuli describatur. Hec siquidem iuxta hanc regulam fieri debet. Dato ad quadratum circulo ductis per medium centrum lineis duabus primo secetur ipse in equas IIII portiones. Quo facto utraque linea XIIII diuidatur. Deinde autem iuxta punctum circuli quadratum fiat cuius singula latera ad unius XIIII mensuram sint protensa. Hoc uero quadratum diagono partiatur. Porro a diagonio dematur latus et quod restat in geminas particulas scindatur. Harum sumatur una. deinde a puncto utriusque linee siue diametri sexta pars undique uersus numeretur et huic illa particula aduingatur. atque ille locus diligenter punctis assignetur. Deinde per ea puncta linee ducantur quoad sibi inuicem concurrant. Igitur hoc completo inuenta est procul dubio circuli quadratura. Sed huius rationis dabimus exemplum. ut sicubi alicuius dubitacionis obscuritate caliget. exempli luce palam fiat.[1]) Sit item propositum *ahta* circulus et sint ducte per medium centrum linee due. altera ab *a* in *B* porro altera a *t* in *a* et sit utraque linea in partes XIIII distributa. et sit constitutum quadratum iuxta ipsum centrum quod habet per singula latera unam*) XIIII tocius diametri et sit quadratum illud diagonali linea diuisum quod est *ac*. De hac autem dempta sit mensura unius lateris *aB* remanet pars diagonii quantum est inter *Bc* hoc autem per medium diuidatur et sit ibi *e* punctum. Erit igitur medietas *ec*. Ea uero ad sextam a puncto diametri (centro) partem undique uersus adiuncta sit ubi linee per singula latera dirigantur quousque concurrant. Dico ergo constitutam circuli quadraturam. Nunc autem rationem subiecta figura demonstrat. In quam appel.

— —**) Quasi forte matutinum solem nubibus atexeret (?) quid nisi aliud equinoctium expectandum. Et si item illo die tempestas obuenerit quid nisi

1) Diese Construction schliesst sich nicht unmittelbar an das Frühere an. Denn die Anwendung des vorherigen Verfahrens würde für die Seite des dem Kreise gleichen Quadrats durch die Diagonale des ihm umschriebenen Quadrats ausgedrückt ergeben:

$$a = \frac{11 + \sqrt{2}}{14} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}}$$

während sich hier herausstellt:

$$a = 2d \left( \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{6} \right) = d \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

wonach sein müsste:

$$75 = 53 \sqrt{2}$$ was angenähert der Fall.

Man erhält übrigens nach dem jetzigen Verfahren:

$$a^2 = 196 \left( \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1 \right)^2 = 154{,}6$$

*) scil. partem.

**) Fehlen einige Worte.

rursus usque ad tercium uel ad quartum uel si ita contingit ad XXX equinoctium dilatione facienda. Cum impedimento tollendo quo pacto uno quodam die sole lucente meridies inuestigetur monstrare curemus. Sit enim positus gnomo in medio quolibet circulo. Is autem ita temperatus esto ut umbra illius paulo ante meridiem intra circinationem sese recipiat et item paulo plus meridiem eandem excedat. fit isque punctis ubi umbra uel ingressa est uel egressa spatium illud inter II puncta per medium diuidatur. Ad quam medietatem ab eo puncto ubi gnomo affixus est ducatur linea. Nimirum hac arte centrum solis meridianum deprehensum affirmamus iuxtaque orologia regulare potes. sicut equinoctiali ita et ceteris quibusque tocius anni dierum curriculus. Cum igitur tanta sit dignitas circuli iure non ipse ad quadratum sed potius ad ipsum referri uidetur quadratum. His etenim finitis tandem ad excessuras ueniendum quarum in tantum difficilius uidetur ad inueniendum mensura ut plerique resectas particulas intrutinam mittant. libreque lancibus examinent equalitate(m). Dico igitur XX et VIII partes quot est centesima LIIII si ad quadrilaterum respicias. ab excessuris contineri. quarum dimidia pars excessuris circuli[1]) dimidia uero quadrati deputatur excessuris. Hoc autem probatur ita. Quadratura circuli constituta. tale circa gyrum circuli quadratum ascribe quod partes eius attingat extremas. Id perfecto in singulis lateribus CLXIIII mensuras iuxta diametrum circuli necessario retinebit. Hoc autem quadratum per singulos angulos X semis partibus excedit aream circularem. Cuius rei perspicatio in promptum est tibi. Nam quod decies*) XIIII C. X. C. VI reddant que est circulo ascripti continentia quadrati. Sed embadum circulare CLIIII continebat quos superant C et X. C. et VI. XLII.**) Hos autem X. LII in IIII partes equaliter diuide fiunt X et semis particulas inueniri.[2]) Igitur hoc ita probatum priori dubitacioni argumento duc: et quanto angulum interioris quadrati exterioris angulum uincat perquire. hoc autem fiet ita. Ab

1) Behauptet wird, dass der Ueberschuss des Kreises über das ihm gleiche Quadrat plus dem des letzteren über diesen = 28, wovon auf jede Fläche die Hälfte kommt.

*) quatuordecies?

**) 196 − 154 = 42.

2) Der Sinn ist ohne Schwierigkeit zu erkennen:

Die Fläche des dem Kreise = 154 umbeschriebenen Quadrats ist 196. Daher der Ueberschuss des vierten Theils des letzteren über den, jenes: $= \frac{196 - 154}{4} = 10\frac{1}{2}$.

angulo maiore illud quo minorem superat prescides id deinde ipsi minori comparabis et bis tantum inuenies. Quare minoris anguli continentia tribus semis particulis constat. Sed III. semis IIII. ducti XIIII ponunt. His autem dupplicati ut cum eis excessure circuli annumerati sint XXVIII restituunt. Ergo si hoc feceris probatur uti reor X et VIII*) partes in illis angulis continentes quibus se alterutrum excedit circulus et quadratum.[1]) Hoc itaque demonstrato illud et uolumus explicare quanto superent ab inuicem tetragonica forma et item quadrilatera quid monstratu dificillimum est. Est autem distantia hec XI pedes uel asses et totidem septunces paulo plus.[2]) Quantum uero plus diffinite monstrari non potest calculando. cadit enim in minutias eius-

*) l. XX et VIII.

1) Obgleich auch hier wegen der fehlenden Figur der Wortlaut stellenweise unklar, so kann der Sinn des Ganzen nicht zweifelhaft sein. Bezeichnet $x$ die Kreisfläche, $a$ das umbeschriebene, $i$ das eingeschriebene Quadrat, so soll der gegenseitige Ueberschuss des Kreises und des ihm gleichen Quadrats, welches ihm concentrisch sich als Differenz aus der Fläche des Quadrats und dem arithmetischen Mittel des um- und einbeschriebenen Quadrats ergeben. Denn man hat:

$$a - x = 42$$
$$x - i = 56$$
$$2\left(x - \frac{(a+i)}{2}\right) = 14,$$ welcher Werth sowohl den Ueberschuss des Quadrats über den ihm flächengleichen Kreis, als auch umgekehrt den des letzteren über jenes ausdrückt, so dass die Summe beider $= 28$. Ein einzelner Theil ist somit $\frac{28}{8} = 3\frac{1}{2}$.

In Wirklichkeit hingegen ergibt sich der in Rede stehende Unterschied folgendermassen: Man erhält für eins der vom Kreise gebildeten 4 Segmente $s$ die den Ueberschüssen des Quadrats gleich sind, da der Durchmesser des Kreises 14, die Quadratseite $\sqrt{154}$ ist:

$$s = 49 \, arc \, tg \sqrt{\frac{3}{11}} - \frac{77}{2}\sqrt{\frac{3}{11}}$$
$$= 3{,}452.$$

2) Man findet für den Ueberschuss des Quadrats vom Flächeninhalt 154 über das ihm concentrisch liegende Rechteck gleichen Flächeninhalts von den Seiten 11 und 14:

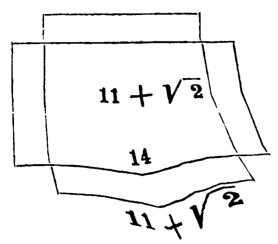
$$\varepsilon = (11 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 17{,}4$$

Für den Ueberschuss dieses über jene:

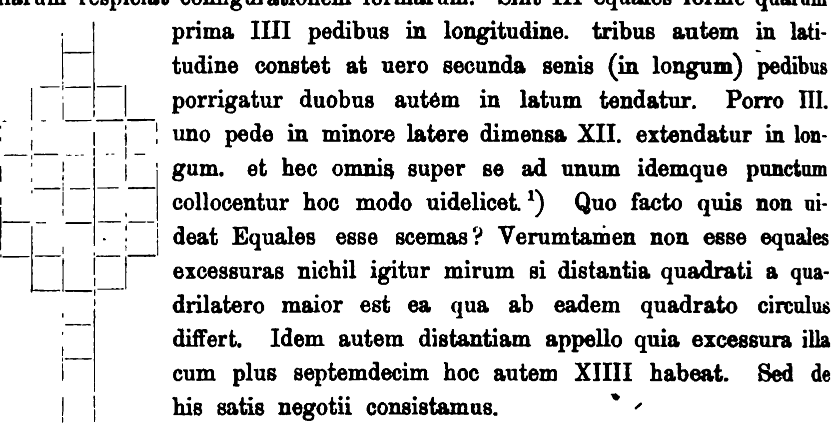
$$\varepsilon' = 11\,(3 - \sqrt{2}) = 17{,}6 \text{ oder ppt. } 17\frac{7}{12}$$

In Wirklichkeit müsste sich ergeben:

$$\varepsilon = \varepsilon' = 154\left(1 - \sqrt{\frac{11}{14}}\right) = 17{,}5.$$



modi que nulla ualeant comprehendi ratione. Sed hic forte aliquis in animi rationem ducatur cum his figuris circulus adequetur cur ille et quadratum minus se inuicem excedant. uel cur amplius isti sese superuadant. quin omnium eadem quantitas inuenitur. Quod facile poterit aduerti si quis aliarum respiciat configurationem formarum. Sint III equales forme quarum



prima IIII pedibus in longitudine. tribus autem in latitudine constet at uero secunda senis (in longum) pedibus porrigatur duobus autem in latum tendatur. Porro III. uno pede in minore latere dimensa XII. extendatur in longum. et hec omnis super se ad unum idemque punctum collocentur hoc modo uidelicet.[1]) Quo facto quis non uideat Equales esse scemas? Verumtamen non esse equales excessuras nichil igitur mirum si distantia quadrati a quadrilatero maior est ea qua ab eadem quadrato circulus differt. Idem autem distantiam appello quia excessura illa cum plus septemdecim hoc autem XIIII habeat. Sed de his satis negotii consistamus.

## Prologus sexti libri.

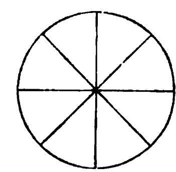
Cum multociens ad memoriam reduco in leuioribus studiis perfectissimi uiri quem plurimos annos attendi uerumtamen uereor nimis ne a partibus intentionem meam diuidentibus pro tam arduo incepto temeritatis (me?) accuset. Quid est enim obsecro thebais vel eneis illa papinii. statii sursuli. idem sursum canentis illa uirgilii marǫnis doctissimi poetarum quid igitur nisi leue quoddam et inane poetice fictionis inuentum. Et tamen dum in utrumque sudatur his VI annorum reuolutiones explicantur. Quod si ita est putasne quantis sit opus induciis ad integram expositionem circuli quadrature. Utique si difficultas musicorum sonorum eo usque pytagorice subtilitatis acu tamen euicerit eorum inuestigationi frustra studium applicasset nisi tandem diligentia illius mallei fabrorum diutissime desiderata ratione instruxisset, multomagis laboriosam huiuscemodi perquisicionem necessario fateri debemus. Nempe ut de ceteris reticeamus sola dumtaxat propositarum formarum diuisio. quanto diuisione monochordi artificio non uincat. Quare fortassis reprehensores non deerunt quod ego uiderer. animatus temeritate ad tam difficillimam rem prorupere non extimuerim. Ignosce pietas ignosce. date uenia queso quicumque non estis ignari trahi quemque omnium horum voluptate sua. Voluptate et ego si quid peccarem: peccaui. Ea nimirum

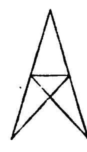
1) Hierher gehört offenbar die im Text bereits früher angegebene hier nochmals verzeichnete Figur.

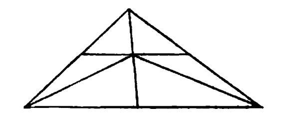
voluptate qua satis superque delector in amore et gratia mecenatis mei patricii mei cesaris quoque siue potius augusti mei. Valida causa: amor secus(?) Quamobrem quibus*) — — — temeritatem sapiens asscripserit numquam. Sed nunc uideamus*) — — — circulo damus.

## Explicit prologus incipit liber VI.

Ad équalitatem circuli et quadrati seu constituendam seu approbandam nichil ita prodesse puto quam si utriusque figure ars foret reperta diuisionis. Quapropter hanc rem scilicet interim in solo quadrato. altera adhuc a sensu nostro remota ut potero inuestigare conabor. Ingredietur a speculatione communi compendioso tractatu. Omnis diuisio formarum aut naturalis est aut arte perficiatur. Naturaliter est quod per se quisque facile nouit. Illam uero ad artem debemus peruenire que nulli est obuia nisi aut disciplina aut studio et exercitatione comparata. Sed naturalis duobus modis perfici uidetur aut enim a latere ad latum oppositum linee ducuntur quibus figure distribuuntur uel in duas uel in III uel deinceps consequentes partes. aut a puncto medium tenente locum eiciuntur. Verumque fieri potest in his formulis quod et punctum in medium clauditur et ipse IIII lateribus et rectis angulis includuntur. Sunt







nihilominus que lateribus carent ut circulus et sunt item quarum medietas puncto disignari non ualeat ut trigonus isosceles vel ut ambligonius in quo quis ita in medio punctum constituat ut ab omni angulo omnique latere equali differat interuallo? Quare hujus forme triangulum ab utroque remotum est diuisione. At uero circulus quod punctum ejus ab omni circumferentia equaliter distat eam recipiat quam fit a puncto exeuntibus lineis diuisionem. quia uero latera recusat a laterum diuisione alienum existit. Porro superficies quadrati dum sit rectangula et IIII lateribus inclusa a quibus equali distantia punctum in medio fixum inuenitur utrumque sectionis non refugit modum. Sciendum autem hanc diuisionem cum equas recipiat partes nullam in partibus proportionem habere ad exemplum uidelicet numerorum qui uel in duos binos partiuntur inter*) — — — uel III IIII VI VIII et cetera. cum uero*) — — — inter partes illarum posse aliquam inueniri comparationem. Quoniam si quis nos (?) forte uoluerit summam aliquam numeri secundum eas quarum habitudinem requirit partes distribuat. earum-

*) Wegen Verschimmelung sind die folgenden Worte unleserlich.

que partium adinuicem relatione perspecta facillime comprehendit ut si forte medietatis ad III partes comparationem requirat senarium bis itemque tum partiatur. Erit igitur medietas III tercia uero duo. Sed III ad II sesquialtera cognatione iunguntur. Sesquialteram ergo rationem haberent tertia pars et medietas. Eodem modo XII qui III et IIII haberent modo tantummodo quantum diuisis. tercie quarteque partis ad se relationem inuenies. Nam quomodo se habent IIII ad III eadem ratione tertia pars respicit quartam atque hanc insistentes uiam omnium partium proportiones absque ulla repperiemus offensione. Hec autem dicta sunt pro diuisione secundum naturam. At uero diuisio artis in equalibus lineis perficitur. Quarum in quadrato diagonium maxima reperitur relique autem quanto magis angulo accedit. magis magisque breuiantur. Porro in circulo diametros (?) maximum habent modum. Que uero ad ambitum propinquiore existunt maiore contrahuntur breuitate. Cuius quante sint utilitates ego quidem enumerare non possum. Hoc tamen dicam quot pedibus circulus quadratum excedat. nulla melius deprehenditur ratione. Nunc igitur qualiter area propositi quadrati que (?) circulo equamus per hanc diuidi possit inuestigare curabo. Primo et erit uidendum quot naturales includat tetragonos a pari numero productos. Naturales dico quod sunt et fasticii arteque compositi uelut ipse quem nunc habemus in manibus. Quot enim naturales erunt tot et lineas inuenies cetera. Hoc autem ut a maximo incipiamus CXLIIII demitur? C. Post hoc LXIIII. Subinde uero XXXVI hinc autem XVI et nouissime quaternarium opere et actu quadratum. Sed quot sunt isti? VI. Sex igitur lineas in CXLIIII tetragono easque certissimas habes. Quid tum? quid de reliquis faciendum. Utrumne monstrare possibile est? Puto quod aliqua adhuc inuestigare copia erit. Nam latus omnis dupli diagonium est simpli. Ergo XII cum sit latus CXLIIII tetragoni faciam ex eo diagonium. Eodem modo X cum sit latus C. quadrati diagonium fiat. Item VIII VI IIII II omnia hec latera pro diagoniis acceptis linee fiant ad eandem diuisionem idonee. Et harum quidem atque superiorum quot pedes unaqueque contineat breuissime succingatur. Ille enim dimidii sui quadrati harum uero quoque partes eiusdem includis. IIII. Suorum uero proprie quadratorum similiter ut ille dimidiam. Quorum item lateribus sumptis ad diagonia eadem consequitur ratio. Et hac arte inuenies omnes simpli ad duplum cognationem habentes. Sed huic exceptas qua ratione perquiremus? De quo genere est quidem III V VII XI et quecumque ad illam dupli et simpli non pertinent rationem.[1]) De quibus omnibus sat agendum est nobis ut et eas metiendi ars naturale sit. habita prius consideratione de III an

1) Der Inhalt des Vorherigen ist klar. Wenn die Flächen der Quadrate und ihre Seiten resp.:

nulla proportione iungatur ad alterinsecum positas. Nam IIII ad primam existit dupla. Inter quas II et III numquid ad ipsas et inter se aliqua proportione conferuntur? Et hanc quam esse dicemus? Ex illis quippe qui in usu habentur quosque diligentissimi numerorum inspectores memorie posterorum scriptis tradiderunt quis tante subtilitatis hic aliquando ostendat. Annon manifestum huiusmodi proportione neque in multiplici genere partiente inueniri? Si enim II. ad primam multiplex exisset et item III ad II. IIII. que ad III. profecto duplex ex III proportionibus multiplicis necessario constaret. Est enim IIII ad primum dupla. Sed hoc falsum esse quis nesciat? cui sit ignotum minimam esse omnium multiplicium duplicem proportionem?[1]) Quare ipsam impossibile est ex multiplicibus constare. Quod si non ex istis multo minus ex aliis supra memoratis quod et illa duplex proportio multo minor inuenitur. Restat ergo aut superparticulari proportione ad se conferantur aut superpartiente aut nulla. Prima superparticularem attemptemus. Inuenimus enim multiplicem ex tribus superparticularibus constitutum id est VI ad III comparatos inter quos IIII et V ut omnibus notum est sesquitertiam sesquiquartam sesquiquintam proportionem efficiunt. Quamobrem putet aliquis in diuisione quadrati inter I lineam et IIII que se inuicem duplici collatione respiciunt. talem secundam habere constitui quod prime $\text{III}^{am}$. habent partem talem deinde $\text{III}^{am}$. quod secunde contineat quartam cujus et $\text{III}^{ae}$. IIII linea suscipiat quintam. Sed nichil minus uerum. hoc autem ea ratio probat quod $\text{VIII}^{am}$ esse duplicem secunde opportet. Quippe quaternario precedit IIII. Omnes autem quaternario se precedentes duplices erunt ad illas relate quod se numeri iuxta naturalem ordinem consequuntur quem ad modum mox II sequitur I. Quare necesse erit ut ad ipsam secundam duplex inueniatur. VIII sicut ad $\text{I}^{am}$. quarta. Que si illud constiterit maior

$12^2 = 144$
$10^2 = 100$
$8^2 = 64$
$6^2 = 36$
$4^2 = 16$
$2^2 = 4$

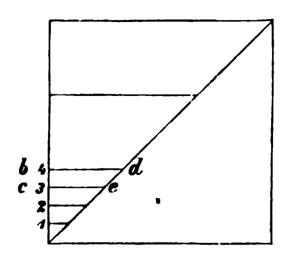
so kann man danach zunächst alle Seiten derjenigen Quadrate finden, deren Inhalt die Hälfte von jenem also resp. 72, 50, 32, 18, 8, 2 beträgt, indem man die Seiten 12, 10, 8, 6, 4, 2 als Diagonalen der zu suchenden Quadrate ansieht wie in Fig. Wie aber die Zwischenwerthe der Flächeninhalte 3, 5, 7 . . . zu finden dazu bedarf es einer andern Construction.

1) Wäre $3 = m \cdot 2$
$4 = m \cdot 3$, so müsste
$4 = m^2 \cdot 2$ oder $m^2 = 2$ sein, was für $m$ als ganze Zahl nicht möglich.



erit quam dupla. Impossibile enim erit prioribus IIII ita se ad inuicem habentibus posteriores et consequentes proportiones alterutrum non conseruare uidelicet ut linea V sesquisexta sit ad IIII. VI ad V sesqui-
am
septima VII ad VIII sesquioctaua ad VIII ad IX sesquinona? Tamen amplius conficitur quam proportio dupla. Quod ut liquido patefiat numero ad demonstrationem utamur. Sit itaque III quod III habetur quasi prima linea tum quarta uelut II tum V loco tertie postremo VI pro linea VIII. Dico si illud confirmatum fuerit octauam quod non opportet ultra duplum maiorem esse secunde. Que autem erit secunda? Quatuor. Que octaua? X. Nam X a tribus VII distat loco.[1]) At uero X ad quatuor relati amplius quam duplum reddunt quantum est ipsius quaternarii pars dimidia. Non igitur prime linee pars tercia sumenda est nec prorsus inter ipsam et IIII tales sunt proportiones requirende quales inter III et VI. duplam faciunt comparationem. Quid igitur? ubi deinceps in omni genere superparticulari alias inuenies quamquam sole ad duplum aspirent. Id prorsus fieri non potest. Itaque sicut multiplices et ceterorum ita et uista*) inequalitatis proportio ab hac quam tractamus diuisione separanda est. Restat ergo aut in superparciens genus incidere aut minime iuxta proporcionum procedere rationem. Sed cunctis et superpartientibus pretentatis nusquam tales reperimus qui continuati huic apti sint diuisioni.[2]) Neque enim secunda linea duas tertias I aut III. quartas aut IIII. V. aut V. VI aut deinceps plures iuxta proprietatem partientis accipiet partes. Que et ipsum ab hac diuisione excludendum. Quid igitur agendum? Num quid credendum cunctis his remotis generibus rem ullam comparari? Sed forte erit cui hec comparatio per adiectionem et diminutionem fieri uideatur hoc modo. Constituta linea scilicet I. si ablata VI eius deinde ipsa per medium diuidatur adiectaque

1) Die Superparticule bedeuten offenbar das Vielfache vorher bereits gegebener Theile. Denkt man sich zwischen die Quadrate vom Flächeninhalt 1 und 4 oder den Seiten 1 und 2 noch die vom Inhalt 2 und 3 in gleichen Intervallen eingeschoben, so ist die Länge der jetzt 4. doppelt so gross, als die der ersten. Betrachtet man nun die dritte dieser 4 Linien als das erste, also die dreifache Länge der früheren Einheit als solche, so muss man, damit das obige Gesetz gilt, mit der letzteren Einheit messen, während die Beibehaltung der früheren naturgemäss falsche Resultate ergibt, wie es der Text deduzirt.




*) l. ista.

2) Die Superpartientes sind Theile der früheren. Das Resultat ist somit dasselbe wie im vorherigen Falle d. h. es ist möglich, dass die einzelnen Quadratseiten ihr natürliches Verhältniss 1 : 2 : 3 : 4 etc. behalten, wenn man die Masseinheit ändert, ohne zugleich danach die Linien zu bezeichnen.

medietate augeatur secunde linee eius quantitatem inuentam esse. Sin autem ab hac X pars rescidatur et pro hac ipsa quantum secetur quarte partis sue deinceps adiectione concrescat III.$^{am}$ lineam inueniri a qua rursus XIIII subtracta VI que residui inuenta atque integre sue quantitati adiecta IIII$^{am}$ lineam dimensam esse.[1]) Atque hoc ordine obseruato ut uidelicet in diminutione a VI incipientes eam semper auferamus partem que denominata est a summa quaternario auctiore (excedente) ut X a VI; XIIII a X quaternario auctiores existunt. rursus autem in adiectione a II. parte progredientes illa semper adiciamus que a paribus appellationem trahunt continuo ordine se sequentibus. eo modo omnes procul dubio quadrati lineas inueniri. Quod utrum procedat in lineis numeri pro lineis accepti demonstrabunt. Sit ergo quasi prima linea MCCVIIII. d. c. ab his aufero sextam. id est CCI. d. c. remanent MVIII. horum sumo medietatem id est d. IIII hos addo prime summe hoc est MCCIX. d. c. fiunt. m. dCCXIII. d. c. qui pro secunda linea deputentur a quibus rursus decimam tollo uidelicet CLXXI. CCCLX. remanent MdXLII . CCXLIIII. Quibus subduco IIII$^{am}$ quod est CCCLXXXV. dLX. easque MdCCXIII. d. c. adiungo fiunt IIMXCIX . CLX. hi autem priore linea computentur. a quibus item XIIII ab hoc partem huius XIIII : CLIX. dCCCCXL. inuenietur qua subtracta remanent M.dCCCCXLIX . CCXX. Quos item sexies diuido et inuenio VI. CCCXXIIII . DCCCLXXX atque his illi summe coniunctis que pro III linea erat idem IIM . dCCCC . IX . CLX exeunt M$^{i}$ . II CCCCXXIIII . XXX . hos igitur pro quarta linea appono.[2]) Sed quarta prime duplicem esse opportet. hi autem ad unum numerum comparati tantum exuberant supra duplum quantum est summa IIII d. CCCXXX. quid idem uicium in lineis nihilominus euenire quis dubitet? Quam propter

1) Bezeichnen $l_1$, $l_2$, $l_3$ die bezüglichen Längen, so soll dem Text zufolge sein:

$$\frac{l_1 + l_1\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{2} = l_2$$

$$\frac{l_2 + l_2\left(1 - \frac{1}{10}\right)}{4} = l_3$$

$$\frac{l_3 + l_3\left(1 - \frac{1}{14}\right)}{6} = l_4$$

2) Das dritte Verfahren, das Verhältniss der Längen der Quadratseiten zu bestimmen, deren Inhalte resp. sich wie 1 : 2 : 3 : 4 verhalten, besteht in einer Art

illarum dimensio secundum adiectionem et diminutionem procedere non ualet. Sed rursus hic quidem obiciatur deesse non puto. Dici enim potest ut totam istam exuberantiam in eam quantitatem disparciamus que colligitur ex his summulis per quas ipsa diminutio progressa est que sunt igitur iste summule nimirum VI . X . et XIIII. Sed quenam ex his quantitas colligitur? Utique XXX. Per hos igitur distribuamus IIII . dCCCC . XXX. quo numero dupla proportio quarte ac prime linee superabatur.[1]) Egreditur pars XXX. CLXI. quam deinde primosexies multiplicemus fiunt. dCCCC . LXVI. Quos statim ab illo numero quem secunde linee retinent uicem id est m. dCCXIII.

Reihenentwickelung. Bezeichnet man wie vorher schon die bezüglichen Linien, die jenen Flächeninhalten entsprechen, mit $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$, so soll den Text zufolge sein:

$$l_1 = 1209{,}600$$

$$\frac{1209{,}600}{6} = 201{,}600$$

$$\frac{1209{,}600 - 201{,}600}{2} = \frac{1008}{2} = 504$$

$$1209{,}600 + 504 = 1713{,}600 = l_2$$

$$\frac{1713{,}600}{10} = 171{,}360$$

$$\frac{1713{,}600 - 171{,}360}{4} = \frac{1542{,}240}{4} = 385{,}560$$

$$1713{,}600 + 385{,}560 = 2099{,}160 = l_3$$

$$\frac{2099{,}160}{14} = 149{,}940$$

$$\frac{2099{,}160 - 149{,}940}{6} = \frac{1949{,}221}{6} = 324{,}870$$

$$2099{,}161 + 324{,}870 = 2424{,}04 = l_4$$

der Theorie gemäss sollte nun $l_4 = 2\,l_1$ sein. Dies ist aber nicht der Fall, sondern beide unterscheiden sich um:

$$2424{,}04 - 2419{,}200 = 4{,}830.$$

1) Man könnte nun auf den Ausweg verfallen, diesen Ueberschuss auf die 4 Linien im Verhältniss $6 : 6 + 10 : 6 + 10 + 14 = 6 : 14 : 30$ d. h. den Zahlen entsprechend zu vertheilen, welche die bezüglichen Zusätze geliefert, wodurch eine aus der andern entstanden. Danach ergibt sich:

$$\frac{4{,}830}{30} = 0{,}161$$

$6 . 0{,}161 = 0{,}966$ folglich die verbesserte 2. Linie
$1713{,}600 - 0{,}966 = 1712{,}634$. Ferner ist
$16 . 0{,}161 = 1{,}576$ demnach die verbesserte 3. Linie
$2099{,}160 - 2\,576 = 2096{,}584$
$30 . 0{,}161 = 4{,}830$ demnach die verbesserte 4. Linie
$2424{,}04 - 4{,}830 = 2419{,}200$

welches wie verlangt wird, doppelt so gross wie die erste Linie $l_1$.

d. c. subtrahamus. Relinquitur M dCCXII . dCXXXIIII. Quo ita diminuto ad XXX. reuertamus quod est CLXI. Rursusque non modo per VI. sed et per X. hoc est sedecies multiplicetur unum. .concrescunt . II . dLXXVI. Quorum subtractione illud qui(?) superat $III^{am}$ . $III^{am}$ (lineam) quo et suo habundat et secunde linee uicio emendemus. Supersunt IIXCVI . dLXXXIIII. Et his ita ad legitimam mensuram redactis rursus XXX per VI. per X per XIIII. id est tocies in augmentum ducamus. Exque multiplicatione tota illa summa consurgit qua prime linee numerus a quarte linee numero superabatur. Hoc autem est IIII . dCCCXXX. (qua tandem subtracta. ab ipso quarte linee numero id IICCCCXXIII) relinquentur. IICCCCXIX . CC. quem numerum manifestum est dupla relatione conferri ad ICCIX . dc. hos numeros quorum

| | | | |
|---|---|---|---|
| Partes linearum | | | |
| Sexta CCI. dc. | Decima CLXXI.CCCLX | Quarta X. CXLIX.dCCCCXL | |
| Priores linee ablatione superfluitatis corrigende | | | |
| MCC.VIIII. dc. | MdCCXIII.dc. | II.XCVIII.CLX. | II. CCCC. XXIIIIXXX |
| Remanentia linearum ablatis partibus | | | Superhabundantia linearum |
| D IIII | MdXLII. CCIII. | $\text{MdCCCCXLIX.CC}^{XC}$ | IIII . dCCCC. XXX |
| d. IIII. | $\text{CCC.LXXX.V.d.}^{LX}$ | $\text{CCCXXIIII.dCCC}^{LXX}$ | tricesime sunt habundantie |
| medietas | quarta | sexta | CLXI |
| Partes remanentium | | | |
| Sex tricesime | XVI tricesime | XXX tricesime | |
| dCCCC. LXVI. | II.d. LXXVI. | IIII.dCCC.XXX. | |
| Linee ablatione superfluitatis de superioribus correcte | | | |
| M.CC. IX. dc. | $\text{I.dCC.XII.XXX.}^{IIII}$ | $\text{II. XC.VI.dLXXX.}^{IIII}$ | II. CCCC.XIX. CC. |

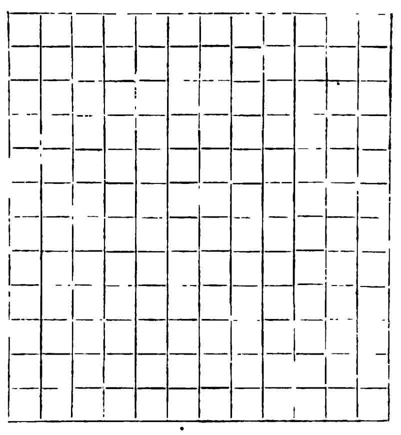
omnium radix est VI propter confusionem tollendam ita distinximus uti in subiecta formula patet. Quibus tamen promotis necessario usi sumus. eo quia non sunt inuenti minores qui tum integri in partes VI. et X. ac XIIII. diuidentur. tum diminuti II. IIII. VI. quoque reciperent portionem quorum

et exuberantia. tocies auferri non recusaret. Quoniam igitur de II. linea VI. de III. vero VI et X. porro de quattuor*) VI et X et XIIII idem. omnibus tricesimis quod et suo et secunde ac III. vicio laborabat abstractis quartam lineam primis inueniemus duplam sic earum legitima exigit dimensio. forte commodum uidebitur et omnino rationabile ut iuxta illam debeant metiri rationem. Que nimirum opinio in errorem adhuc exercitatis et ingeniis uix intelligibile. Ad quem deprehendendum ne quando ab illo decipiamus animum libet intendere. Ubi considerandum que prima linea eius quadrati latus existit. cuius secunda diagonum inuenitur. Hec autem comparatio non servatur in superiore descriptione a secundo ad primum I. a MCCIX . dc. ad MdCCXII . dCXXXIIII. Nam utroque in se multiplicato quadratus ille qui ex maioris multiplicatione concrescunt.(?) eum quadratum qui ex minore producitur plus quam duplo excedit. cum II linea duplum equaliter reddat prima uero simplum si utraque fuerit in latere sui quadrati constituta.[1]) Tandem manifestum est quod hec linee sicut iuxta proportiones uidelicet inequalitatum I (?) multiplicis et superparticularis et cum ceterorum metiri non possunt. Ita et non procedere ut per adiectionem et diminutionem mensurari consentiant. Quare aut earum mensuram necesse est ignorare aut rursus ad geometrice facultatis confugere adiumenta nec poterit quisquam obtendere quin per minutias debeant conferri. demonstrato iam superius quod omnis proportio que in minutiis constat possit et ad integros numeros transferri. Quare prius ab aritmeticis supputacionibus recedentes proportionem hanc siue potius mensuram per artem geometricam quod non usquam quoque aritmetice putamus addictam immo inquam prolibus propriam exercere considerationem perquirere studiamus. Ad quem ergo tendimus finem? Quid fieri opportet? Scilicet quemadmodum ille dubium reperte sunt per quadraturam naturalia sumentibus nobis diagonia singulorum ut tandem hec quoque simili reperiantur modo. Quadrabis enim VI eiusmodi particulas quales continet quaternarium quadratum aut nouenarium aut quilibet aliorum in hac figura et hac arte linea III inuenta erit. Item ut V inuenias quadrabis X. Septimam quoque inuenies eo quod est duplum ad septenarium in quadratum redacto. et si ubique eandem rationem obserues poteris reperire ad eundem modum reliquos omnes. Denique si in III. aut IIII aut V. aut alias deinceps partes quadrati spatium ab angulo partiri uolueris eadem te ubique ratione quadrandi iuuabit. quod manifestum erit eadem arte cognita quod ita monstrabitur ut in ipso limine sistamus uolentem ingredi

*) quarta?

1) Es sollte, wenn die angegebenen Längen richtig wären, $l_2^2 = 2l_1^2$ sein. Man findet jedoch für jene Werthe eine Differenz von ppt. 9700.

figura vero subiciatur prius in quo de ea dicta sunt uel dicenda in ea clarescant.



Hinc iam ostendemus subiecto prius quadrato de quo hac tenus epactarum est ut eo sub oculo posito ratio eius clarior fiat. In hac figura*) ab angulo sinistro sursum ordinauimus lineas naturalium trigonorum a pari numero reiectis imparibus eo qui ad medietates non habeant ex integro numero denominatas. et linearum quadrati duo habentem in latere prima posuimus qui inter se et angulum centesimas quinquagesimas**) quartas quas brevius appellamus pedes uel asses continet duas. Quadrati uero habentis quatuor in latero secundum posuimus qui asses includit VIII. Eius uero qui VI. in latere tertiam includentem XVIII. Itemque eius qui VIII quartam continentem XXXII. Deinde eius qui XV sub quo sunt[1]) asses L. Postremo qui XII. VI cui subiciuntur LXXII. has autem omnes diximus notas. et per has alias inueniri posse ignotas. Quod ita est. Nam lateris quod protingit usque ad VI si posita fuerit mensura inter IIII et V habebis lineam XXXVI includentem. Eius uero lateris quod summitas V attingit in medio tertie et quarte mensura ponatur et inuenitur ti(?) linea XXV sub se continens. Item eius mensura qui ad caput citate quarte copulatur si ducta fuerit inter alteram et tertiam erit linea cui subiciantur XVI. Rursus illa pars lateris que ascendit usque ad III. ipsa quoque ponatur inter eandem III. et alteram et facta est linea habens sub se pedes VIIII. Adhuc longitudo lateris. secundam attingens inter ipsam signetur V. et hec linea continebit IIII. Denique et illa lateris particula ubi summitas prime linee finitur eidem subjecta unum dumtaxat includit pedem. Igitur hoc ordine omnis hec ratio procedit. ut principalis linee ipsa tetrago. Denique diuidentes medietatem linee (duo) a lateribus sumpte quartam

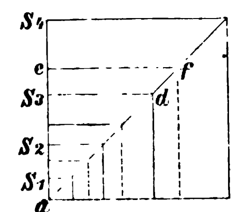
---

*) Die Figur ist unvollständig (cfr. die folgende Anm.).
**) quadragesimas? 144 tel.
1)
$s_1 = 2 \quad f = 2 \ (1 + 1)$
$s_2 = 4 \quad f = 8 \ (4 + 4)$
$s_3 = 6 \quad f = 18 \ (9 + 9)$
$s_4 = 8 \quad f = 32 \ (16 + 16)$
$s_5 = 10 \quad f = 50 \ (25 + 25)$
$s_6 = 12 \quad f = 72 \ (36 + 36)$

eorum semper includant partem. his ita in hoc angulo demonstratis alteram in opposito angulo ostendamus artem. ut ubi ista defecerit uiuemus ab illa. Hic ergo si diagonium primi assis metiaris eaque mensura notes utrimque figure latus ducasque lineam a nota *B* usque ad notam *a*. habes quantitatem eiusdem assis artis diuisione receptam. Ad*) hoc modo constituta linea prima accipe dimensionem eius eaque sicut antea utrimque designa latus et a signo *c*. trahe lineam usque ad signum *d*. quo perfecto ducerit duo asses singulariter includens. eadem quoque in angulo altero recepto primo quadrato diuiso per mediam? ut notum fiat esse inter has quarum mensure existat et alius modus.[1]) Si iam ventum est ad tertiam hic standum

*) At?

1) Die beiden hier beschriebenen Methoden, um aus einer Reihe von Quadraten, deren Seiten oder deren Diagonalen der Zahl nach bekannt, durch geometrische Construction andere zu finden, kommen wesentlich auf dasselbe hinaus. Im ersten Falle denkt man sich die Seiten und Flächen folgenderweise geordnet: Statt der Quadrate und ihrer Seiten betrachtet man ihre Hälften d. h. die durch eine Diagonale entstehenden Dreiecke, was an der Untersuchung nichts ändert.




Bezeichnet man demgemäss mit $s_1$, $s_2$ ... $f_1$, $f_2$ ... die resp. Quadratseiten und die Flächen der ihnen entsprechenden Dreiecke, so ordnen sich dieselben folgenderweise zu einander:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 2 & f_1 = 2 \\ s_2 = 4 & f_2 = 8 \\ s_3 = 6 & f_3 = 18 \\ s_4 = 8 & f_4 = 32 \\ s_5 = 10 & f_5 = 50 \\ s_6 = 12 & f_6 = 72 \end{array}$$

Um hierin Zwischenwerthe zu finden, z. B. den Werth von $s$, welcher $f = 36$ entspricht, so hat man nur die Diagonale des Quadrats, welches 36 enthält, auf der Seite abzutragen, d. h. $ad = ae$, dann ist das $\Delta\ efa$ das verlangte. Analog mit den übrigen. (Die Seiten $s_1$ $s_2$ ... sind, wie es der Text sagt, in geraden Zahlen gewählt um bei dieser Interpolation keine Bruchtheile zu erhalten.) Danach ergibt sich das vervollständigte Schema:

$$\begin{array}{ll} s_1 = \sqrt{2} & f_1 = 1 \\ s_2 = 2 & f_2 = 2 \\ s_3 = 4 & f_3 = 8 \\ s_4 = 3\sqrt{2} & f_4 = 9 \\ s_5 = 4\sqrt{2} & f_5 = 16 \\ s_6 = 6 & f_6 = 18 \\ s_7 = 5\sqrt{2} & f_7 = 25 \\ s_8 = 8 & f_8 = 32 \\ s_9 = 6\sqrt{2} & f_9 = 36 \\ s_{10} = 7\sqrt{2} & f_{10} = 49 \end{array}$$

quod arte qua nunc et prius usi sumus nichil hic proficere possumus. Quid ergo agendum? An cedendum difficultati? An a labore cessandum? Minime. Querenda enim ars quadrandi per quam in solum III. siue V et VI et VII et que cúrque adhuc recepte non sunt metiri possint. Hec autem ars ita se habet. Accipies de proposita VI asses unam per se figuram compones hoc modo.

Huius igitur figure minus maiori latus demes ad punctum *a* trahesque lineam ab eo usque *B.* et spacium quod superest diuides per medium *C. D.* linea. Quo facto ad mensuram lateris quod est sub *C* trahe lineas c. *e. f. g.* Erit igitur inter has spacium equale *a. B.* spatio spacium dico equale sed non per latus. fac ergo ut[*] et latitudo sit equalis et eo resciso l. longitudine. latitudinique adiecto quadrasti figuram. Cujus absque dubio si diagonium accipias tertiam lineam inuenisti que pedes descripti supra tetragoni tenebit III. Ad hunc quoque modum quadrato denario inuenies V. et quod impares non se aptos exhibent ad quadrandum semper eis duplicatis quadraturam eodem modo perficies et quecumque linee requirantur sic poteris inuenire.

His finitis magnum nobis uidetur quousque huc peruenire potuimus quare disputatio conticescat hoc loco. Libet autem infine inuentam circuli quadraturam aliquot uersiclorum quasi coloribus depingere quatinus moris omnibus adornata ut fieri a nobis predigna fiat quod ante oculos tue reuerentie aparere mereatur.

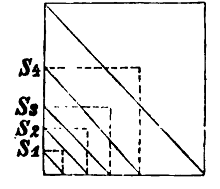
## Liber franconis de quadratura circuli explicit. Incipit liber de eadem re.

Platonica miratione quo pacto quadratum duplicare debeat edicam ut fundamento mee narrationis posito cetera conuenientibus accumulare ualeam. Quadratum enim equalibus rectisque lineis puncto sibi in quadro connexis mi constituo diagonum ab angulo in angulum diduco que proportio uero talis consideratur. Diagonium habet unum latus in se et quincuncem eius

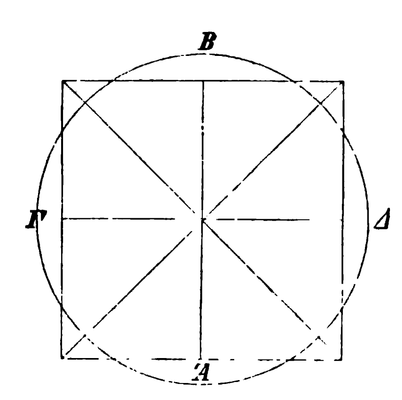
---

$$s_{11} = 10 \quad f_{11} = 50$$
$$s_{12} = 8\sqrt{2} \quad f_{12} = 64$$
$$s_{13} = 12 \quad f_6 = 72.$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Hinsichtlich der zweiten Construction, welche die nebenstehende Figur zeigt, ist Alles wie vorher, nur dass sich die Lage der Dreiecke geändert hat. Die noch fehlenden Zwischenwerthe des vorigen Schemas soll die folgende im Text gegebene Construction zu finden lehren. Leider ist durch das Fehlen der Figur das Verständniss derselben unmöglich. Dass sie jedoch von der bereits früher im III. Buch gegebenen der Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat nicht wesentlich verschieden sein kann, ist anzunehmen.



quem duplicare si uolo diagonium minoris faciam latus maioris. ecce duplum et simplum quadratum et hi in mensura inuenimus nusquam. Hactenus plato. Nam ut quadrato equale constituam triangulum spacio ipsius uerbi boetii exordiar. Iubemus inquit proposito IIII laterum spatium *A. B.* Sed quid absurdius quid ueritati contrarium. Quis ergo rationis aspectus quisue mentis uisus tantam possit ueritatis iniuriam ferre ut tribus lineis constitui possit quadratum cum tribus lineis totidemque angulis naturali ratione semper existat triangulum. Quadratum uero non minus quatuor lineis totidemque angulis consistere quis tam brutus animus qui nesciat. Iubemus inquit boetius proposita quatuor laterum spatio. Quid habet nisi quadratum et non triangulum. Et per errorem statim infert. Opportet ergo *A. B.* spacio equale triangulum constituere ut sit duplum *A. B.* spatio *c. d. e. f.* spacium. Ecce ex antecedentibus et sequentibus clarius luce patet. quod non trium laterum posuerat hoc boetius. sed quatuor A. B. quorum spatium quatuor litteris in c. d. e. f. stati duplicant. Ex quibus omnibus euidentissime constat idem uicium non manu boetii scilicet scriptoris aut quod magis est credendum cui (quidem) inuidentibus factum esse et quod hec disciplina in geometrica de qua hoc sumptum est in his regionibus penitus abolita idcirco error latens regnat per plurima. Quo abiecto ac interioris oculi aspectu adhibito mi ipse statuo quatuor laterum spatium A. B. cuius angularem lineam I in diagonium platonis auctoritate sumens. dupli latus facio spacii c. d. e. f. quod est duplum quadrati a. l. Idem primi uel supra dicti quadrati hoc primum duplum diagonio diuidens e. f. duos triangulos efficio unum c. d. f. alterum c. e. f. quia enim c. d. e. f. quadratum duplum A B quadrati certe c. d. f. triangulus equus est ipsi sicut et c. e. f. quia eius medietas est hoc modo nisi fallor. boetii ratione quadrato triangulus sit equus spacio ut he figure demonstrant. Item boetius de circuli quadratura eodem quoque modo inquit quesitum est si sit proposito circulo equum fieri quadratum quod aristotelis tempore scilicet prius non fuisse repertum. Cuius demonstrationem pretermittendam esse fatetur. eo quod longa fit quod nos nitimur compendiose deo fauente prout possumus exponere. Nam circulum mi statuo. cuius diametrum VII sit pedum circuitus uero XXII. quorum medietatibus in uicem multiplicatis aree XXXVIII . *s* . inuenio pedes. hec igitur geometricis uenusta circuli habetur regula. quadratum circuli satagimus coequari spacio ex ipso diametro VII. pedum V que septem pedis et



ducentesime partis*) quantitate quadrati facimus. et uideamus si hac lateris ratione poterimus aream quadrati implere XXXVIII . *s* . qui sit utique pedes aree circuli atque id abacizando applicare expedit. Dicamus igitur[1]) sexies VI. XXXVI et $\overset{\text{ies}}{\text{VI}}$. $\overset{\text{as}}{\text{V}}$. I. et $\overset{\text{as}}{\text{V}}$; $\overset{\text{ies}}{\text{VI}}$ ducentesima trescentesime hoc ita se habere in singulari linea quisque studiosus probare potest et quod secuntur cetera in minutiarum linea V. VI. as. et V. et V. in V. XXV. et V. et in ducentesima millesima et ducentesima. sexies tres centesime. et ducentesima in V. millesima et ducentesima (XL millesima.) in ducentesima. XL millesima. Nunc uero quid sparsim confecimus in unum hoc modo aggregemus. XXXVI. et. as. atque . V . Item. as. et V. fiunt XXXVIII. et . II . V. item XXXVI. et. VI. centesime faciunt. prima. decimaque conjuncte duabus. V. que supersunt reddunt absque errore semissem pedem et secundum boetii preceptum quadratum circulo equaliter appono. videlicet ut angulis suis circulo quantitate emineat equali et circulus similiter lateribus quadrati ac media . V , interualla ipsius diametri que pedes nominantur. et utriusque extremi semissem ut sex sint deinde unamquamque extremam semissem in V. equas portiones seco quarumque X pedis spacio ex quibus in unoquoque latere sumo . X . unam et $\overset{\text{am}}{\text{XL}}$ . $\overset{\text{e}}{\text{X}}$ . alterius partem. hoc uero modo diuidimus . V . pedis et ducentesimam ob equalem circuli quadratique compositionem ut hec figura demonstrat.[2])

Huius enim designatione formule paululum libet intueri omnesque partes sub numeri quantitate in unum colligere et utrum totidem quales debet

---

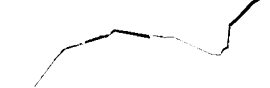
*) wohl: VI et $\overset{\text{ae}}{\text{V}}$. et ducentesime partis.

1) $$\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)^2=\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)=$$

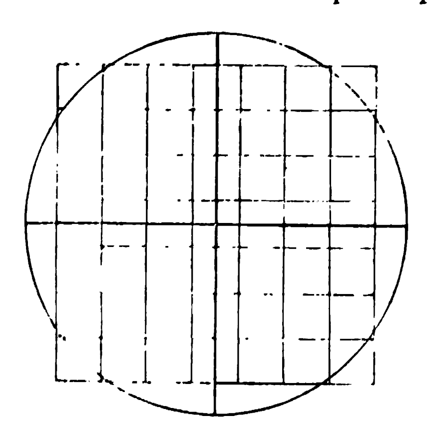
$$36+1+\frac{1}{5}+\frac{3}{100}$$
$$+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}$$
$$+\frac{1}{1000}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{40000}$$
$$38+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{40000}\right)=38\,\frac{1}{2}+\frac{81}{40000}$$

2) $$5+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{400}=6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}$$

$$\left[5+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{400}\right]^2=25+2\left(5\cdot2\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2=36$$
$$36+2\left(5\cdot2\cdot\frac{1}{10}\right)=38$$
$$38+2\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{10}\right)\neq 38\,\frac{3}{20}$$



habeat prouidere. Primum uero pedes integros ita quinquies . V . XXV. Post autem semisses qui in circuitu adiacent . XX . et facimus . X . integros pedes quos et XXV. uinctos fiunt. XXXV. deinde. III quadrantes qui in angulo sunt componunt unum pedem quem superioribus appositum fuit. XXXVI. sequuntur XX. decime ex quibus conficiuntur. X. $\overset{as}{\text{V}}$. quod duos reddit pedes. qui ceteris adiuncti. XXXVIII. fiunt. Post modum uero VIII. uicesime que circa centesimas in angulum habentur faciunt . IIII . . $\overset{as}{\text{X}}$ . que ipse . II . $\overset{as}{\text{V}}$. tum uero . IIII . centesime que in ipsis angulis sunt . II . L.*) II. L. unam. XXV. conficiunt. sumantur et. XX. CCCC. que cum ipsi decimis esse noscuntur. et fiant. X. CC. et ipse. V. C. Octo uero octogentesime que circa angulos sunt. IIII. CCCC. et iste duas ducentesimas. hec autem due unam centesimam. Que V. iam dictis addita fiunt. VI. hoc modo. IIII. quinquagesimas. Sed. II. quinquagesime unam. XXV. Ecce. II. XXV. et una quinquagesima. X. faciunt. hec cum duabus quintis superius iam dictis semissem uc . . faciunt pedem due millesime sane et quadragesimo millesimo cum . IIII . centesimis ita sunt coniuncte ut. CCCC. X.**) Et sicut in quadrato eas esse sic in circulo haberi nulli dubium est. quamquam ob sui exiguitatem atque subtilitatem peruidi non possunt. Preterea circulum in IIII. eque partientes II. lineas in quadro per centrum ducimus in quarum summitate anguli quadrati ex diuiso uenientibus lineis continguntur ut supra dispositum est. Per quas igitur lineas altera proponitur regula que quasi actiua informatur a speculativa cuius si caruerit materia nulla ueritatis nititur fortitudine. hoc itaque



$$\left.\begin{aligned} 38\tfrac{2}{5} + \left(2\cdot\tfrac{1}{10}\right)^2 &= 38\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{25} \\ 2\cdot 5\cdot\tfrac{2}{400} &= \tfrac{20}{400} = \tfrac{1}{20} \\ 2\cdot\left(2\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{400}\right) &= \tfrac{8}{800} = \tfrac{1}{100} \end{aligned}\right\}$$

$$S^a = 38\tfrac{1}{2}$$

Dabei fehlt:

$$\frac{2}{1000} + \frac{1}{40000}$$

*) wohl IIII . C.

**) wie $\frac{1}{10}$ mit $\frac{1}{400}$ in obiger Formel.

sic se habet. Ac centro autem ad circularem usque lineam (IIII) in equa*) spatia ipsa recta linea secetur quibus . IIII . V. eiusdem quantitatis superaddatur punctumque ibi figatur in quo angulus terminabitur. et sic in ceteris tribus ut per puncta quadrati deducantur latera. hanc circuli quadrate que auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat qui in priori contemplari teduerit.[1])

---

Cognita omnia consonantia fistularum in organis mensure ratio ita inuestiganda est: prima fistula ad arbitrium mensoris tendatur. eiusdem latitudinis omnes erunt. Secunda ita metiatur a prima. Vide latitudinis eius qui uocatur diametrum deinde in ipsa longitudine prime fistule excipiatur octaua pars diametri. Hinc usque ad plectrum sumuntur. XX. equales partes. Nona parte demota. VIII. partes que restant erit longitudo secunde. In secunde longitudine excipiantur $\overset{e}{\text{II}}$. $\overset{e}{\text{VIII}}$. partes diametri. reliquum diuidatur in IX. nona parte desumpta quod restat erit longitudo tercie. Tunc mensura reuertatur ad primam. In qua excipiatur tercia pars diametri. hinc usque ad plectrum diuidatur in IIII. Quarta parte desumpta erit longitudo quarte in qua completum est diatesseron duobus tonis semitonioque dimensum. Item reducatur dimensio ad primam. In eius longitudine excipiatur medietas diametri inde diuidatur in tria tercia parte ablata erit longitudo quinte. In cuius longitudine excipiatur $\overset{a}{\text{VIII}}$. pars diametri inde diuidatur in . VIII . nona parte detracta erit longitudo sexte. Inter hanc et septimam interponatur sinemenon. Ibi remittatur mensura ad quartam. In quarta excipiatur medietas diametri. quod remanet diuidatur in quatuor quarta parte sublata. quod remanet erit sinemenon. Deinde a mensura sexte disponatur septima. diametrum sexte partiatur in . VIII . Octaua parte excepta in longitudine reliquum diuidatur. in . IX . nona parte detracta quod residuum est erit longitudo septime. Octauaque ultima ad mensuram prime disponatur. Totum diametrum prime excipiatur. inde quod restat diuidatur in duo medietate sublata longitudo erit octaue. ad hanc erit diapente a quinta per tonum tonum semitonium et tonum. Eadem mensura in sequentibus. VII. seruetur. Ita fiet ut prima

---

*) in V?

1) Das Verfahren der Quadratur besteht darin, den Radius $\frac{7}{2}$ in 5 Theile zu theilen und 4 davon der Länge desselben hinzuzufügen. Diese Länge soll die Quadratseite sein. Man erhält daher den Flächeninhalt:

$$f = \left[\frac{7}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\right)\right]^2 = 39,69$$



contineat duplum longitudinis octaue et insuper diametrum totum. Similiter octaua dupla $\overset{e}{\text{XV}}$. cum diametro prima quadrupla est $\overset{e}{\text{XV}}$. additis tribus diametris.[1]) Quod si cuiquam dubium uideatur scilicet probabit. Prima fistula bis in se continet octauam insuper unum diametrum que octauam bis in se habet. XV et insuper diametrum unum. Si autem octaua fistula una longitudo bis habet in se $\overset{am}{\text{XV}}$ et insuper unum diametrum necesse est ut due longitudines eiusdem VIII quatuor in se contineant XV et insuper duo diametra. Certum est (has) II longitudines $\overset{e}{\text{VIII}}$ in prima fistula contineri et insuper unum diametrum. Relinquitur ergo II prima habet in se $\overset{am}{\text{XV}}$ quater et insuper duo(?) diametra. Si autem velit organicum extendere mensuram ultra XV uel XVI. per tria alfabeta metiendum est Tercium ad instar duorum sicut mensurandum est secundum ad simulitudinem primi.

Quicumque cymbala facere uoluerit primum faciat. Etenim primum duas partes cere equales pondere ad s. et ad f. Ceram s. diuidat in VIII. partes et cere addat ad f. quantum est in $\overset{a}{\text{VIII}}$. parte et similiter diuidat ceram f. per VIII et tantum detur c. littere quantum est in summa f. et ejus $\overset{a}{\text{VIII}}$ parte. Sic in reliquis de hac cera que tam diligenter ponderata est. nihil detur adiuga et

---

1) Bezeichnen $l^{I}\, l^{II} \ldots l^{VII}$ u. $d$ resp. die Längen und Durchmesser der Pfeifen, so ist:

$$l' = l$$

$$\left(l' - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l''$$

$$\left(l'' - \frac{d}{4}\right)\frac{8}{9} = l'''$$

$$\left(l' - \frac{d}{3}\right)\frac{3}{4} = l^{IV} \text{ (diatesseron)}$$

$$\left(l' - \frac{d}{2}\right)\frac{2}{3} = l^{V}$$

$$\left(l^{V} - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l^{VI}$$

$$\left(l^{IV} - \frac{d}{2}\right)\frac{3}{4} = \text{sinemenon}$$

$$\left(l^{VI} - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l^{VII}$$

$$\left(l^{I} - d\right)\frac{1}{2} = l^{VIII}$$

Daraus folgt:

$$l' = 2\,l^{VIII} + d$$

$$l^{VIII} = 2\,l^{XV} + d$$

$$l' = 4\,l^{XV} + 3\,d$$

spitamina sed de alta cera fiant hec omnia. Stagnum cum cupro misceatur priusquam cymbalum aliquid fundatur. V.$^{ta}$ pars uel VI$^{ta}$ sit stagnum ut clare sonent. Si uero fusa minus recte sonent lima vel cos adhibeatur.*)

Assumatur numerus quilibet acciplicetur**) triplicatus diuidatur in duas partes et ambe equales extiterint qualem nolueris absque illa differentia iterum triplicabis. Quod si inequales fuerint IX inueniri possint consideretur quociens IX. fuerit totiens binarium est sumendum. Obseruandum autem est ut priusquam numerus triplicatur et diuisus est et iterum medietas fuerit triplicata et de nouenario fuerit interrogatum. hoc et adiungatur. si aliquid super unum uel duos uel plures nouenarios remansisset. quod si aliquid remansit VI fuerunt et de his sumendum unum. hisque in summam redactis pronunciandus est numerus qui fuerat medietate conceptus. Verbi gratia Si duo fuerint animo concepti cum triplicabuntur VI faciunt VI diuisi in III. et III. resoluuntur. Res uero triplicati IX tantum efficiunt nec remanebit aliquid. Ergo fuerint medietate concepti et immo in omni hoc supputacionis ratione IX. II. semper figurant.[1]) et VI. numerus. Secundumque est quod omnis impar numerus qui assumptus fuerit ordine quo productum est triplicatur atque diuisus in senarium terminatur. par uero numerus in IX quod unitas secundum supradictum modum triplicata atque diuisa senarium producat. Binarium uero triplicatus atque diuisus nouenariumque hi due numeri. idem unus et duo paritatis et imparitatis dant . . . esse principia. Assumatur numerus quilibet . . . aut triplicatus diuidatur in duas partes et tunc ille qui numerus medietate conceptus interrogetur si ipsius numeri sit equa diuisio. Quod si pares ambas partes responderis nil sumatur. Si autem impares esse dixeris unum sumatur in hac prima diuisione ad memoriam diuinantis atque non pars diuisionis quando ambe equales fiunt absque differentia triplicetur. Si uero ipsa res fuerit maior pars triplicanda est atque diuidenda sicut superius in duas partes iterumque interrogandum si equale aut inequale (sit) facta (diuisio) si equale quidem facta est nichil sumendum. si autem inequale II sumendi sunt in secundam diuisionem et in medietate diuisionis. si equale fuit absque ulla partium differentia quot nouenarii sunt interrogandum. Quod si inequale fuit in maiori parte querendum est quorum quot IX inueniuntur tot quantum nos diuinata sumere

*) Anm. Auf dem Text steht von anderer Hand bemerkt: primo tripla plus dimidiam triplicaque secunda pro quo nouena secans duo. tum de quibusque nouenis.(?) Si quid habes reliquum sex est pro quo dabis unum.

**) l. triplicetur.

1) Das Dreifache von 2 ist 6. Halbirt gibt 3. Verdreifacht: 9. Wäre die Zahl ungerade gewesen, so würde sich ein Bruch ergeben haben. Der Grund des hier dargestellten Verfahrens scheint übrigens ein rein empirischer zu sein.



debet. Verbi gratia. Si VI fuerit medietate concepti cum triplicati fuerint XVIII faciunt que in IX et IX diuiduntur et quod equalis est diuisionis nil sumendum IX iterumque (est) medietas huius diuisionis triplicati faciunt XXVII qui diuisi in XIII et XIIII resoluuntur et quod ista est secunda diuisio est inequale duo sumendi sunt tunc in maiori parte ipsius diuisionis hoc est in XIIII querendum est quociens IX possint inueniri. In XIIII IX semel sed de his IIII(?) a diuinante colligendis. qui duobus qui in secunda diuisione collecti sunt adiuncti VI faciunt. Senarium igitur in medietatem conceptum est: qua in re notandum est quod si ambe diuisiones paritati responderint nil ex eis sumendum. Si uero prima impar fuerit unum sumendum. Si secunda II unum uero quaternaris sigetonem continet quod in omni hac supputacione aio que in alia superiori contingere uidetur quod bis triplicatur et semel diuidatur quapropter in hac nouenarium quaternarium in illa uero binarium significat.

(dorica que sili designat nomine lingua)

# EINE STUDIE

UEBER DIE

# ENTDECKUNG DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

MIT BERUECKSICHTIGUNG EINES WERKES
DES MARINO GHETALDI PATRIZIER RAGUSAER.
AUS DEM JAHRE 1630.

VON

**EUGEN GELCICH**
DIREKTOR DER NAUTISCHEN SCHULE IN LUSSINPICCOLO.

# I.

Il Raguseo per diventar genio non ha bisogno di sortir dalla patria, gli basta imitar i propri.

*N. Tommaseo.*

Unter den Culturstädten der vergangenen Jahrhunderte ragte das am östlichen Gestade der Adria gelegene Ragusa, seiner literarischen und wissenschaftlichen Thätigkeit wegen, in besonderem Glanze hervor. Der mächtige ausgedehnte Handel der ehemaligen Republik und der daraus hervorgehende ununterbrochene Contakt mit den Culturnationen des Ostens und des Westens, klärte die Geister, festigte den Willen und bereicherte die Bewohner der Republik mit den Schätzen der Wissenschaft. Wir sehen zu Anfang des XII. Jahrhundertes Jünglinge aus Ragusa die Hauptschulen des byzantinischen Reiches besuchen; im Laufe des XIII. Jahrhundertes errichteten die Benediktiner auf Lacroma eine Unterrichtsanstalt und im XIV. Jahrh. finden wir in Ragusa mehrere Lehrkanzeln durch Gelehrte aus Griechenland und Constantinopel besetzt. Aus diesen Schulen gingen Männer hervor, deren Ruf wohl den Stolz jener Stadt bilden und welche in der Geschichte der Wissenschaften und der Literatur bekannt sind. Um nur einige der berühmtesten Namen anzuführen, beginnen wir mit dem Jesuiten Bošković. Seine Leistungen auf dem Gebiete der Astronomie, seine Gradmessung, seine Theorie der zwei Kräfte, sein herrliches Werk „De philosophiae naturalis theoria etc." benöthigen keines weiteren Commentars. Die südslavische Literatur hat in Ragusa erst wahres Leben gefunden und die Osmanide des Gondola gilt heutzutage noch als ein Meisterwerk illirischer Dichtung. Aber auch die classischen Sprachen fanden in den Stay's, Kunich, Zamagna, Gagliuffi und vielen anderen eifrige Pfleger. Die lateinischen Werke des Stay über die Philosophie des Descartes und über jene Newtons wurden derart beifällig aufgenommen, dass der bekannte Ennius Quirinus Visconti vom Stay sagte, er sei ein Plato in den Kleidern Lucretius'. Vom XIV. Jahrh. an sehen wir stets einige Lehrkanzeln der berühmtesten Universitäten durch Ragusaner besetzt.[1]) So haben wir als Rektoren zu Padua: 1397 Ragnina,

1) Skurla. Ragusa. Cenni storici.

1492 Rosa, 1579 Zlatarich, 1609 Brasso. — **Als Professoren** der Theologie: Giovanni Raguseo 1415, Serafino Bona 1408, Tralasso 1480, Giorgi 1492, Basegli 1511 alle zu Padua; dann zu Ofen in Ungarn Bona und Bassegli; zu Paris Stojkovich 1421, Bondemalich im XV. Jahrh. und Gozze 1564; zu Rom Mathias Bona im XVII. Jahrh. und Zuzzeri Bernhard 1762, zu Loviano der obgenannte Gozze und zu Wittemberg Mathias Francovich, der sogenannte Flaccus Illyricus 1544. — Als Professoren der Literatur und Philosophie: Giorgio Raguseo 1622 und Cerva 1631 beide zu Padua, dann Zuzzeri 1746 zu Sienna, Kunich 1794 zu Rom und Bologna, Remedelli im XVIII. Jahrh. zu Bologna, Stay 1801 zu Rom, Zamagna 1820 zu Mailand. — Als Professoren der Mathematik: zu Rom Boscovich Bartholomäus 1770 und dessen Bruder Rugerus 1787. Letzterer docirte auch in Paris und in Mailand. — Als Professoren der Medicin, zu Bologna: Galeotti 1394—1422, zu Padua Belleo 1601, zu Rom Baglioi 1705.

Es erblickte in Ragusa das Licht der Welt auch einer der berühmtesten Mathematiker aus dem Ende des XVI. und dem Beginn des XVII. Jahrhundertes, der Patrizier Marino Ghetaldi nämlich, mit welchem wir uns in diesen Blättern zu beschäftigen haben.

Im Jahre 1566 geboren, erhielt Ghetaldi in seiner Vaterstadt genügenden Unterricht in den klassischen Sprachen, sowie in der Mathematik und Philosophie. Seine späteren Werke, im perfekten Latein geschrieben, zeigen eine gewisse Eleganz des Styles, verbunden mit Correktheit und Sprachgewandtheit. Die Philosophie seiner Zeit konnte dem noch sehr jungen Marino durchaus nicht gefallen. Er erklärte die Mathematik als die einzige Wissenschaft, welche zur Erkenntniss der Wahrheit führen könne,[1]) daher er sich auch mit derselben vorzugsweise beschäftigte. Noch im frühesten Alter begab er sich nach Rom, um seine Studien zu vollenden und erwarb sich dort zuerst die Achtung, dann die Freundschaft einiger sehr berühmten Mathematiker, so des eigenen Lehrers Michael Coignet, dann des Federico Samniato und des Christoph Clavius. Der Kardinal Serafino Olivario konnte sich seiner engen Beziehungen zu dem jungen Ghetaldi nie genug rühmen. Ueberzeugt, dass, um die Wissenschaft zu fördern, es vor allem nöthig wäre, die geometrischen Werke der Alten zu ergänzen und herzustellen[2]), liess er sich durch seinen Lehrer Coignet dazu bewegen, sein „Archimedes promotus—seu de variis corporum generibus, gravitate et magnitudine comparatis. Romae apud Aloysium Zanettum 1603" zu veröffentlichen. Fast gleichzeitig erschienen auch seine „Nonnullae propositiones de

1) Galleria degli Illustri Ragusei. Ragusa. Martecchini 1841.

2) Appendini. Notizie Sulla Storia e letteratura dei Ragusei. II. Seite 44 ff.

Parabola nunc primum inventae, et in lucem editae Romae apud Zanettum 1603.“ Beide Werke waren für die damaligen Zeiten von eminenter Bedeutung für die Wissenschaft, wie es auch Vossius in seiner Schrift: „Matematicarum scientiarum natura“ gesteht. Damals war in den mathematischen Kreisen der Franzose François Viète berühmt, welchen Ghetaldi in Paris aufsuchte, um die Algebra speciosa, die sich erst Bahn zu brechen begann, zu erlernen. Zuerst war Ghetaldi Schüler des Vietas, dann wurde er sein inniger Freund und Verehrer, wovon man sich beim Durchblick des Werkes „De resolut. et comp. mathem.“ überzeugt. In der Vorrede zu letzterem Werke sagt Ghetaldi von seinem Meister, vir certe de rebus Mathematicis optime meritus: cui non solum nostra, sed etiam superior aetas haud scio an ullum huius scientiae laude parem, nedum superiorem invenerit etc.

Gelegentlich der Abwehr einiger Angriffe des Clemens Cyriacus nimmt Ghetaldi im zweiten Buch desselben Werkes auch seinen Freund Viète in Schutz, gegen welchen sich Cyriacus bezüglich des ersten Anhanges zum Apollonius Gallus in ziemlich ausgelassene Art ausgedrückt hatte.[1])

Durch das letztere Werk (Ap. Gallus) hatte sich Viète besondere Verdienste um den Fortschritt der Mathematik erworben, da die Schriften über die Berührung des Gelehrten aus Pamphylien, Apollonius von Perga, gänzlich in Vergessenheit gerathen waren. Aber nicht minder Bedeutung erhielt eine ähnliche Arbeit unseres Ghetaldi, deren zweiter Theil, unserer Ansicht nach, den Glanz seiner Talente am besten erweisen kann und welche gerade von den Historikern nicht genug gewürdigt wurde. Zunächst veröffentlichte er 1607 in Venedig sein „Apollonius redivivus, seu restituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria. Venetiis apud Iunctam 1607.“ Und weil Viète sechs Berührungsaufgaben des Appollonius, welche durch die iniuria temporum, wie Ghetaldi sagt, förmlich verloren gegangen waren, ausgelassen hatte, so gab Ghetaldi in seinem Supplementum Apollonii Galli, seu exsuscitata Apollonii Pergaei factionum Geometricarum pars reliqua. Venetiis apud Vincentium Fioranum 1607“ ihre Lösung. „Non igitur — sagt der Verfasser in der Vorrede dazu — exsuscitavit Apollonius Gallus universam Apollonii Paergei Factionum Geometriam; omisit enim sex problemata ad illam geometriam pertinentia: sed ea supplebimus, et sic Apollonius Gallus non sine Illyrico Apollonium Paergeum qui extinctus iniuria temporum, vel a barbaris oppressus iacebat, excitabit.“

Vielleicht in Nachahmung der griechischen Philosophen des Alterthums, die ihm jedenfalls bekannt waren, machte er sich nach Vollendung seiner Studien in Paris auf Reisen, um die Gelehrten von ganz Europa kennen

*) Ghetaldi. De resolut. et comp. math. Seite 48 und ff.





zu lernen. Es begleitete ihn auf dieser sechsjährigen wissenschaftlichen Pilgerfahrt sein Busenfreund Marino Gozze, ein anderer Patrizier aus Ragusa, welcher wieder die Sprachen und den Charakter der verschiedenen Nationen Europas erforschte. Diesem Busenfreund widmete Ghetaldi sein nächstes Werk „Variorum Problematum collectio. Venetiis apud Vincentium Fioranum 1607."

Bemerkenswerth sind die folgenden Worte der Widmung: „Enim vero ingenii mei quasi ager haud scio, an potiorem quam te colonum agnoscet, qui dum me patria, corporis verius alumna, quam animi in alienas terras ingeniorum altrices una tecum extraxisti, quasi coluisti agrum. Quam autem gentem ac doctorum multiplicitatem sex annis una peregrinati non adivimus? Superiorem Germaniam omnem percurrimus, inferiorem totam Belgiumque lustravimus; duos annos consedimus in Brittania; Galliam deinde peragravimus, et Italiam universam; quas inter gentes quot ego Doctores nactus sum (nactus autem sum plures) tot agro tu quasi praefecisti operarios."

Auf seinen Wanderungen durch Europa ward Ghetaldi überall als grosser Mathematiker mit Enthusiasmus empfangen. An mehreren Hochschulen, darunter auch an der damals bedeutendsten von ganz Europa[1]), an jener von Löwen in Brabant nämlich, wollte man ihn durchaus als Lehrer haben.[2]) Aber seine übergrosse Bescheidenheit, welche an seinem Spruch „se malle scire, quam nesci, discere, quam docere"[3]) zu erkennen war, veranlasste ihn alle derlei Anträge zurückzuweisen. Diese Bescheidenheit hat auch Vossius bei der Gelegenheit hervorgehoben, wo er im früher erwähnten Werk den Apollonius redivivus und das Supplementum Apollonii Galli bespricht und wo er von ihm sagt, „se praeclara illa quae tradit non sibi sed Apollonio potius adscribit."

Nach Ragusa zurückgekehrt, brachte er den grössten Theil des Jahres in seinem väterlichen Erbgute, der jetzigen Villa Sarraca zu[4]), um teleskopische Beobachtungen der Planeten und um Versuche mit dem Brennspiegel anzustellen. Wenn man von Ragusa aus südwärts gegen Ragusavecchia längst der Küste fährt, so sieht man am Rand der Küste ungefähr $^1/_2$ Meile von Porto Casson, gegenüber Lacroma eine grössere, am Fusse der jetzigen

1) Die Universität Löwen in der belgischen Provinz Brabant, wurde 1426 gestiftet und war im XVI. Jahrhundert die bedeutendste von ganz Europa. Sie war von 6000 Studenten besucht.

2) Ljubić. Dizionario biografico degli illustri Dalmati. Vienna. Ad vocem Gh.—Appendicis Notizie sulla storia e letteratura dei Ragusei. II. 44 ff. — Nave Ragusea. Italia 1819. Seite 6.

3) Nave Ragusea. 6.

4) Ex Anmerkungen von Otto Fr. v. Reinsberg-Düringsfeld. Aus Dalmatien von Ida v. Düringsfeld.

Villa Saracca gelegene Höhle, von welcher der heutige Bauer noch und der rohe Fischer nur mit Abscheu und Grauen erzählen kann. Sie wird die „Spilla Betina“ genannt, was soviel heissen will als Höhle des Zauberers. Da Ghetaldi besondere Studien über den Brennspiegel pflegte, so wählte er jene Höhle um die bezüglichen Experimente auszuführen. Auf eine entsprechende Distanz von der Grotte stellte er einige kleine Fahrzeuge in See, die er mit dem Brennspiegel (ähnlich wie Archimedes die Flotte des Marcellus) in Brand steckte. Von nun an mied jeder Fischer, jedes Fahrzeug die Nähe der verrufenen Höhle, denn es verpflanzte sich unter das Volk die Sage, der Zauberer besässe Mittel, um die Schiffe in entsprechende Nähe zu locken, um sie dann den Flammen preiszugeben. Die optischen Werke des Ghetaldi, „De speculo Ustorio“ — „De radiis visus, et lucis in vitris prospectivis“ — „De Iride“ und „De inchoata Telescopii demonstratione“ scheinen leider ganz verloren gegangen zu sein.[1])

Im Jahre 1627 starb Ghetaldi, nachdem er die höchsten Würden der Republik bekleidet hatte. Sein frühes Dahinscheiden verhinderte ihn, gerade den wichtigsten Theil seiner Studien fortzusetzen. Er konnte die Drucklegung jenes Werkes, welches den Gegenstand unserer Abhandlung bilden soll, nicht mehr erleben, und der aufmerksame Leser der Resolut. et Comp. Mathematica nimmt im Text Lücken wahr, welche darauf hinweisen, dass das Manuskript beim Tode seines Autors noch nicht ganz druckfähig gewesen ist. Ghetaldi war erst ungefähr 60 Jahre alt, als ihn der Tod hinwegraffte. In den letzten Tagen seines Daseins, nachdem er die Geometrie der Alten für sich und für seine Zeitgenossen zu neuem Leben gebracht hatte, legte er die Hand an jenes grosse Werk, welches nicht nur der Mathematik, sondern auch den gesammten Wissenschaften neue Pforten eröffnen sollte. Es handelt sich um die erste Anwendung der Algebra auf die Geometrie, um die Vereinigung und Verschmelzung derselben zu einem Gegenstande und somit um die Grundsteinlegung zu den späteren grossen Entdeckungen der Analysis. Das bezügliche Werk, drei Jahre nach dem Tode seines Verfassers und sechs Jahre vor der Drucklegung der Geometrie des Cartesius herausgegeben, trägt die Aufschrift: „Marini Ghetaldi, Patritii Ragusini Mathematici praestantissimi de Resolutione et Compositione Mathematica. Libri quinque. Opus Posthŭmum. Romae. Ex Typographia Reuerendae Camerae Apostolicae. MDCXXX. Da diese Schrift sehr ver-

1) In Ragusa gibt es noch sehr reiche Bibliotheken, deren Inhalt aber theils den Eigenthümern unbekannt ist und theils in verwahrloster Verpackung langsam vermodert. Der Verfasser hat Gelegenheit gehabt, sich hiervon mit eigenen Augen zu überzeugen. Die verlornen Werke des Ghetaldi dürften vielleicht doch früher oder später ausfindig gemacht werden.



schiedenartig beurtheilt wurde, so wollen wir im folgenden den Versuch machen, ihren wahren Werth zu bestimmen, beziehungsweise festzustellen, welche Rolle Ghetaldi durch dieses Werk in der Geschichte der analytischen Geometrie gespielt hat.

## II.

Bevor wir unsere Untersuchung beginnen, wollen wir in möglichst gedrängter Art den Inhalt des zu besprechenden Werkes hier wiedergeben. Die Vorrede zum ersten Buch wird ihres Interesses wegen gänzlich nach dem Wortlaut des Textes reproducirt. Jedes Buch (Abschnitt) enthält zuerst eine kurze Einleitung, dann folgen die Propositiones, diesen wieder die Lehrsätze und schliesslich die Construktionen. Wo es nöthig erscheint, sind auch Lehrsätze und Bedingungen (determinationes) gegeben, unter welchen die Aufgaben möglich sind. Fälle, welche durch + und — unterschieden sind, werden einzeln behandelt. Die Bezeichnungsart ist jene des Viète. Die Zeichen $\pm$ sind überall angewendet. Die Multiplikation wird durch das Wort *in* ausgedrückt, die Division zumeist in Bruchform angegeben. Die Proportionen sind noch durch Worte geschrieben oder die Grössen einfach nebeneinander gestellt. Die Coëffizienten sind durch kleine Zahlen hinter den Buchstaben, das Quadrat durch den Buchstaben $Q$ angegeben. Also z. B. die Proportion

$$A^2 : 2AB = \frac{x}{y} : 2m + n$$

wird wie folgt geschrieben:

$$\text{ut } AQ \text{ ad } A_2 \text{ in } B \text{ ita } \frac{x}{y} \text{ ad } m_2 + n,$$

oder mitunter auch einfacher:

$$AQ \quad A_2 \text{ in } B \quad \frac{x}{y} \quad m_2 + n.$$

Die Aufstellung der Aufgaben, die algebraischen und geometrischen Lösungen sind gewöhnlich so klar und deutlich gegeben, dass selbst der Anfänger, wenn er sich nur einmal die Bezeichnungsweise angewöhnt hat, das Buch gebrauchen könnte. Die uns vorliegende Ausgabe ist jedoch nicht ganz frei von Druckfehlern. Hin und wieder scheinen im Manuskript Lücken geblieben zu sein.

---

## Einleitung zum I. Buch.

### Marini Ghetaldi. De Resolutione et Compositione Mathematica. Liber Primus.

Omnes Mathematicae probationes vel a concessis ad quaesita, vel a quaesitis ad concessa progrediuntur. Quae a concessis progrediuntur ad quaesita, compositiones appellantur. Compositio enim est assumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem, et compraehensionem quae vero a quaesitis progrediuntur ad concessa duplices sunt; vel enim concessa ponunt, vel destruunt; quae ponunt concessa, resolutiones vocantur: Est enim Resolutio, assumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Nam in resolutione id quod quaeritur, ut iam existens, et ut verum ponentes, per ea, quae deinceps consequuntur, procedimus ad aliquod concessum: quo opere quaesitam conclusionem, in proprias causas, per quas demonstratur reducimus: atque his resolutionibus compositiones opponuntur. Fieri enim potest, ut a concesso illo, per eadem resolutionis vestigia ad quaesitum revertamur. Quae vero destruunt concessa, deductiones ad impossibile nuncupamus. Deductio enim ad impossibile est assumptio eius quod quaesito contradicit tanquam concessi per consequentia, ad id, quod vero concesso oponitur. nam in deductione ad impossibile sumimus id quod quaesito contradicit, idq; supponentes progredimur, donec in aliquod absurdum incidamus, per quod suppositione destructa confirmetur id, quod a principio quaerebatur. Ex quibus patet Resolutionem a Deductione ad impossibile ratiocinatione tantum differre, nam utraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit: sed Resolutio desinens in verum, concludit verum esse et quod supponitur: Deductio vero ad impossibile, desinens in falsum, falsum esse et quod supponitur arguit, et consequenter quaesitum verum esse.

Duplex autem est resolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in sola veritatis inuestigatione consistit. alterum vero ad Problemata, cuius scopus est rationem constructionis, atque demonstrationis inuestigare: proposita enim Problemata construere docet, viamq;

ad constructionis demonstrationem ostendit. Sed omnia fere Theoremata, et Problemata, quae sub Algebram cadunt facillime resoluuntur, ac per resolutionis vestigia componuntur: non quidem vulgaris Algebrae beneficio; quae resolutionis vestigia omnino confundit; sed illius, cuius Auctor est Franciscus Vieta, vir certe de rebus mathematicis optime meritus: cui non solum nostra, sed etiã superior aetas haud scio an ullum huius scientiae laude parem, nedum superiorem inuenerit. etenim Resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios; sua vestigia clara relinquit, per quae non est difficilis ad compositionem reditus: compositio enim in Problematibus, siue per Algebram, siue Antiquorũ methodo resolutis, a fine resolutionis, ad principium per resolutionis vestigia regreditur: in Theorematibus vero quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine quo inuenta est Theorematis veritas, demonstratio procedit. At Theoremata vel Problemata, quae sub Algebram non cadunt qualia sunt ea, quae per comparationem angulorum demonstrantur, resoluuntur, et componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonii, et Pappi, aliorũmq; veterum ac recentium. Et quamũis ea methodo omnia Theoremata et Problemata resolui, et componi possint; tamen ea, quae sub Algebram cadunt, pletumque facilius ac expeditius per Algebram resoluuntur, ac deinde per resolutionis vestigia componuntur. Haec omnia exemplis, atque etiam praeceptis ubi locus exiget perspicua fient. Primum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq; demonstrationem pertinentia; deinde ad resolutionem, et compositionem Problematum; primis enim quatuor Theorematibus in Problematum resolutionibus et compositionibus saepe utemur.

Im Folgenden geben wir den Gang der Propositio Prima und des Theorema I an und werden die übrigen zehn Lehrsätze nur kurz anführen.

### Propositio Prima.

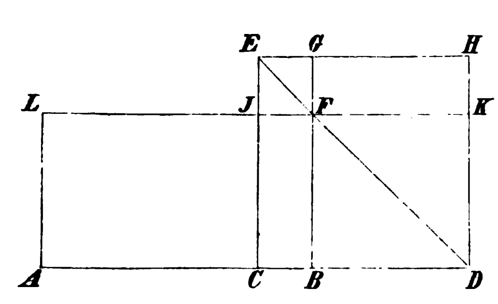
Eine gerade Linie wird in zwei beliebige Theile getheilt und über die Summe und die Differenz dieser zwei Theile ein Rechteck construirt. Wie lässt sich die Fläche dieses Rechtecks durch andere über die Theile dieser Linie construirte Flächen ausdrücken?

Es sei die gerade Linie in zwei Theile $A$ und $B$ getheilt, während $A > B$ ist. So hat man algebraisch $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Die Fläche $A^2 - B^2$ ist also dem Rechteck gleich, welches mit $(A + B)$ und $(A - B)$ als Seiten construirt wird. Daraus wird gebildet der

## Lehrsatz I.

Theilt man eine gerade Linie in zwei beliebige Theile, so ist das Rechteck, welches aus der Summe und der Differenz der beiden Abschnitte construirt wird, gleich der Differenz der über beide Theile construirten Quadrate.

Folgt nun der Beweis, welcher wie folgt geführt ist. Theilt man die gegebene Grade $AB$ in zwei beliebige Theile $AC$, $CB$ und verlängert man die $AB$ bis $D$, so dass $CD = AC$ sei. Ich behaupte, dass das Rechteck aus $AB$ und $BD$ gleich der Differenz der Quadrate über $AC$ und $CB$ ist. Beschreibt man über $CD$ das Quadrat $CH$ und führt man die Diagonale $DE$, so schneidet diese die parallel mit $CE$ gezogene $BG$ im Punkt $F$. Durch $F$ ziehe man die $KFL \parallel AB$. Ebenso construire man $AL \parallel DK$. Das Rechteck $AJ$ ist gleich dem Rechteck $BH$, denn es ist $AC = DH$ und $CJ = BD$. Addirt man zu den Rechtecken $AJ$, $BH$ das gemeinsame Rechteck $BJ$, so ergibt sich, dass das Rechteck $AF$ gleich der Summe der Rechtecke $CF$ und $BH$ ist, daher $AF$ gleich dem Gnomon $JFGHDCJ$. Aber das Gnomon gibt nichts anderes als die Differenz der Quadrate $CH$ und $JG$. Das Rechteck $AF$ ist also nichts anderes als die Differenz der Quadrate $CH$ und $JG$, was zu beweisen war.



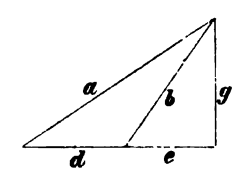

Dieser Lehrsatz kann auch folgendermassen aufgestellt werden:

$$(a + b)\,(a - b) + b^2 = a^2,$$

welche Beziehung im fünften und sechsten Lehrsatz des II. Buches der Euklidischen Elemente enthalten ist.

* * *

Die übrigen zehn Lehrsätze, welche jedesmal zuerst algebraisch ermittelt, dann geometrisch nachgewiesen werden, sind in der algebraischen Form folgende:



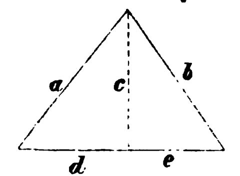

$(a - b)\,(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab.$ Propositio II.

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$ „ III.

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$ „ IV.

Sind $a$, $b$, $d$ die Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks, so hat man, wenn $g \perp d$ ist:

$a^2 = b^2 + d^2 + 2ed.$ Propositio V.




Sind $a$, $b$, $d$ die Seiten, $c$ die Höhe eines spitzwinkligen Dreiecks, so hat man:

$$a^2 + 2de = d^2 + b^2 \qquad \text{Propositio VI.}$$

---

Eine Gerade $2b$ ist in zwei Theile $d$ und $(2b - d)$ getheilt, und zwar so, dass $d$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen $2b$ und $(2b - d)$ ist. Man hat: $2b : d = d : 2b - d$, woraus $4b^2 - 2bd = d^2$. Es ist aber: $(d + b)^2 = d^2 + b^2 + 2bd$ oder: $(d + b)^2 = 4b^2 - 2bd + b^2 + 2bd = 5b^2$.

Hat man daher: $2b : d = d : 2b - d$, so ist: $(d + b)^2 = 5b^2$, } Propositio VII.

---

Man hat aus obigem:

$$\left.\begin{aligned}(d + b)^2 &= 5b^2\\ b^2 &= b^2\end{aligned}\right\}\; d^2 + 2bd = 4b^2$$
$$d^2 = 4b^2 - 2bd$$
$$d^2 = 2b\,(2b - d).$$

Folgt daher: $2b : d = d : (2b - d)$.

Ist eine gerade Linie in zwei Theile $b$, $d$ getheilt und ist das Quadrat des einen Theiles $b$ der fünfte Theil des Quadrates der ganzen Geraden, so ist der andere Abschnitt $d$ die mittlere geom. Proportionale zwischen $2b$ und $(2b - d)$ . . . Propositio VIII.

---

Eine Gerade sei nach stetiger Proportion getheilt und zwar so, dass der grössere Abschnitt $2b$, der kleinere $d$ sei, dann hat man:

$$(d + b)^2 = 5b^2 \text{ . . . Propositio IX.}$$

---

Eine Gerade $b$ sei nach stetiger Proportion getheilt; der kleinere Abschnitt sei $d$; man hat:

$$b^2 + d^2 = 3bd \text{ . . . . Propositio X.}$$

---

Eine Gerade $b$ ist nach stetiger Prop. getheilt; der grössere Abschnitt sei $a$. Man hat: $b : a = a : a - b$ oder $a : b = b - a : a$ und $a + b : b = b : a$. Propos. XI.

---

Es folgen nun die Construktionsaufgaben, welche algebraisch gelöst und sodann geometrisch construirt werden. Die algebraische Lösung nennt Ghetaldi „Resolutio", die geometrische Construktion „Compositio". Auch hier lässt die Klarheit der Darstellung und die Einfachheit der Entwickelung nichts zu wünschen übrig und es scheint uns, als ob wir ein für Mittelschulen bearbeitetes Lehrbuch vor Augen hätten. In Kurzem geben wir die gelösten Aufgaben an, ohne jedoch die Folgesätze anzuführen.

Problema I. Eine gerade Linie derart in zwei Theile zu theilen, dass $a - b = c$ sei.

II. Eine gegebene Gerade derart verlängern, dass die verlängerte Gerade zur Verlängerung ein gegebenes Verhältniss bilde. (Der gegeb. Theil muss $>$ als die Verlängerung sein)

III. Eine gegebene Gerade $b$ um einen Betrag $x$ verlängern, so dass das Verhältniss $b + x : b - x$ einem gegebenen Verhältniss $R : S$ gleich sei. (Der gegebene Theil muss kleiner sein als die Verlängerung.)

IV. Eine gerade Linie $b$ in zwei Theile ($x$ und $b - x$) derart zu theilen, dass $x^2 - (b - x)^2$ gleich einem gegebenen Quadrat sei.

V. Eine gegebene Gerade derart zu theilen ($x$ und $b - x$), dass das Verhältniss $\frac{x(b - x)}{x^2}$ einem gegebenen Verhältniss gleiche.

VI. Eine gegebene Gerade derart zu theilen ($x$ und $b - x$, $x > b - x$), dass $b(b - x) = 2a^2 - ab$ sei.

VII. Eine gegebene Gerade derart zu theilen ($x$ und $b - x$), dass $x(b - x) = [x - (b - x)]^2$ sei.

---

## Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione Mathematica. Liber Secundus.

Die Einleitung, welche wir nicht speciell anführen zu müssen glauben, zeigt, wie ein Bruch durch eine Proportion ausgedrückt werden kann. Einige Beispiele, welche angeführt werden, sind folgende: Der Bruch $\frac{b^2}{d} = a$, kann wie folgt zerlegt werden: $d : b = b : a$. Der Bruch $\frac{bd + gd}{a} = f$, in $a : (b + g) = d : f$ etc.

Die Propositionen fehlen hier und es werden sogleich die Lehrsätze behandelt, welche lauten:

Theorem I. Zwei gegebene Geraden werden derart getheilt, dass das Rechteck über die Abschnitte der ersten Geraden dem Rechteck über die Abschnitte der zweiten Geraden gleich sei.

Es soll $(a - c)\, c = (b - x)\, x$ sein

Folgt algebraisch:

$$x^2 - bx = c^2 - ac$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2 - ac},$$

und weil $a = b$,

$$x = \frac{b}{2} \pm \left(\frac{b}{2} - c\right),\ x_1 = c,\ x_2 = b - c.$$

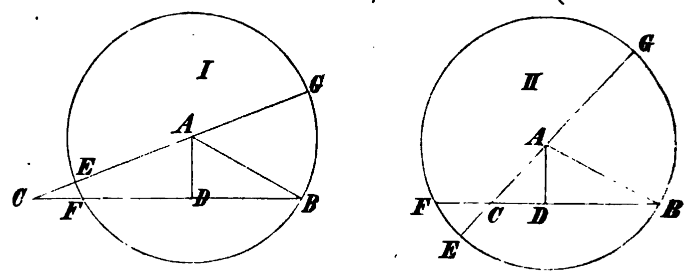
Theorem II. Es sind die Geraden $a$ und $b$ gegeben und zwar $a = b$ und es soll: $c^2 + (a - c)^2 = x^2 + (b - x)^2$ sein, so wird auch $c = x$.

Theorem III. Macht man $AC = DF$ und ist $AC \,.\, AB = DE \,.\, DF$, so muss $AB = DE$ und $CB = FE$ sein.

Theorem IV. Macht man $AC = DF$ und es sei: $CB : FE = DE : AB$, so muss auch $CB = FE$ und $AB = DE$ sein.

Theorem V. Sind die Rechtecke $AC.\ CB$ und $DF.\ FE$ einander gleich und ist $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FE}^2$, so muss auch $AC = CB$ und $DF = FE$ sein.

Theorem VI. Ist $ABC$ ein Dreieck, $AD$ die Höhe (Fall I und Fall II)




und beschreibt man mit der Seite $AB$ einen Kreis, welcher die Seite $AC$ in $E$, die Basis in $F$ schneidet, das Rechteck $ECG$ wird dem Rechteck $FCB$ gleich sein.

Theorem VII. Ist eigentlich nur ein Folgesatz des Theorem V, indem bewiesen wird, dass $EC : CF = CB : CG$.

Nun folgen die Construktionsaufgaben.

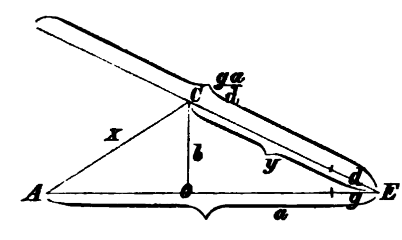
Problem I. Ein Rechteck zu construiren, welches einem gegebenen Quadrat gleich ist und dessen Seiten sich so verhalten wie $R : S$.

Die Quadratseite sei $B$. Ist $A$ eine Seite des Rechtecks, so muss sein: $A : x = R : S$, daher die zweite Seite $x = \frac{AS}{R}$. Ferner laut Problem: $B^2 = Ax = \frac{A^2 S}{R}$, daher:

$$R : S = A^2 : B^2.$$

Problem II. Eine gegebene Gerade derart zu theilen, dass die Summe der Quadrate der Abschnitte sich zur Differenz dieser Quadrate wie $R:S$ verhalte.

Problem III. Es ist gegeben die Höhe eines Dreiecks, die Differenz der Basisabschnitte und die Differenz jener Seiten, welche den Scheitel der Höhe bilden. Es ist das Dreieck zu construiren.




Algebraische Auflösung nach Ghetaldi. Gegeben die Höhe $b$; die Differenz der Seiten $CE$ und $AC$ sei $d$ und die Differenz der Basissegmente sei $g$. Man nimmt die Aufgabe als gelöst an und es sei $a$ die Basis des gesuchten Dreiecks. Man hat zuerst: $d:g = a:x$, woraus $x = \frac{ag}{d}$ und daher: $d:g = a:\frac{ag}{d}$. Nun ist aber zufolge Buch I Theorem IV:

$\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = 2x^2 + 2y^2$ und $2x^2 + 2y^2 = 2AO^2 + 2OE^2 + 4b^2$ daher: $\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = 2AO^2 + 2OE^2 + 4b^2$ aber $2AO^2 + 2OE^2 = a^2 + g^2$ daher $\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = a^2 + g^2 + 4b^2$ und: $\frac{g^2a^2}{d^2} - a^2 = 4b^2 + g^2 - d^2$, oder endlich $\frac{g^2a^2 - a^2d^2}{d^2} = 4b^2 + g^2 - d^2$, welche Gleichung in eine Proportion verwandelt gibt: $g^2 - d^2 : 4b^2 + g^2 - d^2 = d^2 : a^2$

und:

$$\sqrt{g^2 - d^2} : \sqrt{4b^2 + g^2 - d^2} = d : a.$$

Diese Aufgabe hat Ghetaldi auch im Apollonius behandelt, wofür ihm Cyriacus den Vorwurf machte, bei derselben keine genaue Beweisführung geliefert zu haben, indem die Aufgabe unter Umständen auch unmöglich werden könnte. Diesen selben Vorwurf machte übrigens Cyriacus auch dem Franz Viète, ohne, wie es scheint, das Problem genauer beachtet zu haben, da er sich sonst überzeugt hätte, dass die unmöglichen Fälle einleuchtend sind und keiner näheren Erklärung bedürfen. Ghetaldi, welcher die Veröffentlichung seines Werkes nicht mehr erlebt hat, benutzte diese Stelle, um sich und Viète gegen die Angriffe des Cyriacus zu wahren. Auch benutzte Ghetaldi dieselbe Gelegenheit, um Viètes Problem auseinanderzusetzen.

Problem IV. Gegeben die Höhe eines Dreiecks, die Summe der zwei Seiten wovon keine die Basis ist und die Differenz der Basissegmente, es soll das Dreieck construirt werden.

Problem V. Gegeben die Differenz der Basissegmente eines rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Katheten, das Dreieck zu bestimmen.

Problem VI. Gegeben die Differenz der Basissegmente eines rechtwinkligen Dreiecks und die Summe der Katheten, das Dreieck zu bestimmen.

Problem VII. Gegeben die Differenz der Seiten eines Dreiecks und die Differenz der Basissegmente, gegeben ferner die Differenz der grösseren Seite, welche in der Differenz einbegriffen ist, mit der dritten Seite das Dreieck zu bestimmen.

Sind $a$, $b$, $c$ die Seiten, $m$, $n$ die Basissegmente und ist $a > b$, so ist gegeben: $a - b$, $m - n$ und $a - c$. Hier werden vier mögliche Fälle behandelt.

Problem VIII. Gegeben die Basis eines rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Katheten; es ist das Dreieck zu bestimmen.

Problem IX. Problem VIII aber anstatt der Differenz die Summe der Katheten.

---

## Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione mathematica. Liber Tertius.

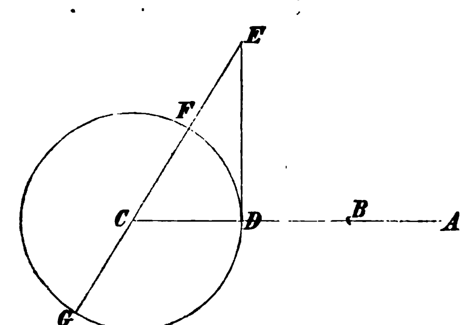
Im III. und IV. Buch kommen unreine Gleichungen zur Behandlung. Die geometrische Construktion der Gleichungen zweiten Grades wird hier zuerst durch einige Lehrsätze (Canones) erläutert. Wir geben die Einleitung dieses Capitels wortgetreu wieder.

De ijs, que ad Resolutionem, et Compositionem pertinent, existentibus simplicibus laterum, aut quadratorum aequationibus; superioribus libris satis me dixisse censeo. Venio nunc ad explicanda ea, quae in Resolutionibus, et Compositionibus occurrunt, quando in aequationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiusmodi aequationes explicentur.

Multi sane auctores de explicandis quadratorum affectorum aequationibus scripserunt, ijque omnes praeter Diofantum, ac Petrum Nonium, una eademque Methodo, aut parum distanti utuntur, quamuis diversas afferent demonstrationes. Diofantus quidem non curat quadratum aequationis a comite, hoc est a data magnitudine in quam ductum est liberare, ut ex se subsistat, quemadmodum notat Bachetus, sed praecipit duci homogeneum comparationis in eundem comite quadrati, et reliqua perfici, ut suo loco dicetur. quo fit ut magnitudines ad plano plana ascendant, ac proinde longiori operatione, et ad geometricas compositiones minime apta aequatio

explicetur. Petrus autem Nonius sumit totam coefficientem longitudinem, non autem dimidiam prout communis Methodus docet; sumit quoque quadruplum homogeneum comparationis, et sic explicata aequatione exhibet duplum latus quaesitum, ex quibus Compositio fit dificilior. hanc Methodum Nonius excogitavit, ut fractiones numerorum vitaret, quae quoniam in Geometricis locum non habent, nihil est quod nos cogat ea Methodo uti. Communi igitur Methodo, quae est simplicissima utar, eamque Geometrica ratione demonstrabo, alijs tamen medijs, atque alij scriptores; per haec enim media commodior a Resolutione ad Compositionem fit regressus, ipsaque Compositio clarus, ac facilius demonstratur, ut exemplis manifestum fiet.

*Canon primus.* Ist $a^2 + ab = z^2$, so hat man nach den Regeln der Algebra: $a = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{z^2 + \frac{1}{4}b^2}$. Folgt nun die geometrische Darstellung.




Soll $AB^2 + AB.CB = DE^2$ sein, so theile man die $BC$ in zwei Theile und errichte die $DE \perp CB$. Von $C$ aus beschreibe man mit dem Halbmesser $CD$ einen Kreis und verbinde $C$ mit $E$. Man hat dann $\overline{DE}^2 = EF.EG = EF(EF + FG) = EF^2 + EF.FG$.

Daher: Forderung
$$AB^2 + AB.CB = DE^2.$$
Nachgewiesen ... $EF^2 + EF.FG = DE^2$.

Weil aber $CB = 2CD = 2CF = FG$ folgt $EF^2 + EF.CB = DE^2$. Schliesslich also $EF$ die Gesuchte $AB$.

*Canon secundus.* $a^2 - ab = z^2 \ldots\ldots a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + z^2}$.

*Canon tertius.* $ab - a^2 = z^2 \ldots\ldots a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - z^2}$.

Die gelösten Aufgaben sind folgende:

1. Gegeben eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Basissegmente, das Dreieck zu bestimmen.

Diese Aufgabe liefert zwei Construktionsfälle. Ist die grössere Kathete gegeben, so muss die Differenz der Basissegmente kleiner sein als die gegebene Kathete; der zweite Fall, wenn die kleinere Kathete gegeben ist, bleibt immer bestimmt und enthält drei verschiedene Auflösungen.

2. Gegeben eine Kathete und das nicht anliegende Basissegment. Drei Auflösungen.
3. Gegeben die Differenz der Katheten und die Höhe.
4. „ „ Summe „ „ „ „

5. Eine gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.
6. Es sind ein Kreis und ein Punkt gegeben. Man soll über diesen Punkt eine Secante von gegebener Länge ziehen. Die beiden Fälle, der Punkt ist innerhalb oder ausserhalb des Kreises, sind beide erläutert.
7. Gegeben ein Halbkreis mit seinem Diameter und eine auf den Halbmesser errichtete Senkrechte. Es soll vom Endpunkte dieser Senkrechten eine gerade Linie derart gezogen werden, dass der Abstand von der Peripherie des Kreises einer gegebenen Geraden gleich sei. — Es sind 6 Fälle möglich, welche alle erläutert werden. Wie jedesmal, so wird auch hier stets angegeben, unter welchen Umständen die Aufgabe unbestimmt bleibt.

---

## Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione mathematica. Liber Quartus.

Enthält die Fortsetzung der quadratischen Gleichungen, von welchen die schwierigeren Fälle behandelt werden. Die Lehrsätze, welche den Construktionsaufgaben vorangehen, sind folgende:

Theorem 1. Hat ein inneres oder ein äusseres Glied einer Proportion einen grösseren Werth als die anderen Glieder, so ist das zweite innere oder äussere Glied kleiner als alle anderen Glieder. Der Beweis wird einfach auf folgende Art geführt: Hat man $a : b = c : d$ und ist $a$ das grösste Glied, so ist offenbar auch $a > b$ und damit die Proportion bestehe, auch $c > d$. Nun ist aber auch $a > c$, daher auch $b > d$, folglich $d < b$ und $d < c$ oder $d$ das kleinste Glied.

Theorem 2. Ist die Summe der äusseren Glieder eines Verhältnisses grösser als die Summe der inneren Glieder, oder die Differenz der ersteren grösser als die Differenz der letzteren, so sind die äusseren Glieder das eine das grösste, das andere das kleinste Glied der Proportion. Dasselbe gilt natürlich auch bezüglich der inneren Glieder, wenn ihre Summe oder Differenz grösser ist als jene der äusseren Glieder.

Theorem 3. Ist die Summe oder Differenz der inneren Glieder gleich der Summe oder der Differenz der äusseren Glieder, so ist das grössere äussere dem grösseren inneren, das kleinere äussere dem kleineren inneren Glied gleich.

Die gelösten Aufgaben sind nun folgende:

---

1) Der Beweis wird nicht geführt, da dieser Lehrsatz in Euclides bewiesen wird („hoc manifestum est ex propos. 36 et 35 tertis elementorum").

Problem I. Es ist ein Quadrat zu bestimmen, welches sich zu einem gegebenen Quadrat wie $a : b$ verhalte.

Problem II. Es sind zwei Halbkreise gegeben, deren Halbmesser sich auf derselben geraden Linie befinden. Es soll von einem Endpunkte der Basis dieser Halbkreise eine gemeinschaftliche Sekante derart gezogen werden, dass der Abschnitt dieser Sekante, welcher zwischen den Peripherien der beiden Halbkreise enthalten ist, einer gegebenen geraden Linie gleich sei.

Die vielen Fälle, welche hier möglich sind, findet man im Apollonius redivivus behandelt. In den Comp. et Resol. sind nur achte derselben gelöst. Dieses Problem nimmt volle 130 Seiten des Werkes ein.

Problem III. Gegeben die Basis eines Dreiecks und die Differenz der Schenkel mit der Höhe. Das Dreieck zu bestimmen.

Am Ende dieses Buches wird als Anwendung des III. Problems ein Vorschlag gemacht, wie man den Durchmesser der Erde bestimmen könnte. Die gegebenen Lösungen sind jedoch keiner Richtigkeit fähig.

---

## Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione Mathematica. Liber quintus.

Ist in vier Capitel getheilt. Im ersten Capitel sind jene Aufgaben behandelt, welche keine geometrische Lösung erfordern. Im zweiten die unmöglichen Aufgaben (Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas). Im dritten sucht er die Aufgaben zu behandeln, welche *vana, seu negatoria* sind und quorum Resolutiones indicant talia esse Problemata. Endlich im vierten jene Aufgaben, *quae sub Algebram non cadunt* und welche somit so gelöst werden, wie es noch die Alten thaten.

Dieses Buch wird uns wohl am meisten zu reden geben.

*I. Abschnitt.* Hier ist das bekannte Archimedische Verfahren behandelt (wovon Vitruv im 3. Cap. des IX. Buches berichtet) um die Menge Goldes und Silbers in der Krone des Hiero von Syrakus zu bestimmen. Andere, dieser ähnlichen, Aufgaben kommen ebenfalls zur Sprache. Zu diesem Abschnitt gehören auch einige Aufgaben aus der arithmetischen Progression, welche, wie Kästner sagt, zu Beginn des XVII. Jahrhunderts „noch nicht bequem ist behandelt worden.“ Der eigentlichen Aufgabe lässt Ghetaldi vier Lehrsätze vorangehen, welchen das eigentliche II. Problem folgt. Letzteres lautet: Es sind mehrere Geraden gegeben, welche einander um gleiche Unterschiede übertreffen. Man kennt die kürzeste und die längste derselben, sowie die Länge, welche alle diese Geraden zusammengenommen ausmachen. Es soll jede einzelne dieser Geraden bestimmt werden.

Die Lösung nach arithmetischer Progression würde sehr einfach sein, indem das erste und letzte Glied, sowie die Summe aller Glieder bekannt ist, und man die Differenz sucht. Die Lösung nach Ghetaldi ist aber folgende:

| *Nach Ghetaldi.* | *Nach der arithmetischen Progression.* |
|---|---|
| Sind die betreffenden Grössen $a_1$, $a_n$, $d$ und $s_n$, so hat man aus den vorangehenden Lehrsätzen: | |
| $2s_n : a_1 + a_n = a_n - a_1 + d : d$ | welche Prop. man auf folgende Art erhält: |
| | Es ist $2s_n = (a_1 + a_n)n$ |
| | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| | daher $nd = a_n - a_1 + d$ |
| | und $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$ |
| | wodurch |
| | $2s_n = (a_1 + a_n)\frac{a_n - a_1 + d}{d}$ |
| | oder |
| Aus der Proportion folgt. | $2s_n : a_1 + a_n = a_n - a_1 + d : d$ |
| $2s_n d = a_1 a_n + a_n^2 - a_1^2 - a_1 a_n + a_1 d + a_n d$ | |
| $2s_n d = a_n^2 + a_n d - a_1^2 + a_1 d$ | |
| $2s_n d - a_n d - a_1 d = a_n^2 - a_1^2$ | |
| und | |
| $d(2s_n - a_n - a_1) = a_n^2 - a_1^2$ | |
| woraus: | |
| $2s_n - a_n - a_1 : a_n + a_1 = a_n - a_1 : d.$ | |

Aehnlicher Aufgaben werden noch mehrere gelöst.

*II. Abschnitt.* Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas — diese Aufgaben sind folgende:

1. Eine gerade Linie so zu schneiden, dass das Rechteck unter ihren Theilen mit dem Quadrate des Unterschiedes der Theile so viel betrüge als der Theile Quadrat.

Die gegebene Linie sei $2b$ und der Unterschied der Theile $2a$, also die Schnitte $b + a$ und $b - a$. Es wird nun verlangt, dass: $(b + a)(b - a) + (2a)^2 = (b + a)^2 + (b - a)^2$ sei.

Löst man diese Gleichung für $b$, so erhält man: $b = a$ *quod est absurdum.* In der That ist diese Theilung nicht möglich, da der Schnitt dem

Ganzen gleich sein müsste. Aehnliches ergibt die Lösung folgender, im selben Abschnitt enthaltenen Aufgaben.

2. Eine Grade $a$ derart theilen, dass $3x(a-x)+(2x-a)^2=a^2$ sei,

3. " " " " " " $a(a-2x)+x^2=a(a-x)$ "

4. " " " " " " $a(a-2x)=(a-x)^2$ "

5. " " " " " " $2a(a-x)=a^2+(a-x)^2$ "

6. Es ist die Grundlinie eines Dreiecks gegeben. Die Differenz der Basissegmente soll das Doppelte der Differenz der unbekannten Seiten betragen, und die Differenz der Seiten soll doppelt so gross als der Unterschied zwischen der grösseren Seite und der Basis sein.

7. Eine Gerade $a$ derart theilen, dass $\frac{a(a-x)}{2}+a(a-x)=a^2+(a-x)^2$ sei.

8. " " " " " " $2a(a-x)=a^2+2(a-x)^2$ "

9. " " " " " " $3x(a-x)=a^2$. "

*III. Abschnitt. Problemata vanum, seu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.* So der Wortlaut des Textes. Dazu muss aber bemerkt werden, dass diese beiden Erklärungen durchaus nicht gleichgültig sind, und es ist anzunehmen, das Ghetaldi eine solche Verwechslung nicht übersehen hätte, wenn er die Drucklegung des Manuskriptes noch erlebt hätte. Es gibt viele Aufgaben, welche auf unzählige Arten gehen, nicht jedoch auf jede. Die Lösung der bezüglichen Aufgaben führt auf identische Gleichungen.

1. Eine gegebene Gerade ist derart zu theilen, dass das Rechteck über die ganze Gerade und über die Differenz der Theilungsschnitte, und das Quadrat des kleineren Theilungsschnittes zusammengenommen, dem Quadrat des grösseren Schnittes gleich sei. Man hat:

$$a(a-2x)+x^2=(a-x)^2$$
$$a^2-2ax+x^2=(a-x)^2$$

eine identische Gleichung.

2. Es soll

$$(a-x)^2+x^2=(a-2x)^2+2x(a-x)^2 \text{ sein.}$$

3. $$x(a-x)+\frac{(a-2x)^2}{2}=\frac{a^2}{4}$$

4. Ueber eine gegebene Basis ist ein Dreieck derart zu construiren, dass die Differenz der zwei Schenkel der halben Basis gleich sei.

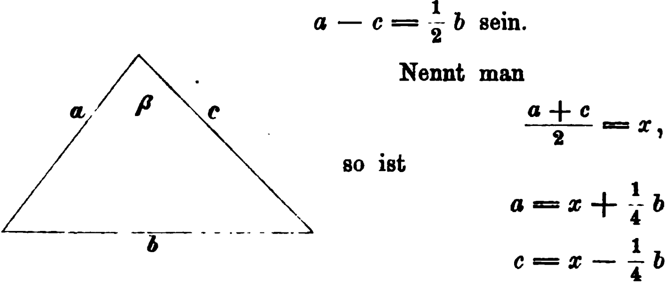
Ghetaldi erhält hier eine identische Gleichung und verwechselt stark die unbestimmte mit der unnützen Aufgabe. Da Kästner diesen Fall sehr ausführlich behandelt hat, so wollen wir seine Bemerkung folgen lassen. „Wenn Ghetaldi sagt: „Problema vanum ac nugatorium, nam super eadem

base innumera triangula constituentur, in quibus differentia crurum aequalis erit dimidiae basi, ut in hac quae sequitur compositione perspicuum erit" und dieses nun durch eine Construktion zeigt, so nennt er unnütz, was unbestimmt ist."

„Ich will die Auflösung nach meiner Art vortragen, den Satz, welchen ich dabei brauche, vom Verhalten zwischen den Seiten eines Dreiecks und einem Winkel, hat freilich Ghetaldi nicht angewandt."

Folgende ist die Auflösung nach Kästner. Es soll

$$a - c = \frac{1}{2} b \text{ sein.}$$




Nennt man

$$\frac{a + c}{2} = x,$$

so ist

$$a = x + \frac{1}{4} b$$

$$c = x - \frac{1}{4} b$$

und

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

oder

$$2x^2 + \frac{1}{8} b^2 - 2\left(x^2 - \frac{1}{16} b^2\right) \cos \beta = b^2$$

Da man hier zwei Unbekannte $x$ und $\beta$ hat, so findet man, wenn $\beta$ beliebig genommen wird:

$$x = \frac{b \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2}}}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

oder wenn $x$ nach Gefallen gewählt wird:

$$\cos \beta = \frac{1 - \frac{7}{16} \frac{b^2}{x^2}}{1 - \frac{1}{16} \frac{b^2}{x^2}}$$

5. Ueber eine gegebene Basis ist ein Dreieck derart zu construiren, dass die Differenz der Basissegmente der doppelten Differenz der zwei Seiten gleich sei. — Eine ebenfalls unbestimmte Aufgabe.

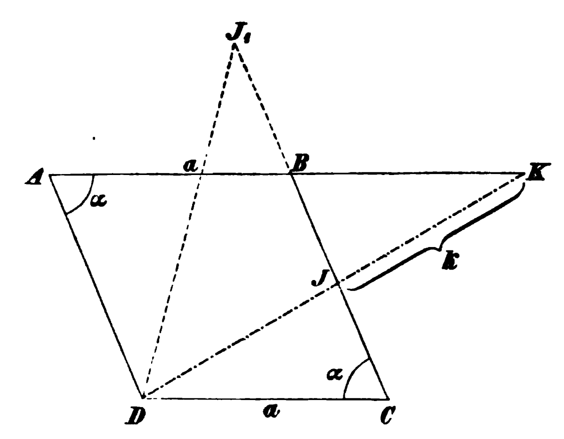
*IV. Abschnitt.* De Resolutione et Compos. Problematum, quae sub Algebram non cadunt. So leitet Ghetaldi den letzten Abschnitt seines Werkes ein: Exempla Resol. et Comp. sub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, et Apollonji Pergaei, et Archimedis; quare potui ad ea exempla studiosos remittere, nisi quod institutio mei operis hanc quoque sui partem desiderabat; subijciam igitur aliquot Pro-

blemata, quae sub Algebram non cadunt, eaque resolvam, et componam, methodo, qua veteres in resolvendis et componendis omnibus Problematibus utebantur.

Hier handelt es sich also um Aufgaben, deren algebraische Lösung Ghetaldi nicht gekannt hat. Die erste dieser Aufgaben ist:

1. Es ist ein Rhombus gegeben, von welchem eine Seite verlängert wird. In dem Aussenwinkel, der dieser Art entsteht, ist eine Gerade von gegebener Länge derart zu legen, dass sie verlängert durch jenen Winkel gehe, welcher dem Winkel gegenüber liegt, über dessen Spitze die Seite verlängert wurde. (Rombo dato, et uno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertingat.)

Ghetaldi gibt von der Aufgabe eine geometrische Analysis, dann die Construktion und den Beweis dazu. Alles jedoch nach Art der Alten noch. Kästner hat die Aufgabe folgendermassen gelöst.




Die Seite $AB$ wird also verlängert, und es soll die $DK$ derart gezogen werden, dass $JK$ einer gegebenen Länge $k$ gleich sei. Es ist $BC = a$. Setzen wir $CJ = \frac{1}{2}a + x$, so ist $BJ = \frac{1}{2}a - x$.

Es ist ferner, weil $AD \parallel BJ$:

$$KJ : JB = KD : AD$$

oder

$$k : \frac{1}{2}a - x = k + DJ : a$$

woraus folgt:

$$\alpha) \qquad DJ = \frac{\left(\frac{1}{2}a + x\right)k}{\frac{1}{2}a - x}$$

△ $DCJ$ gibt:

$$\beta) \qquad DJ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\,a + x\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{2}\,a + x\right)\cos\alpha$$

Setzt man die Werthe $\alpha$) und $\beta$) nach Quadrirung von $\alpha$) einander gleich, so erhält man eine Gleichung des vierten Grades. Es gibt also vier Werthe von $x$, welche einer solchen Gleichung genügen. Um diese Werthe zu erklären*) denke man sich die Gerade $DK$ um den festen Punkt $D$ derart gedreht, dass sie mit $DC$ alle möglichen Winkel von 0 bis 360° einschliesse. Bei der Drehung von 0° bis zum Winkel $CDB$ wird es eine Lage der Linie geben, für welche $JK = k$ sein wird. Setzt man die Drehung fort, so wird es bis zum Winkel $CDA$ eine andere Lage der $DK$ geben, für welche ihre Verlängerung von der Seite $AB$ bis zur Begegnung mit der verlängerten $BC = k$ wird, und somit einen zweiten Werth von $x$. Denkt man sich eine zweite Gerade $CD$ um den Punkt $C$ gedreht, so erhält man auch zwei Durchschnitte mit der Seite $DA$ und dadurch noch fernere zwei Werthe von $x$. Während also die Gleichung sogleich alle vier möglichen Fälle angibt, löst und betrachtet Ghetaldi einen einzigen derselben, welcher sich eben in der Figur von den übrigen aussondern lässt.

Die anderen Aufgaben, welche behandelt werden, sind folgende:

2. Es ist ein Rhombus $ABCD$ (frühere Figur) gegeben. Es soll vom Punkte $C$ aus eine Gerade derart gezogen werden, dass jene Strecke derselben, welche von der Verlängerung der Seiten $AB$ und $AD$ begrenzt wird, einer gegebenen Gerade gleich sei. Natürlich muss die gegebene Strecke grösser sein als die über $C$ auf $AC$ geführte Senkrechte zwischen den verlängerten Seiten $AB$ und $AD$.

3. Gegeben die Basis eines Dreiecks, die Differenz der beiden anderen Seiten und der von letzteren eingeschlossene Winkel.

4. Wie 3. nur anstatt der Differenz die Summe der Seiten.

5. Gegeben die Differenz der Basissegmente, die Summe der zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel.

6. Wie 5. nur anstatt der Summe die Differenz der zwei Seiten.

7. Gegeben eine Seite, ein anliegender Winkel und die Differenz der zweiten einschliessenden Seite und der Basis.

8. Wie 7. nur anstatt der Differenz die Basis.

Alle diese Aufgaben, zu deren Lösung Ghetaldi eine Menge Sätze aus Euklides braucht, lassen sich mit Zuhilfenahme der trigonometrischen Funktionen sehr leicht lösen.

Dieser der Inhalt des Werkes „de Resol. et Comp. mathematica", welches wir nun besprechen wollen.

---

*) Lösung und Erklärung nach Kästner.

## III.

Das Werk des Marino Ghetaldi „De Resolutione et Compositione Mathematica“ hat ohne Weiteres eine Menge Schriftsteller dazu veranlasst, diesen Gelehrten, welchen wir nunmehr allerdings als einen der berühmtesten Mathematiker des XVI. und der ersten Dezennien des XVII. Jahrhunderts kennen gelernt haben, als den Entdecker der analytischen Geometrie zu proklamiren. Es sei hier gleich bemerkt, dass *Montucla*, der bekannte Verfasser der *Histoire des sciences mathematiques*, ein leidenschaftlicher Franzose, welcher ausser sich geräth, sobald er auf Descartes und auf die ihm vorgebrachten Beschuldigungen zu sprechen kommt, unserem Ghetaldi die Ehre zulässt „in der Geometrie der Alten sehr bewandert gewesen zu sein.“ Ein ähnliches schreibt auch Kästner, der jedoch die *Comp. et Resolut.* „ganz nach dem Verfahren der griechischen Geometer, nur dass in der Analysis Buchstabenrechnung angewendet wird“, hehandelt findet.

Hören wir nun die Meinung anderer Autoren.

*Ljubić* sagt in seinem „*Dizionario biografico degli illustri Dalmati*“ ad vocem Ghetaldi: In quest' opera (de Resolut. et comp. Mathem.) sette anni prima che uscisse in luce la Geometria o piuttosto l'algebra di Cartesio, Marino applicava l'algebra alla geometria, e quindi si meritò di aver distinto posto tra quelli uomini grandi, a cui le scienze sono debitrici dei loro maravigliosi progressi. Con tal veste spinse egli la risoluzione delle equazioni determinate fino al quarto grado. Hier müssen wir sofort eine bedeutende irrthümliche Beurtheilung des Werkes hervorheben, indem Ghetaldi die Gleichungen des IV. Grades eben nicht aufgelöst hat und die bezüglichen Aufgaben als solche qualificirte, welche sub algebram non cadunt. Ebensowenig hat er die cubischen Gleichungen zur Sprache gebracht. Ljubić hat also das Werk nicht gekannt und daher die Bedeutung desselben übertrieben.

*Cusani.* La Dalmazia. Milano. Pirotta 1846, Band I. Seite 271 erwähnt nur kurzweg „Al Ghetaldi si attribuisse il merito d'aver primo applicata l'algebra alla geometria, e l'analisi alle Curve.

Auch hier also ein bedeutender Irrthum, indem sich Gh. mit der Untersuchung der Curven gar nicht beschäftigt hat.

*Appendini.* Notizie sulla storia e letteratura dei Ragusei. Band II. S. 44 ff. „Tutti generalmente attribuiscono a Cartesio la lode di avere il primo applicata l'algebra alla geometria, nel che volendo essere troppo parziali per il gran matematico francese si mostrano ingiusti col Raguseo. Egli è indubitabile che Cartesio fù il primo ad applicare le analisi alle curve e di dimostrarne le proprietà costruendo le equazioni superiori al

secondo grado. Ma è certo egualmente indubitato, che il primo passo, dirò così fu fatto da Marino Ghetaldi colla costruzione delle equazioni del primo e secondo grado.

In der *Galleria degli illustri Ragusei*, *Martechini 1841*, lesen wir: „sotto gli auspici del porporato, uscì alla luce l'opera stessa (de comp. et resol. math.), nell' anno 1630, sette anni prima che Cartesio facesse fare il più gran passo alla scienza coll' applicare l'analisi alle curve e alla dimostrazione delle loro proprietà. La prima spinta a questo passo gigantesco fu data in una guisa la più potente e luminosa dal Ghetaldi, anzi la grande scoperta era gia fatta da lui, quando venne alla luce la grand' opera del Cartesio; e certamente se il Ghetaldi fosse vissuto di più, avrebbe portato sempre più innanzi i suoi gloriosi trovati e potea nascere fra il geometra raguseo e quello della Turena, una gara non dissimile dall' altra che nel secolo XVIII pose in guerra i partigiani dei due grandi matematici della Germania e della Gran Brettagna per decidere quale dei due fosse l'inventore del calcolo differenziale.

Auf Seite 6 einer Broschüre mit dem Titel *„Nave Rugusea“ Italia 1819*, findet man folgende Stelle: „Noi non parleremo delle opere di Ghetaldi, che raccomandano alla posterità i di lui superiori talenti; di queste se ne da contezza dagli eruditi scrittori di ogni tempo. La sua opera de Resolut. et comp. Mathematica etc., fa vedere l'applicazione della Geometria alla risoluzione delle equazioni determinate fino al quarto grado, opera, che segnò al gran Cartesio le tracce meravigliose di spiegare colle equazioni algebraiche, la natura e proprietà delle curve, allorchè per la prima volta publicò la sua geometria in Parigi nel 1637. Nach dem unbekannten Autor dieser kurzen Biographie des Ghetaldi hätte also letzterer dem Cartesius die Bahn vorgezeichnet, welcher er bei der Entdeckung der Analysis der Curven gefolgt wäre. Dieselbe Broschüre enthält eine Elegie, welche gelegentlich der Stapellassung eines Schiffes mit dem Namen „Marino Ghetaldi“ verfasst wurde, und worin zu lesen ist:

„Perge inde ad Gallos, et cur, dic, Gallia cur te
Gallia magnorum magna Virum genitrix
Mirandis praestantem orsis, nec laudem egentem
Invidiae stimulis laus aliena ferit?
Ecce suis qui Cartesium ad majora repertis[1])
Impulit, ignotas edocuitque vias,
Et tu tam pulchros retices non aequa labores,[2])
Dum cives merito tollis ad astra tuum?
Talibus, atque aliis tibi cura sit usque Ghetaldi,
Quoquo ieris, famam extendere, cara Ratis etc.

Ad 1) und 2) sind folgende Anmerkungen gesetzt:

1) Vide Riccatum et Wolfium. Primus acceptam refert Ghetaldo perfectam rationem, qua aequationes primi et secundi gradus, postquam resolutae fuerint, ad Constructionem Geometricam duci possunt, earumque radices reales determinari. Alter autem, Ghetaldum facem Cartesio praetulisse, aperte asserit.

2) Clar Montucla, qui in eximia sua rerum Mathematicarum Historia *insignem Mathematicum*, et Tractatus de *Inclinationibus Restitutorem* vocat Ghetaldum, quin tamen memoret *Apollonium redivivum, Archimedem promotum,* et opera de *Luce et Iride,* loquens de *Constructionibus Geometricis* non solum de Ghetaldo nostro nullam mentionem facit, sed Cartesianae laudis plus aequo studiosus, celeberrimum etiam praeterit Ghetaldianum opus de Comp. et Resol. Math. editum Romae 1630, septem nimirum ante annos, quam Cartesius suam ederet Geometriam.

*Giulio Bajamonti* sagt auf Seite 6 seines *Elogio dell' Abate Ruggiero Giuseppe Boscovich* II. Auflage. Neapel MDCCXC. Presso Donato Campo: „Marino Ghetaldi, patrizio Raguseo nel cominciamento del passato secolo, promosse le dottrine di Archimede sulla Gravità e grandezza dei vari generi di corpi, trovò parecchie nuove proposizioni sulla parabola e venne a delineare le prime tracce della scienza analitica.“

Ein ganz neues Werk: *Ragusa, Cenni storici compilati da Stef. Skurla. Agram 1876* enthält die Notiz: ... Marino Ghetaldi, chiamato dall' acuto Paolo Sarpi angelo di costumi e demonio in matematica, fù il primo che abbia applicata l'algebra alla geometria.

Viel vorsichtiger als alle die genannten Autoren war *G. Alessandro Goracuchi*, welcher in der Ecloga per l'anno *MDCCCLXXVIII* unter *sommità letterarie ragusee* nur einfach anführt: „Ed in vero incominciando da quella parte dello scibile umano che a buon diritto vien detta la scienza per eccellenza, Ragusa ebbe un Marino Ghetaldi, che prima di Cartesio stampava le sue osservazioni sull' applicazione dell' algebra alle costruzioni geometriche.“

Alle diese Urtheile sind mehr oder weniger durch eine Bemerkung des *Riccati* entstanden, welcher sich über die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wie folgt ausdrückte: Haec pars, nondum absoluta, ac penitus et voluta est, nisi a Marino Ghetaldo Ragusino in opere posthumo inscripto: De comp. et resol. mathem. ecc. Ineo siquidem dilucidam Methodus ediscitur, qua aequationes primi et secundi gradus, postquam resolute fuerint, ad geometricam constructionem duci possunt, earumque radices reales determinari. Ebenso vortheilhaft drückt sich im Sinne des Ghetaldi *Wolf* in seinem *De scriptis mathematicis* Cap. IV, §. 5 aus, wo er sagt: Cartesius

arithmeticam litteralem et regulas algebrae descripsit ex Harrioto, et *quemadmodum* Oughtredus in Clave, atque Marinus Ghetaldus in libris quinque de resolutione et compositione mathematica, arithmetica Vietam ad geometriam elementarem applicarunt, et constructiones aequationum simplicium ac quadraticarum dederunt; ita ipse (Cartesius) Harriotoeam ad geometriam sublimiorem transferens, curvarum naturam, per aequationes algebraicas explicare coepit etc. Letztere Bemerkung veranlasste den Professor der schönen Literatur an der Universität zu Pavia „Vincenzo Monti" in seinen Vorlesungen im J. 1803 sich ziemlich scharf über den Cartesius auszudrücken, welchem er vorwirft, dem bekannten Spruch: benignum est et plenum ingenui pudoris fateri per quos profeceris, niemals gefolgt zu sein.[1])

Wir glaubten, dass eben diese Meinungen verschiedener Historiker unsere Leser interessiren werden, da sie ein deutliches Bild des Urtheiles enthalten, welches in vielen Kreisen bezüglich der Entdeckung der analytischen Geometrie herrscht, und weil — wie es uns dünkt — der Mühe werth ist, sich zu überzeugen, wie eine irrthümliche Bemerkung eines Geschichtschreibers von Jahrhundert zu Jahrhundert verschleppt wird. Ausserdem nehmen wir es uns vor, durch die gegenwärtige Abhandlung die Irrthümer in der Beurtheilung der Verdienste des Ghetaldi bezüglich der Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu beheben und womöglich den wahren Werth des Werkes de resol. et comp. etc. festzustellen, ein Grund mehr um die Quellenangaben anzuführen, welche wir zu widerlegen gedenken.

## IV.

Wollen wir über Gethaldi's Werk ein Urtheil fällen, so müssen wir die Geschichte der Mathematik durchblättern und den Entwickelungsgang der Analytik als solche in raschen Schritten verfolgen. Dadurch werden wir wohl am besten in die Lage versetzt, uns Kenntnisse über den Stand dieser Wissenschaft zu Ghetaldi's Zeiten zu verschaffen, und es wird uns leichter ausfallen ein richtiges und unpartheiisches Verdict zu fällen.

Schon die griechischen Geometer haben nicht nur Begriffe der Analy-

1) Newton hat es nicht verschmäht, dem Italiener Grimaldi seinen Antheil bei der Entdeckung der Brechung und Decomposition des Sonnenlichtes zu überlassen. Dem grossen Cartesius, dem wir eben das Prädikat „gross" vorsetzen um durchaus nicht den Glauben zu erwecken, dass wir dessen hohe Verdienste schmälern wollten, wird aber vorgeworfen, sowohl bei Erklärung des Regenbogens, als auch bei der Aufstellung des Brechungsgesetzes fremde Resultate und Entdeckungen benutzt zu haben, ohne die Quellen anzuführen, aus welchen er die bereits gemachten Wahrnehmungen schöpfte.

sis gehabt, sondern dieselbe auch angewendet. Die Belege zu dieser Behauptung findet man vor Allem in Euklid's Elemente XIII 5, wo er folgende Definition gibt: „Analysis ist die Annahme des Gesuchten als zugestanden durch die Folgerungen bis zu einem als wahr Zugestandenen"[1]), welche Definition Bretschneider bis auf Eudoxus zurückführen zu können glaubt.[2]) Nach der Tradition der Alten ist aber kein anderer als Platon derjenige, welcher die Analysis entdeckt und sie den Geometern zum Bewusstsein gebracht hat. Es berichtet hierüber Diogenes Laertius, indem er sagt: Platon führte zuerst die analytische Methode der Untersuchung für Leodamas von Tasos ein. Ebenso liest man in einer Notiz des Proklus: Es werden auch Methoden angeführt, von denen die beste die analytische ist, die das Gesuchte auf ein bereits zugestandenes Princip zurückführt. Diese soll Platon dem Leodamas mitgetheilt haben, der dadurch zu vielen geometrischen Entdeckungen soll hingeleitet worden sein. Die zweite Methode ist die trennende, die, indem sie den vorgelegten Gegenstand in seine einzelnen Theile zerlegt, dem Beweise durch Entfernung alles der Construktion der Aufgabe Fremdartigen einen festen Ausgangspunkt gewährt; auch diese rühmte Platon sehr als eine für alle Wissenschaften förderliche. Die dritte Methode ist die der Zurückführung auf das Unmögliche, welche nicht das zu Findende selbst beweist, sondern das Gegentheil desselben bestreitet und so die Wahrheit durch Uebereinstimmung findet.[3]) Soviel über die Kenntnisse der Bedeutung und des Werthes der Analysis im Alterthum. Was die Anwendung der Analysis anbelangt, so beschränkt sie sich wohl nur auf die problematische Analysis, welche den methodischen Weg zur Auflösung von Problemen zeigen soll.[4]) Die Aufgabe wird nämlich als gelöst betrachtet und dann mit allen Mitteln der Synthese eine Relation gesucht, welche mit bekannten Mitteln ein zwar bereits hypothetisch angenommenes, aber in der That gesuchtes Stück der Figur aus den von vornherein gegebenen construirbar macht. Nun ist letzteres Stück auch gegeben und es wird die Relation dieses zu einem neuen Stück, dann zu einem dritten etc. gesucht, bis man die ursprünglichen Bestimmungsstücke bestimmt.

„Mit dieser Analysis ist nun aber die Lösung des Problemes noch nicht vollendet, vielmehr folgt nun überall noch eine Synthesis (compositio),

1) Cantor. Vorl. über die Geschichte der Mathem. Leipzig 1880. Seite 189. Bd. I. — Hankel, Geschichte der Mathem. im Alterth. und Mittelalter. Leipzig 1874. Seite 137.

2) Bretschneider. Geom. vor Eukl. 168. Hankel nennt die bezügliche Bemerkung Bretschneiders scharfsinnig.

3) Cantor a. a. O. Seite 188—189.

4) Hankel a. a. O. S. 141.

welche zunächst die „Construktion" in strenger Ordnung, wie sie zu geschehen hat, dann deren synthetische „Demonstration" gibt. Die Construktion folgt im Allgemeinen, wenn sich nicht zufällig Vereinfachungen ergeben, durchaus dem Gange des zweiten Theiles der Analysis, der „Resolution"; der Beweis aber schlägt den umgekehrten Weg des ersten Theiles der Analysis, der „Transformation" ein."[1]) In der Literatur der Griechen findet man nie die Analysis allein gegeben.

Obwohl vielleicht nicht ganz zur Sache gehörig, so glauben wir, da wir eben daran sind, die geschichtliche Entwickelung der Analysis zu verfolgen, eine Stelle aus Hankel's Geschichte hier folgen zu lassen, welche sich auf die letztere Bemerkung bezieht und welche den mathematischen Geist der griechischen Geometer so trefflich charakterisirt.

„Wenn wir in den Schriften der Alten — sagt Hankel Seite 148 seines Werkes — die Synthesis überwiegend und überall, wo eine Analysis gegeben wird, nicht nur diese mit peinlicher Sorgfalt ausgeführt, sondern ihr auch eine vollständig durchgearbeitete Synthesis in feierlichster Weise folgen sehen, die alles in umgekehrter Ordnung noch einmal sagt, so können wir uns dies nur aus der eigenthümlichen Richtung der griechischen Mathematiker erklären, welche ihre Leser weniger in den wissenschaftlichen Gedankengang einzuführen suchten, der sie von selbst zu dem wahren Resultate führen musste, als vielmehr zu der Anerkennung des Resultates mit logischer Gewalt zu zwingen. Es muss diese Maxime der griechischen Philosophen und Mathematiker, ihre Resultate durch einen trockenen dogmatischen Syllogismus zu beweisen und auf dessen formelle und recht handgreifliche Bündigkeit einen hohen Werth zu legen, als eine allgemeine griechische Nationaleigenthümlichkeit angesehen werden, welche in der bei Gelehrten und Dilettanten früh sich kundgebenden Neigung zu dialektischen Klopffechtereien ihr interessantes Seitenstück hat. Denn dass nur, um ihre Wissenschaft solchen sophistischen Zänkereien zu entziehen, die Mathematiker die höheren Theile der Geometrie mit so schwerfälligen Panzern umgeben und sich selbst mit diesem unnützen Ballast beschwert hätten, ist nicht zu glauben. Die Sache liegt vielmehr so, dass diese, uns so lästige Form ihren Geisteskräften die angemessene war; denn sie besassen mehr scharfsinnigen Verstand, um sich auf schmalem Wege durch alle Hindernisse allmählich hindurchzuwinden, als jenes Vermögen des Geistes, von Einem Punkte aus ein ganzes Gebiet intuitiv zu überschauen. Nur ein Geist, wie Platon, bei dem umgekehrt die Intuition überwog, konnte die analytische Methode ihrer grossen Bedeutung nach erkennen."

Die fünf ersten Sätze des XIII. Buches der Euklidischen Elemente,

1) Hankel a. a. O. 144.

welche als Eigenthum des Eudoxus betrachtet werden[1]), bringen den goldenen Schnitt in Verbindung mit der analytischen Methode. Man findet ferner die analytische Methode in dem Berichte des Eutokius über die Würfelverdoppelungen des Menächmus etc.

Solche Thatsachen schliessen jeden Zweifel über die ersten Begriffe der Analysis und über die ersten Anwendungen der analytischen Methode aus, und man könnte höchstens noch Fragen aufstellen, ob Platon oder ob Euklid, ob Eudoxus oder andere Gelehrte des Alterthums den Grundstein zu diesem Gebäude gelegt haben; auf alle Fälle bleibt es nachgewiesen, dass diese Begriffe zum mindesten aus den Zeiten der griechischen Geometer stammen.

Aber selbst die Benutzung der Coordinaten kann aus dem grauesten Alterthum abgeleitet werden, denn wenn Cantor sagt, dass es thöricht wäre die Quadratenzerlegung der Aegypter als den bewussten Anfang eines Coordinatensystems erkennen zu wollen, so sieht er zum mindesten in jenem Vorgang die Gewohnheit einer geometrischen Proportionslehre. Cantor hat, wenn wir seine Schreibart richtig deuten, jenes „bewusste" nicht ohne eine bestimmte Absicht hingesetzt und seinen Lesern die richtige Auslegung des Satzes überlassen. Wir für unseren Theil sind geneigt, wenn nicht einen bewussten, doch zum mindesten einen unbewussten Anfang eines Coordinatensystemes hierin zu erkennen.

Eine ganz deutliche Anwendung der Coordination findet man im ersten Buch der Kegelschnitte des Apollonius von Perga. Wir können uns hier über die Art und Weise des Apollonius, den Kegel zu schneiden, nicht näher einlassen, da wir sonst unser Thema über Gebühr ausdehen, weisen aber den wissbegierigen Leser auf Cantor's „Vorlesungen", worin ganz ausführliche Daten enthalten sind.

Den unumstösslichsten Beweis, dass sich die Alten der Coordinaten zu bedienen wussten, liefert uns aber Hipparch, der die geographische Lage eines Ortes durch Länge und Breite bestimmte. Und wir dürften vielleicht nicht fehlgehen, wenn wir behaupten wollten, dass Heron von Alexandria die Bestimmungsmethode des Hipparch nur nachahmte, als er sich in der Feldmesskunst rechtwinkliger Coordinaten bediente. Hierüber lesen wir in Cantor's vorzüglichem Werke.[2])

„Die Aufnahme eines Feldes erfolgt (nach Heron) durch Absteckung eines Rechteckes, welches 3 seiner Endpunkte auf der Umgrenzung selbst besitzt. Die Seiten dieses Rechteckes werden nun freilich mit den Grenzen des Feldes nicht zusammentreffen, aber die zwischenliegenden Grenzstrecken

1) Cantor a. a. O. 208.
2) A. a. O. Seite 323.

bestimmen sich durch die senkrechten Entfernungen einzelner Punkte derselben von den Rechtecksseiten unter genauer Bemerkung derjenigen Punkte der Rechtecksseiten, in welche jene meist kleinen Senkrechten eintreffen. Der geschickte Feldmesser wird nach Heron's ausdrücklicher Vorschrift es so einzurichten wissen, dass die Grenze zwischen zwei zur Bestimmung ihrer Endpunkte dienenden Senkrechten leidlich gradlinig aussieht. — Wenn wir noch so vorsichtig uns davor hüten wollen, neue Gedanken in alte Methoden hineinzulesen, hier müssen wir ein bewusstes Verfahren mit rechtwinkligen Coordinaten erkennen."

Die Vermuthung, dass Ptolemäus auch dem Begriffe der Raumcoordinaten nahe gekommen sei[1]), wollen wir ganz übergehen, um zur Feldmessung der Römer überzugehen. Die Decimanus und Cardo der römischen Agrimensoren und des Augurs, waren nichts anderes als zwei aufeinander senkrechte Geraden, welche unser heutiges Coordinatensystem repräsentirten. Cantor hat im Gegensatze zu anderen Ansichten gezeigt, dass Cardo zweifelsohne die Angel bedeutet, um welche das Weltall sich dreht, also die Weltaxe. Der Decimanus, den der Augur senkrecht auf die Cardo zog, war dann offenbar nichts anderes als die Ostwestlinie.

Der Sprung, den wir nun zu machen haben und der uns vom römischen Zeitalter zum X. Jahrhundert führt, erklärt sich durch den langen Stillstand, zu welchem die mathematischen Disciplinen vom Verfall des Römerreiches oder besser gesagt von der römischen Periode an, verurtheilt waren. Einem Auszuge aus der Naturgeschichte des Plinius im X. oder XI. Jahrh. verfasst, fand man eine Zeichnung beigefügt, welche als eine graphische Darstellung unter Zugrundelegung des Coordinatengedankens erkannt wurde. „Wir stellen nicht in Abrede — sagt Cantor —, dass hier der Anfang zu einer Betrachtungsweise vorhanden ist, die am Ende des XIV. Jahrh. an Wichtigkeit und Verbreitung gewann und das Wort latitudines, welches Plinius noch als Breite braucht, mit dem Sinne der Abscissen begabte, aber in der Zeit, in welcher jene Figur entstand, fällt es uns schwer, an das Bewusstsein ihrer Tragweite zu glauben." Und selbst was hierüber im XIV. Jahrhundert geschehen ist, nennt Hankel Anticipationen moderner Gedanken, deren Ausbildung eine oft sehr mangelhafte ist, und welche unter einem solchen Kram von scholastischen Subtilitäten und mathematischen Trivialitäten versteckt sind, dass wir nicht zu dem Gefühle kommen, es habe hier einmal auch ein blindes Huhn ein Körnchen gefunden. — Wie es dem sei, Thatsache bleibt es, dass Nicole Oresme ziemlich ausführliche Abhandlungen über die Coordinaten geschrieben hat.[2])

1) A. a. O. Seite 357.

2) Max Curtze. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. Berlin

Sein Tractatus de latitudinibus formarum ist in der Geschichte der analytischen Geometrie jedenfalls epochemachend. Aus Curtze's Abhandlung erfahren wir wie folgt über den Inhalt des Werkes. „Oresme nennt „Forma“ jede Erscheinung in der Natur, jede Bewegung, Veränderung der Wärme u. dgl.; die Latitudo soll ermöglichen, die Erscheinungen geometrisch darzustellen. Diejenige Grösse, von welcher die Forma abhängig gedacht wird, trägt Oresme als „longitudo“ auf einer geraden Linie von einem festen Punkte aus auf; die Grösse, welche die Abhängigkeit der „Forma“ von der longitudo ausdrückt, als „latitudo“ auf in den entsprechenden Punkten der „longitudo“ errichteten Senkrechten. Die Endpunkte der Senkrechten denkt er sich dann durch krumme Linien verbunden in stetigem Zuge. Er hat also damit ein rechtwinkliges Coordinatensystem hergestellt, genau so wie Descartes das seinige entwickelt. Die Abhandlung selbst behandelt nun zuerst die Eintheilung der „figurae“ in Arten, dann die Bestimmung aller der Figuren, welche überhaupt zur Darstellung der „latitudines formarum“ dienen können. Dabei sei bemerkt, dass Oresme nur die Punkte einer Curve im I. Quadranten kennt, da ihm natürlich negative Abscissen oder Ordinaten unmöglich sein mussten; auch der Fall, dass einer Abscisse zwei Ordinaten zukommen, der z. B. bei einem Kreisabschnitte grösser als der Halbkreis eintreten würde, wenn die Sehne als „longitudo“ benutzt wird, ist ihm unmöglich; einer „longitudo“ entspricht stets eine und nur eine „latitudo.““

Eine weitere Abhandlung des Oresme „Tractatus de Uniformitate et difformitate intensionum“ behandelt denselben Gegenstand jedoch wahrscheinlich in noch ausgedehnterer und erweiterter Gestalt.[1]).

Angesichts solcher Thatsachen glauben wir beruhigt behaupten zu können, dass Oresme durch seine Werke den Grundstein zur analytischen Geometrie des Descartes gelegt hat, denn wenn die Behauptung Curtze's wahr ist, dass die Ausgaben und Handschriften des Tractatus de latitudinibus bis weit in's XVI. Jahrhundert reichen, so ist immer die Hypothese gestattet, dass sie auch zu Descartes Zeiten noch bekannt und vielleicht in Verwendung waren. Wir können hier die Bemerkung Hankel's nicht unerwähnt lassen, welcher die Frage gar nicht untersuchen will, ob der Gedanke des Coordinatenprincips nicht vielleicht noch früher ausgesprochen worden sei. Uns genügt aber, constatiren zu können, dass Oresme zweifelsohne hierüber geschrieben hat. Und dass dieses Princip nicht unbeachtet

---

1870. Der Verfasser dieser Zeilen ist dem Prof. Cantor zu Heidelberg sehr zu Dank verpflichtet, da er von genanntem Herrn auf diese Schrift aufmerksam gemacht wurde.

1) A. O. a. Seite 11.

geblieben sei, sondern dass man demselben ein gewisses Gewicht beilegte, beweist so sehr der Umstand, dass die Vorlesungen de latitudinibus an der Kölner Universität vom Jahre 1398 an obligatorisch wurden.[1])

Bisher haben wir die Entwickelung der Analysis und das Princip der Coordinaten jedes für sich betrachtet und zwar aus dem einfachen Grunde, da uns die Geschichte bis zu diesem Zeitraume keinen Fall liefert, worin man über eine Vereinigung der Algebra mit der Geometrie jedwelche Spur entdecken könnte. Nun gelangen wir aber zur glücklichen Renaissance-Epoche, die auf unserem Gebiete doch so manches aufzuweisen hat. Indem wir zur Algebra zurückkehren, finden wir in den Werken des Leonardo da Pisa und in der Summa de arithmetica et geometria des Luca da Borgo eine vollständige Darstellung des damaligen Wissens gegeben. Das Liber abaci des Leonardo ist die Fundgrube gewesen, aus der die Algoristen und Algebristen ihre Weisheit geschöpft haben; es ist dadurch überhaupt die Grundlage der neueren Wissenschaft geworden und verdient wohl eine etwas nähere Betrachtung.[2]) Die Algebra des Luca da Borgo schloss mit der Erklärung, dass die Auflösung der Gleichungen $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ ebenso unmöglich sei als die Quadratur des Kreises. Die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades war somit der Stein der Weisen, an welchem die zukünftigen Mathematiker zu nagen hatten. Und die bezüglichen Versuche zur Lösung der kubischen Gleichungen geben vielfach zu dem Versuche Anlass, Aufgaben der Algebra durch Zuhilfenahme geometrischer Construktionen zu resolviren.

Libri, der Verfasser der Histoire des sciences Mathematiques en Italie, sieht den Giovanni Battista Benedetti, welchem u. A. Mazzuchelli (Scrittori d'Italia) bedeutenden Ruhm spendet, als den Begründer der analytischen Geometrie an. In seinem Werke „diversarum speculationum", gedruckt 1565, hat er nämlich mehrere Aufgaben der Arithmetik durch geometrische Construktionen aufgelöst. Der wissbegierige Leser findet zwei dieser Aufgaben in Libri's genanntem Werke abgedruckt.

Die nächste Anwendung der Algebra auf die Geometrie scheint Nicolaus Tartaglia gemacht zu haben. Als nämlich Scipio Ferro aus Bologna die Auflösung der Gleichungen III. Grades und zwar des speziellen Falles $x^3 + mx = n$ (capitulum cubi et rerum aequalium numero) entdeckt und diese Entdeckung dem Antonio Fiore mitgetheilt hatte, schlug letzterer verschiedenen Geometern die Lösung einiger Aufgaben vor. Dasselbe System befolgte ein gewisser Tonini da Coi oder da Colla, welcher seinen Fachgenossen schwierige Probleme vorlegte, die er selbst nicht lösen konnte.

1) Hankel a. a. O. Seite 351.

2) A. a. O. Seite 343.

Tartaglia setzte seinen ganzen Eifer daran, um diese beiden Mathematiker, welche er als Prahler bezeichnete, zu bekämpfen,[1] und es gelang ihm dies vollständig. Tartaglia hat uns über seine Auflösungsart nichts hinterlassen, doch sagt er, zur Entdeckung der Auflösungsformeln für die Gleichungen des III. Grades durch die Zuhilfenahme geometrischer Construktionen gelangt zu sein.

Auch Cardani gibt geometrische Beweise als Grundlage der Auflösung der Gleichungen ein.[2] So hat er z. B. den Fall $x^2 + 6x = 91$ geometrisch gelöst und die eine Wurzel der Gleichung $x = s$ ganz richtig gefunden.[3]

Die Entdeckung des Cardani über die mehrfachen Wurzeln der Gleichungen — wenn sie ihm angehört —, sowie die Entdeckung der + und — Zeichen derselben, war von grosser Bedeutung für die spätere Entwickelung der analytischen Geometrie, worauf wir im übrigen noch zurückkommen werden.[4] Auch Bombelli hat sich damit beschäftigt, seine Gleichungen geometrisch zu construiren.

Wir gelangen endlich zu François Viète, dem Begründer der logistica speciosa (aus Fontenay in Frankreich 1540 gebürtig). Indem wir seine Verdienste um die Algebra und um die Lösung der höheren Gleichungen übergehen, heben wir nur dasjenige hervor, was zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie direkten Bezug hat. Dazu gehört vor Allem die

1) Näheres in Hankel. 360 u. ff. — Vergleiche auch Libri's Histoire etc.; — Bossut übersetzt von Fontana. Saggio sulla storia generale delle Matematiche. Seite 72 u. ff.

2) Wir können uns hier über den Streit des Cardan und des Tartaglia nicht einlassen, glauben aber denselben nicht ganz unerwähnt lassen zu können, da die Vermuthung nahe liegt, Cardan habe auch die geometrische Construktion dem Tartaglia entlockt.

3) Sutter, Geschichte der Math. Bd. I pag. 164.

4) Es ist, wie wir sagten, nicht unsere Sache zu untersuchen, ob dem Tartaglia oder dem Cardan diese Verdienste zukommen. Es genügt uns, nur jene Entdeckungen hervorzuheben, welche Ghetaldi und Cartesius zur Verfügung hatten. Ueber die Entdeckung der $\pm$ Zeichen derW urzeln äussern sich: Montucla. Hist. des sciences mathem. Bd. 1. Seite 594—595: „Cette découverte, qui avec une autre de Viète est le fondement de toutes celles d'Harriot et de Descartes sur l'analyse des équations, cette découverte dis-je, est clairement contenue dans son ars magna.

Libri fügt hinzu Bd. 3. Seite 173 „Sa construction, de l'équation général de 3. degré mérite d'être remarquée, car elle renforme la première idée de la représentation générale du rapport qui existe entre deux quantités, par le rapport qui tient les abscisses et les ordonnées dans une courbe quelconque. Dagegen macht Hankel Seite 371 darauf aufmerksam, dass Cardan die selbständige Bedeutung negativer Wurzeln durchaus nicht gekannt habe.

Zurückführung der Gleichungen auf Proportionen. Die Gleichung $x^2 + bx = c^2$ verwandelte er in die Proportion $x : c = c : x + b$; dadurch ist eine algebraische Aufgabe in eine geometrische verwandelt, indem es sich gegenwärtig nur um die Bestimmung einer der äusseren von drei Proportionallinien handelt, von welchen die mittlere und die Differenz der äussern ($b = [x + b] - x$) gegeben ist. Ein ähnliches Verfahren wendet er auch auf die Gleichungen des III. Grades an, wobei er Beziehungen zwischen der Construktion dieser letzteren und der Auflösung der beiden alten Probleme, der Verdoppelung des Würfels und der Dreitheilung des Winkels fand.[1])

Diese Anwendung der Algebra auf die Geometrie unterscheidet sich wesentlich von den Leistungen Tartaglia's und Cardan's, indem wir hier zum ersten Mal die Algebra speciosa eine Rolle spielen sehen. Die Vorgänger Viète's gaben den zur Lösung des Problemes nöthigen Linien Zahlenwerthe und begnügten sich mit der Auffindung des Zahlenwerthes der Unbekannten. Keiner von ihnen dachte aber an eine vollständige geometrische Construktion des Problems, worin eine allgemeine Lösung enthalten worden wäre. Viète starb 1602 zu Paris. 16 Jahre nach dem Tode Viète's schrieb der italienische Mathematiker Cataldi sein Werk, Algebra discorsiva numerale et lineare, Bologna 1618, wovon der III. Theil den Titel führt: Algebra lineale o geometrica, aggiunta nella quale nelle operationi algebratiche invece del' operare con i numeri, si adoprano le linee. In diesem Abschnitt wird die allgemeine geometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^2 + ax = b$; $x^2 = ax + b$ und $x^2 + b = ax$ gegeben.[2])

## V.

So haben wir in rascher Folge die Geschichte der Mathematik durchblickt, und indem wir jene Momente derselben, welche sich auf die Entwickelung der analytischen Geometrie und auf die Anwendung der Algebra auf die Geometrie beziehen, hervorgehoben haben, sind wir endlich zu unserem Ghetaldi gelangt, dem wir nun einige Zeilen zu widmen haben.

Ghetaldi war, wie wir sahen, ein eifriger Pfleger der Mathematik. Der damaligen Sitte folgend, machte er sich in seinen Jugendjahren auf Reisen um seine Kenntnisse zu erweitern und um die Bekanntschaft der damaligen ersten Universitäten zu machen. Erst in seinen letzten Lebensjahren, jedoch noch im frischen Mannesalter, machte er sich daran, sein Werk „de reso-

1) Montucla a. a. O. Seite 605 u. ff.
2) Libri a. a. O. Bd. 4. Seite 95.

lutione etc." zu verfassen; der frühe Tod machte seinem Lebensgang ein Ende und so konnte er nicht einmal die Drucklegung des bereits begonnenen Werkes erleben. Alle seine Werke beweisen uns zur Genüge, dass er sich vorzüglich nur mit der Geometrie beschäftigte, während er die Algebra, auf literarischem Gebiet wenigstens, gar nicht cultivirte. Wir bemerken ferner, dass zur Zeit seiner Abwesenheit aus dem elterlichen Hause, er in erster Linie die Geometrie der Alten pflegte, dass er bemüht war, die Werke der Alten für sich und für seine Zeitgenossen zu restauriren, Verdienste, die allerdings Berücksichtigung verdienen. Auf seinen Reisen und während seines Aufenthaltes auf den verschiedenen Universitäten muss er aber jedenfalls über die Leistungen der Analysten vollständig in Kenntniss gesetzt worden sein, ja wir sehen aus der Vorrede zu seinem Werke „de resolutione" und aus seiner Vertheidigung gegen die Angriffe des Cyriacus, dass er sogar zu den persönlichen Freunden Viète's gehörte. So äussert sich Ghetaldi auf Seite 48 des mehrmals genannten Buches:

„Idem vitium non accuratae demonstrationis notat Cyriacus in Problemate secundo Francisci Vietae in Apendicula prima ad Apollonium Gallum etc.... Verum cum ipse quoque moleste ferrem, quod tanti viri laudes, non sine aliqua temeritatis nota, ut leuissime dicam, Cyriacus ausus sit imminuere, non possum non ostendere, quam longe absit a vero in suis animaduersionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc a me postulat singularis quidam meus in Vietam amor, atque obseruantia, atque adeo arctissima amicitiae, coniunctionsique necessitudo, quae mihi cum illo Parisijs intercessit, mutuis officijs confirmata. huc accedit, quod cum Cyriacus in uno, eodemque libello, et Vietam, et me de non accurata demonstratione accusauerit, inofficiosus essem, si omissa amici causa meam tantum defenderem.

Ein gelehrter Mann wie Ghetaldi muss also, wie wir eben sagten, von den Leistungen Tartâglia's, Cardan's etc. wohlunterrichtet gewesen sein und da er zuerst Schüler und dann Freund des Viète war, hat er auch die Verwandlung der Gleichungen in Proportionen und somit ihre Auflösung durch geometrische Construktionen bereits in Paris erlernt. Hat er auch die Schriften *Cataldi's* in Händen gehabt oder von denselben, beziehungsweise von der geometrischen Construktion seiner Gleichungen nur Kunde erhalten, so blieb ihm nur wenig zu thun, um sein Werk zusammenzustellen. Wir brauchen also nicht speciell hervorzuheben, dass Ghetaldi weit nicht derjenige war, welcher die Algebra zum ersten Mal auf die Geometrie angewandt hat, dass somit die vielen von uns angeführten Historiker sich in der Beurtheilung seines Werkes bedeutend geirrt haben. Aber dessenungeachtet gebührt dem Ghetaldi eine ehrenvolle Stelle in der Geschichte der Mathematik, und wir glauben nicht zu übertreiben, wenn wir die Ver-

fassung jenes Werkes als eine besondere Leistung hervorheben. Worin bestehen also die Verdienste des Ghetaldi und welchen Werth kann man seiner letzten Leistung zuschreiben? Wir glauben berechtigt zu sein, wie folgt zu schliessen und zu urtheilen. Als Mann der Wissenschaft und von eminent-mathematischen Talenten begabt, begriff Ghetaldi sofort, dass der Mathematik neue Bahnen eröffnet waren. In seine Heimath zurückgekehrt, scheint er die gesammelten Erfahrungen sozusagen geordnet, und dadurch erkannt zu haben, dass die Anwendung der Algebra auf die Geometrie als die Pforte eines neuen Weges zu betrachten sei. Er muss begriffen haben, dass die Verschmelzung beider Gegenstände zu einer einzigen Wissenschaft reiche Früchte tragen müsste, er hat vielleicht geahnt, dass diese neue Methode das ganze bisherige System der Mathematik umwälzen wird. Denn hätte er nicht ähnliche Gedanken gehabt, so würde er es vorgezogen haben, die vor ihm bereits betreten gewesene Bahn noch weiter zu verfolgen, um sich durch neue Entdeckungen Ruhm zu verschaffen. Er hat aber vorgezogen, das bereits erkämpfte Wissen zu ordnen, systematisch zu regeln, und durch zweckmässige Behandlung populär zu machen. Sein Werk trägt den Charakter eines förmlichen Lehrbuches vollständig an sich. Aber auch in wissenschaftlich-meritorischer Beziehung unterscheidet sich Ghetaldi durch seine „de Resolutione“ von allen seinen Vorgängern wesentlich. Denn bisher war die Anwendung der Algebra auf die Geometrie rein nur ein Mittel zum Zweck; man bediente sich der geometrischen Construktion um bei der Lösung der höheren Gleichungen eher zum Ziel zu gelangen, ohne jedoch dieser Verschmelzung der Algebra mit der Geometrie eine weitere Wichtigkeit beizulegen, und auch ohne daran zu denken, diese Methode systematisch für weitere Zwecke in Aussicht zu nehmen. Man bediente sich der geometrischen Construktion eben nur im Falle der Noth, und man construirte mit ihrer Hilfe die Gleichungen des III. Grades ohne zu denken, dass auf gleiche Art jede andere arithmetische Aufgabe lösbar sein müsste. Und diese Verdienste sind eben dem Ghetaldi einzig und allein zuzuschreiben. Indem er von der Summe und Differenz ausgegangen ist, hat er die Gleichungen des ersten und zweiten Grades in geregelter Folge behandelt und systematisch dargestellt. Mit wenigen Worten, Ghetaldi hat die Anwendung der Algebra auf die Geometrie als Gegenstand eines besonderen Studiums angesehen und die Bahn verzeichnet, welche seine Nachfolger zu verfolgen hatten. Die ersten Bücher der Geometrie des Descartes, welche im übrigen um volle sechs Jahre später als die Geometrie des Ghetaldi erschienen ist, enthalten somit durchaus nichts Neues, sondern nur dasjenige, worüber Ghetaldi schon geschrieben hatte. Wir bedauern, dass das Werk des Ghetaldi älteren bedeutenden Historikern, wie einem Montucla, so gänzlich unbekannt war;

doch ebenso unbegreiflich erscheint uns die Thatsache, dass selbst ganz moderne Geschichtsschreiber wie Sutter, unseren Mathematiker so gänzlich ignoriren.

Da wir den Inhalt des Ghetaldischen Werkes ziemlich ausführlich gegeben haben, so halten wir eine nähere Discussion desselben für überflüssig. Nur hätten wir noch beizufügen, dass Kästner's Bemerkung: „Ghetaldi habe das Verfahren der Alten befolgt“ sich nur auf den Umstand basirt, dass jeder analytischen Lösung auch synthetische Beweise folgen.

Ghetaldi hat auch die Gleichungen des IV. Grades nicht gelöst, wie mancher Historiker behauptet. Der Fall, welcher sich darauf bezieht, wird zu den Aufgaben gezählt „quae sub Algebram non cadunt.“ Sehr beachtenswerth scheint uns der Umstand zu sein, dass Ghetaldi die Archimedische Aufgabe, wovon Vitruvius lib. 9. Cap. 3 berichtet, so wie Aufgaben aus der Progressionslehre geometrisch löst. Die letzten Aufgaben des Ghetaldi, worüber er sich ausdrückt: quae sub algebram non cadunt, eaquae resolvam, et componam, methodo, qua veteres in resolvendis et componendis omnibus Problematibus utebantur, wären alle sehr leicht durch die Trigonometrie zu lösen gewesen.

Doch schon Kästner hat den Ghetaldi hierüber gerechtfertigt, indem er sagte, dass „zu seiner Zeit waren Vergleichungen zwischen trigonometrischen Linien die einem Winkel gehören und Seiten des Dreiecks nicht gewöhnlich, was sich also durch solche Vergleichungen ausdrücken liess, fiel nicht unter seine Algebra. Nach der strengen Bedeutung von algebraisch hatte er recht, weil trigonometrische Funktionen zu transcendenten Ausdrücken führen.“

## VI.

Da uns unsere Leser geduldig bis hierher gefolgt sind, wollen wir noch einige Worte dem grossen Mathematiker Descartes widmen.

Wenn Wallis seinem Landsmann Harriot übertriebene Verdienste zugeschrieben hat, so ermangelte anderseits Montucla nicht, ihm — wenn wir uns so ausdrücken dürfen — die Leviten dafür zu lesen. Hat aber Wallis übertrieben, so war Montucla seinen Landsleuten Viète und Descartes gegenüber, jedenfalls auch nicht wortkarg. Merkwürdigerweise macht man dem Descartes soviele Vorwürfe, dass sich Monti veranlasst sah von ihm zu sagen, dem bekannten Spruch: benignum est et plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris, niemals gefolgt zu sein. So sind mehrere Gelehrte über ihn indignirt, da er sich Entdeckungen über den Regenbogen zuschreibt, die schon vor ihm durch den dalmatinischen Prima, Erzbischof de Dominis gemacht wurden. Auch der Satz seiner Optik „Nempe est in

refractione: ut sinus anguli inclinationis unus ad sinum anguli inclinationis alterius, ita sinus anguli refracti in una inclinatione ad sinum anguli refracti in altera — scheint nicht sein Eigenthum zu sein. Nach mehreren geschichtlichen Thatsachen scheint es nämlich, dass Willibrord Snellius, ein holländischer Mathematiker, welcher 1590—1626 gelebt, der Entdecker des Brechungsgesetzes sei. Snellius soll das Gesetz in anderer Form als in jener $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ = constant, in einer Optik niedergeschrieben haben, welche seines frühen Todes wegen nicht herausgegeben werden konnte. Vossius und Huyghens versichern, dass sie den Satz des Snellius mit eigenen Augen gesehen hatten. Arago will diese Ehre unbestritten seinem grossen Landsmann überlassen. Thatsache ist es, dass Hortensius, ein Freund des Snellius, das Brechungsgesetz an der Universität öffentlich lehrte. Descartes lebte nun viele Jahre in Holland und war u. A. auch mit Huyghens Vater sehr gut bekannt, in dessen Haus er den Gelehrten Hollands begegnete.[1])

Zur Geometrie des Descartes zurückkehrend müssen wir vor Allem gestehen, dass dem grossen französischen Mathematiker und Philosophen unbestritten die grosse Ehre zukommt, die Coordinatengeometrie der Curven begründet, entdeckt und in sichere Bahnen geleitet zu haben. Ob er Oresme's Leistungen gekannt habe oder nicht, sind wir nicht im Stande zu beurtheilen, dass an der Kölner Universität die Vorlesungen de latitudinibus schon lange vor Descartes gehalten wurden, haben wir bereits gesehen. Auch haben wir auf Curtze's Schrift basirt hervorgehoben, dass sich die Werke Oresme's bis weit in dem XVI. Jahrh. verpflanzt haben. Ist das Princip de *latitudinibus* auch in Holland und Frankreich zur Vorlesung gelangt, und hat sich diese Sitte noch im XVI. und XVII. Jahrh. erhalten, dann muss allerdings vorausgesetzt werden, dass Cartesius hievon Kunde hatte. Jedenfalls war ihm von grossem Nutzen die Vervollkommnung der Analysis, vorzüglich die Kenntniss der mehrfachen Wurzeln, der Gleichungen und ihrer positiven und negativen Bedeutung. Es schmälern unsere Aeusserungen und Vermuthungen nicht im geringsten die grossen Verdienste des Franzosen, da er jedenfalls die Curven zum ersten Mal den Gesetzen der Analysis unterwarf, sie mit dem Coordinatenprincip in Verbindung brachte, wodurch er so eigentlich die analytische Geometrie begründet hat. Er ist ausserdem bei diesem ersten Schritt nicht stehen geblieben, er hat aber die Curven untersucht, ihre Tangenten construirt etc. etc.

Weder Descartes noch seine Vorgänger ahnten aber, dass die ersten Begründer der analytischen Geometrie die Araber waren, da es gar nicht möglich ist vorauszusetzen, dass Descartes über die Leistungen der Araber

1) Bruhns. Astronomische Strahlenbrechung.

Kenntniss hatte. Aus diesem Grunde machten wir auch keine Erwähnung der letzteren. Zur Vervollständigung unserer Arbeit sei nur ganz kurz erwähnt, dass die Araber ihre Aufgaben über die Kegelschnitte schon um 6 Jahrhunderte vor Descartes durch Anwendung der Coordinatengeometrie lösten.

Wir sind zum Schluss unseres Elaborates gelangt. Uns lag durchaus nicht die Absicht zu Grunde die Verdienste des Descartes zu schmälern. Wir haben nur versucht, jene Entdeckungen hervorzuheben, welche ihm zu seiner Leistung behilflich sein konnten. Was unseren Ghetaldi aber anbelangt, glauben wir nachgewiesen zu haben, dass er schon vor Descartes die Algebra auf die Geometrie in systematisch geordneter Folge anwendete, wodurch der I. Theil der Descarte'schen Geometrie eine Errungenschaft des Ragusäer Patriziers war. Das Coordinatenprincip scheint dem Ghetaldi ganz fremd gewesen zu sein. Ghetaldi verdient immerhin durch sein Werk besondere Berücksichtigung und es gebührt ihm, wie wir sagten, eine ehrenvolle Stelle in der Geschichte der Mathematik. Wir wollen Wiederholungen vermeiden, weshalb wir nicht nochmals die Bedeutung seines Werkes, so wie wir urtheilen zu können glaubten, anführen, hoffen aber, dass die zukünftige mathematisch-historische Literatur den bedeutenden Mann aus Ragusa zum mindesten anführen wird — anderseits wünschen wir jene Uebertreibungen, wovon wir viele Beispiele geliefert haben, und welche sich bis in unsere Tage verschleppten, eliminirt zu sehen.

# DESCARTES

UND DAS

# BRECHUNGSGESETZ DES LICHTES.

VON

DR. P. KRAMER
IN HALLE A. D. S.

Ob Descartes das Brechungsgesetz des Lichtes selbstständig gefunden habe oder nicht, war eine Frage, die seiner Zeit die Geschichtsschreiber der Physik lebhaft beschäftigt hat, die aber heute, wie es scheint, für eine erledigte gilt. Wohin man sich wendet, begegnet man entweder der einfachen Angabe, dass das berühmte Gesetz dem Holländer Willebrord Snell verdankt wird, was ja auch dem Thatbestande gewiss entspricht, oder der vollständigeren, dass Snell es zwar entdeckt, Descartes aber zuerst veröffentlicht habe. So erscheint Descartes erst an zweiter Stelle. Die historische Forschung hat sich damit gegen ihn als selbstständigen Entdecker des für die Dioptrik grundlegenden Gesetzes entschieden. Indess trifft man auch immer wieder die mehr oder weniger offen ausgesprochene Vermuthung, dass er sich wider besseres Wissen für den Entdecker jenes Gesetzes ausgegeben und den Namen des holländischen Gelehrten absichtlich verschwiegen habe. Am schärfsten spricht sie noch zuletzt Poggendorff in seinen Vorlesungen über die Geschichte der Physik aus und zwar so scharf, dass man unmittelbar dadurch angeregt wird, nochmals zu den Quellen aufzusteigen, um zu prüfen, wie es denn mit den Akten dieser grossen Streitfrage eigentlich bestellt ist. Finden sich dabei wichtige Momente bisher ausser Acht gelassen, so mag darin eine Rechtfertigung dafür liegen, dass, trotz der scheinbaren Erledigung der ganzen Sache, diese im Nachfolgenden noch einmal zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht worden ist.

Descartes erscheint bei Poggendorff in keinem günstigen Lichte. Er wird zwar geschildert als ein Mann von ausgezeichneten Gaben und grosser Beweglichkeit des Geistes, aber „voll brennenden Ehrgeizes in der Wissenschaft zu glänzen [1]), dabei auch von sehr reizbarem Gemüth und etwas zweifelhaftem Charakter, Eigenschaften, die ihn in mannigfache Streitigkeiten mit seinen Zeitgenossen verwickelten." Nach einer solchen allgemeinen Charakteristik wird man denn auch nicht durch die Darstellung überrascht, welche Poggendorff seinem Verhalten in Sachen des Brechungsgesetzes zu Theil werden lässt. Nachdem er nämlich, wie billig, des Descartes Bedeutung für die Erkenntniss des Regenbogens, namentlich der Grösse der Kreisöffnung desselben hervorgehoben, fährt er folgendermassen fort:

„Leider ist hier aber sein Verdienst mit einem Makel behaftet, von

dem ihn selbst seine eifrigsten Vertheidiger nicht haben rein waschen können. Jener Theil der Theorie ist nämlich nicht zu geben ohne Kenntniss des Gesetzes von der Brechung des Lichtes, dass beim Uebergang des Lichtes von einem Mittel in ein anderes die Sinus der Winkel, welche die einfallenden und gebrochenen Strahlen mit dem Loth auf der Trennungsfläche machen, in einem constanten Verhältniss stehen. Dieses Gesetz giebt nun Descartes in seiner Dioptrik und zwar als sein Eigenthum ohne zu erwähnen, dass der bereits 1626 verstorbene Prof. Snell in Leyden dasselbe aufgefunden hatte." „Snellius stellte dieses Gesetz $\left(n = \frac{\text{cosec } r}{\text{cosec } i}\right)$ auf in einem Werke, das leider nicht das Licht der Welt erblickte, wodurch er beinahe um die Ehre der Entdeckung gekommen wäre, denn Descartes, der es kennen lernte und es 1637 in seiner Dioptrik veröffentlichte, galt lange Zeit als Entdecker desselben. Allein Isaak Voss (Vossius geb. 1618 zu Leyden und gest. 1689 als Kanonikus zu Windsor), der gelehrte Kritiker, und Chr. Huyghens, der berühmte Physiker, die beide das Snell'sche Werk im Manuscript gesehen haben, sprechen ohne Rückhalt den Verdacht aus, dass Descartes das Werk gekannt habe, was schon dadurch sehr wahrscheinlich wird, dass Descartes über 20 Jahre in Holland lebte und unter den Gelehrten dieses Landes viele Freunde und Bekannte zählte. Dazu kommt, dass Descartes so gut wie niemals seine Quellen nennt (eine Sünde, die sich bis auf den heutigen Tag unter seinen Landsleuten vererbt zu haben scheint) und unter Anderm in seinen philosophischen Prinzipien eine Ansicht vom Weltgebäude ausspricht, die fast wörtlich bei Giordano Bruno zu finden ist. Es unterliegt somit kaum einem Zweifel, dass Descartes das Gesetz gekannt und keinen Antheil an der Entdeckung desselben hat. Er führt auch keinen Versuch an, wodurch er es gefunden; indess bleibt ihm doch das Verdienst, dass er dasselbe zuerst in der einfacheren Form aussprach, in der es gegenwärtig gebraucht wird. Statt nämlich zu sagen, die Cosecanten stehen in einem constanten Verhältniss, wie Snell gethan, sagte er, die Sinus dieser Winkel stehen darin. Es ist ja auch $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, daher $n = \frac{\sin i}{\sin r}$."

„Diese Form war gerechtfertigt durch eine Erklärung, die er von der Entstehung des Brechungsgesetzes gab, eine Erklärung, die, wenn sie auch einwurfsfähig ist, doch als erster Versuch zum tieferen Eindringen in die Vorgänge beim Licht, alle Anerkennung verdient und sicher den späteren vollkommeneren Theorien vorgearbeitet hat. Sie hängt überdies so innig mit seinen Ideen über das Wesen des Lichtes zusammen, dass seine Gegner, glaube ich, ihm Unrecht thun, wenn sie behaupten, Descartes habe diese

Erklärung blos ersonnen, um sein Plagiat zu bemänteln.“ (Pogg. Vorles. S. 310—312.)

Es muss, das geben wir zu, als eine ganz natürliche Erscheinung angesehen werden, dass man um die Mitte und den Schluss des siebzehnten Jahrhunderts Descartes nur für den Veröffentlicher des von Snell gefundenen Gesetzes hielt, ja sogar, dass Manche glauben konnten, er habe aus übergrossem Ehrgeiz die Gelegenheit benutzt, sich als Entdecker desselben auszugeben.

Willebrord Snell, einer der grössten Gelehrten, welche die Universität Leyden jemals besessen hat, sprach nach zahlreichen mühevollen Messungen endlich das Brechungsgesetz des Lichtes aus, aber in einer Form, die noch durchaus nicht die spätere, jetzt allgemein gebräuchliche, von Descartes gefundene, Gestalt desselben verrieth. Er legte seine grossartige Entdeckung, deren Tragweite er nach Huyghens Ausspruch kaum selbst übersah, in einem Werke nieder, bei dessen Vollendung ihn der Tod überraschte. Seine Schüler und Verehrer lehren den wesentlichen Inhalt desselben, doch dringt die Kunde von dem neuen Gesetz nur wenig über die Gränzen der Städte, in welchen sie leben. Da erscheint 1637 die Dioptrik des Descartes. Descartes thut des Holländers Snell keine Erwähnung, aber sein Brechungsgesetz ist auf das des Snell zurückführbar. Sicher! Er hat dessen Entdeckung gekannt, da er doch so lange bereits in Holland lebte. Wie wäre es möglich, elf Jahre nach dem Tode des Entdeckers dort noch nicht um das Gesetz zu wissen? Isaak Voss, ein heftiger Gegner des Descartes, spricht es, nachdem er das Manuscript des Snell eingesehen und durchblättert hat, 1663, also mehr als 12 Jahre nach des Descartes Tode zum ersten Male als selbstverständlich aus, dass er dies für die Dioptrik grundlegende Gesetz nur von Snell entnommen haben könne[2]). Für Descartes tritt merkwürdigerweise Niemand ein, und so steht es denn bald fest, er sei ein Fälscher, ein unlauterer Mensch, ein eigennütziger Verkleinerer des berühmten frühverstorbenen Willebrord Snellius.

Man muss es wie gesagt zugeben, es war natürlich, dass sich diese Sache so entwickelte, und ebenso natürlich geht sie weiter fort. Chr. Huyghens war am Ende des siebzehnten Jahrhunderts so glücklich, als letzter authentischer Zeuge Snell's Handschrift zu sehen. Er erfährt auf irgend eine Weise von irgend Jemand, denn die Augen- und Ohrenzeugen sind längst todt, dass auch Descartes die Handschrift gesehen habe. Auch er bestätigt es wie alle Welt, dass das Descartes'sche Gesetz mit dem Snell'schen identisch ist und vermag sich nun der Ueberzeugung nicht länger zu verschliessen, dass hier ein direkter Zusammenhang zwischen den Ergebnissen beider Männer obwaltet[3]). Allerdings lässt er die Möglichkeit

durchblicken, dass es sich auch anders verhalten könne, ohne ihr jedoch viel Gewicht beizulegen.

Die Urtheile des Voss und Huyghens sind nun die Fundamente, worauf sich später die historische Darstellung aufbaut, welche noch gestützt wird durch ein Zeugniss Leibnitzens in den „acta eruditorum“ vom Jahre 1682[4]). Leibnitz hatte mit Hülfe der Infinitesimal-Rechnung das Brechungsgesetz neu bewiesen und benutzte gerade wie Descartes dazu die verschiedenen Geschwindigkeiten des Lichtes in den verschiedenen optischen Medien. Er glaubte nun, Snell habe etwa auf einem ähnlichen Wege, wie er selbst, sein Gesetz gefunden und war wie andere vor ihm überrascht, auf die Form, wie Descartes sie gab, zu stossen. Er spricht nun zwar selbst kein direktes Urtheil gegen letzteren aus, stützt sich aber auf Spleissius[5]), welcher ganz auf des Voss Seite tritt.

Ueberblickt man die Gründe, welche für die Unredlichkeit des Descartes von Voss, Huyghens und Leibnitz angegeben werden, so wird es keinem entgehen, dass Poggendorff's Ausführungen ein fast wortgetreuer Nachklang dieser aus dem siebzehnten Jahrhundert auf uns gekommenen Urtheile sind und dass alle Unwahrscheinlichkeiten, welche diesen anhaften, in jene herübergenommen wurden. Doch nicht Poggendorff allein begiebt sich vollständig unter die unbedingte Abhängigkeit von diesen älteren Autoren, so thaten vielmehr fast alle, welche dieser Angelegenheit ihre Aufmerksamkeit zuwandten, so dass es schwer hält zu entscheiden, wen Poggendorff wohl im Sinne hatte, wenn er von „eifrigsten Vertheidigern“ des Descartes spricht; denn Autoren wie Millet[6]), der zwar sehr entschieden für Descartes Partei ergreift, aber seine Ansicht durch ausführliche Gründe zu stützen nicht unternimmt, wird er kaum gemeint haben können. Die bedeutenderen geschichtlichen Darstellungen weichen nicht viel von einander ab. Man blättere in Priestley's Geschichte der Optik[7]) (1772) und man wird dort die heute allgemein verbreitete Meinung vorfinden, so wie in der Uebersetzung seines Werkes von Klügel[8]). J. C. Fischer[9]) hält sich in seiner Geschichte der Physik zwar sehr objektiv, aber das Gesammtresultat seiner Untersuchungen ist doch auch kein anderes, als dass Descartes sein Gesetz wohl aus Snell's Werk genommen habe, gerade wie es auch Wilde[10]) in seiner Geschichte der Optik ausspricht, welcher selbst nicht auf die Quellen in Descartes Schriften zurückgegangen ist, und seinerseits wieder Poggendorff als letzte Quelle gedient zu haben scheint.

Bei weitem selbstständiger stehen der vorliegenden Streitfrage, wie es auch schon die ausführlichere Behandlung des Gegenstandes bei ihnen vermuthen lässt, Delambre und Montucla gegenüber. Delambre widmet der Sache des Descartes ein bedeutendes Interesse und führt mit Sachkennt-

niss, wenn auch nur mit unvollständiger Verwerthung seiner Schriften die Frage durch, wie er sich zu Snell's Entdeckung verhält. Wie es bei gerechter Beurtheilung nicht anders möglich ist und wie es der holländische Geschichtsschreiber der Universität Leyden, von Kampen[11]), ebenfalls thut, spricht er es aus, dass alle jene von Voss und Huyghens hervorgehobenen Momente zwar den Schein des Fälschers auf Descartes wälzen, dass es aber sehr wohl möglich sei, Descartes habe durch eigene Arbeit das merkwürdige Gesetz gefunden und habe ein Recht ebensogut wie Snell für den Entdecker desselben gehalten zu werden[12]). Hiernach gewinnt es zuerst den Anschein, als wollte Delambre für Descartes eintreten, aber im weiteren Verlaufe seiner Darstellung lässt er es bald sehr deutlich durchschimmern, dass er keine Lanze für seinen Landsmann zu brechen habe. Er neigt sich immer mehr der Ansicht der Gegner des Descartes zu und endigt damit, dass er sich den Anklägern desselben, wenn auch ungern, anschliessen müsse. Im Ganzen und Grossen ist diese Wendung trotz alledem nicht zu verwundern, denn Delambre nimmt auf sorgfältige Zeitbestimmungen bei Beurtheilung der in Rede stehenden Aktenstücke nur geringe Rücksicht und benutzt die vorhandenen Dokumente nur zum Theil. So legt er jenem merkwürdigen Briefe des Descartes an einen Ungenannten, Ep. pars II. ep. 70, in welchem ein Instrument zur Bestimmung des Brechungswinkels beschrieben wird, eine entscheidende Bedeutung bei, um daraus Schlüsse zu Ungunsten des Descartes zu ziehen, während dieser Brief doch gänzlich zurücktritt gegen eine ganze Anzahl anderer Briefe und die im zehnten Kapitel der Dioptrik erwähnten Mittel den Brechungsexponenten zu bestimmen, welche beweisen, dass Descartes bereits vor seiner Uebersiedelung nach Holland das Brechungsgesetz kannte. Auch dem Umstande, dessen Delambre Erwähnung thut[13]) und welcher von ihm verhältnissmässig stark betont wird, dass nämlich das von ihm benutzte Exemplar der Briefe des Descartes die vermuthliche Mittelsperson zwischen Snell und Descartes aufbewahrt habe, kann eine Bedeutung nicht beigemessen werden. Wenn eine Randbemerkung dieses Exemplars zu dem oben erwähnten 70. Briefe des zweiten Theils der Briefe aussagt, dass ein gewisser Golius, Professor in Leyden, der Empfänger dieses im Jahre 1632 geschriebenen Briefes gewesen sei, so liegt durchaus kein Grund vor zu vermuthen, dass Golius dem Descartes das Snell'sche Gesetz mitgetheilt und dafür gewissermassen zum Dank von Descartes die Beschreibung eines zum Ablesen des Brechungsindex bequemen Instruments erhalten habe. Es ist gar nicht mehr zu bestimmen, aus welcher Zeit und von wem jene Randbemerkung herstammt[13]). Aber gesetzt den Fall, die Marginalnote wäre hinreichend alt, so würde es kaum möglich sein, daraus etwas anderes zu schliessen, als dass Des-

cartes und Golius sich über eine ihnen beiden bekannte Thatsache unterhalten haben. Wer von ihnen beiden sie zuerst gewusst hat, lässt sich aus dem Briefe selbst nicht im entferntesten entscheiden. Das Jahr 1632, welches in jener Randbemerkung als Abfassungsjahr dieses Briefes erwähnt wurde, mag zudem kaum zutreffen, wie sich mit ziemlicher Genauigkeit nachweisen lässt. In diesem Briefe wird nämlich ebenso wie in einem nach V. Cousins Angabe aus dem Jahre 1637 stammenden Briefe an Pollot ein Brennglas erwähnt, welches mit ganz besonderer Sorgfalt hergestellt worden war[14]. Im Jahre 1637 waren, wie aus jenem andern Briefe unmittelbar hervorgeht, acht oder neun Jahre nach der Herstellung desselben verflossen, also mag es um 1628 oder 1629 geschliffen worden sein. Im 70. Briefe ist nun erwähnt, dass er etwa 5 oder 6 Jahre nach der Herstellung dieses Glases geschrieben sei, er wird also von 1633 oder 1634 datirt werden müssen. Der in jener Marginalbemerkung angegebene Termin, das Jahr 1632, ist demnach wohl zu früh und so mag auch mit dem Namen Golius eine kaum hinreichend begründete Vermuthung zum Ausdruck gebracht worden sein. Dass Golius[15] aber gar dem Descartes das Snell'sche Gesetz mitgetheilt habe, muss als durchaus unhaltbar von der Hand gewiesen werden.

So wie Delambre behandelt auch Montucla den Streitpunkt mit gewissenhafter Vorsicht. Für ihn bleibt er unentschieden. Neue Momente zu seiner Lösung bringt er nicht bei und die bis zu seiner Zeit beachteten lassen, wie oben ausgeführt wurde, höchstens die Vermuthung aufkommen, dass ein mehr oder weniger direkter Zusammenhang zwischen Descartes und Snell bestanden habe. Er beachtet daher zwar diese Vermuthungen, setzt ihnen aber die, wie es scheint, aus tieferem Studium der Schriften des Descartes hervorgegangene Ueberzeugung entgegen, dass er die in den Anhängen des Discours sur la methode niedergelegten Entdeckungen schon Jahre vor der Veröffentlichung besessen habe[16]. Hier spricht sich Montucla fast in demselben Sinne aus wie später Millet, und es ist in der That sehr zu bedauern, dass weder der eine noch der andere die Gründe, welche sie zu der von der gewöhnlichen Meinung so verschiedenen Ansicht geführt haben, ausführlich dargelegt hat. Interesse für den französischen Landsmann allein ist es weder bei Montucla noch Millet gewesen, was sie veranlasst haben mag, für Descartes einzutreten, spricht sich doch sogar der bereits oben erwähnte von Kampen[11] nicht anders aus, der doch als Holländer gewiss keinen Grund gehabt haben wird, seinen Landsmann Snell gegen Descartes zurücktreten zu lassen; und auch Pfleiderer in seinen wenn auch überaus kurzen, aber sehr besonnenen Thesen nimmt entschieden für Descartes Partei[17]. Man kann sich auch in der That der Wahrheit dessen

nicht verschliessen, was Millet[18]) ausführt, dass es sich bei sorgfältiger Prüfung der Briefe des Descartes als völlig sicher ergiebt, Descartes sei längst im Besitze seiner optischen Entdeckungen gewesen, als er nach Holland übersiedelte. Dass diese Briefe, sowie die Methode den Brechungsindex zu bestimmen, wie sie im X. Buche der Dioptrik angegeben ist, bisher kaum ausgenutzt wurden, ist wenig erklärlich. Aber nur dadurch, dass dies unterblieb, lässt es sich begreifen, dass sich die einmal von Isaak Voss und Huyghens ausgesprochene Meinung so allgemein verbreiten konnte und nicht in Deutschland allein sondern auch in England, wie Whewell in seiner Geschichte der induktiven Wissenschaften beweist[19]). Bei diesem letzteren tritt sogar die Vermuthung, dass Descartes des Snellius Manuscript gesehen und benutzt habe, mit einer so naiven Sicherheit auf, dass jeder, welcher die Darlegung der in Rede stehenden Sache bei ihm liest, auch gar nicht einmal zu der Ueberzeugung gelangt, man habe es hier mit einer nur höchst unsicher beglaubigten Wahrscheinlichkeit zu thun. Nur in Frankreich[20]) sind immer und immer wieder Bemühungen zu verzeichnen, den nur schwach gestützten Beweisen für ein Plagiat entgegen zu treten, allerdings bis jetzt mit geringem Erfolge. Wie bereits bei Gelegenheit der Erwähnung von Millet's Schrift ausgesprochen wurde, liegt dieser Misserfolg in der kurzen Art, mit welcher hier, ohne dass die Gründe ausführlich angegeben wurden, die Streitfrage in einem anderen Sinne gelöst wird, als die in diesen Dingen massgebendsten Stimmen entschieden hatten.

Brechen wir hier die geschichtliche Besprechung ab und fassen die Einwürfe, welche man gegen die selbstständige Entdeckung des Lichtbrechungsgesetzes durch Descartes besonders erhoben hat, nun noch einmal abschliessend zusammen, so sind es, so viel ich sehe, folgende fünf, welche einer Berücksichtigung unterworfen werden müssen:

1) Descartes hat über 20 Jahre in Holland gelebt und besass unter den Gelehrten dieses Landes viel Freunde und Bekannte. (Voss. Poggendorff.)

2) Hortensius hat öffentlich und privatim die Entdeckung Snell's in in Holland gelehrt. (Voss.)

3) Descartes nennt so gut wie niemals seine Quellen. (Leibnitz-Poggendorff.)

4) Er führt keinen einzigen Versuch an, wodurch er sein Gesetz gefunden haben könnte. (Poggendorff.)

5) Er hat sich beim Beweise seines Brechungsgesetzes arg verwickelt. (Leibnitz.)

Wir werden am besten diesen Einwänden begegnen, wenn wir erstens so weit als möglich die Zeit festzusetzen unternehmen, in welcher Descartes

zuerst von seinem Brechungsgesetz Gebrauch machte; wenn wir sodann versuchen darzulegen, auf welchem Wege Descartes selbstständig und aus den ihm zugänglichen Gedankenkreise heraus sein Brechungsgesetz gefunden haben möchte, und wie dies ohne Versuche hat geschehen können; wenn wir endlich drittens prüfen, in wieweit sich Leibnitz mit seinem Vorwurf gegen den Beweis des Brechungsgesetzes, wie er im zweiten Kapitel der Dioptrik gegeben ist, im Rechte befindet.

## 1.

Verfolgen wir des Descartes Leben, so begegnen wir ihm in Holland zum ersten Male im Mai 1617. Er hat sich dem Heerlager des Herzogs Moritz von Oranien angeschlossen, der damals während des Waffenstillstands zwischen Spanien und Holland in der Festung Breda Hof hielt. Descartes bleibt bis zum Juli 1619 in Breda selbst, wo er bei dem regen Leben, welches die um den Herzog versammelten Ingenieure und Gelehrten in die Stadt brachten, seine Neigungen vollauf befriedigt fand. Während dieses Aufenthaltes lernte er unter Anderen den Mathematiker Beekmann kennen, mit Snell dagegen kam er, soviel bekannt, nicht in Berührung, da er Leyden nicht aufsuchte, wo jener lebte. Es wäre aber trotzdem, wenn Snell vor dem Juli 1619 das Lichtbrechungsgesetz gefunden und andern davon Kenntniss gegeben hatte, möglich gewesen, dass Descartes es erfahren haben könnte, und wir dürfen über diese Möglichkeit nicht mit Stillschweigen hinweggehen, wenn es auch wahrscheinlich ist, dass Snell sein Gesetz erst später entdeckt hat.

Nachdem Descartes den Dienst in dem holländischen Heere verlassen hatte, folgte er dem des Herzogs von Bayern nach Deutschland und Ungarn, gab aber 1621 das militärische Wanderleben auf und reiste über Norddeutschland und Holland nach Frankreich zurück. So sehen wir ihn zum zweiten Male Holland's Boden betreten. Er liess sich Anfang Dezember 1621 im Haag nieder, aber schon im Februar 1622 ist er auf dem Wege nach Rouen, um nun eine Reihe von Jahren in Frankreich zu bleiben. Diesmal ist er etwa zwei und einen halben Monat im Haag gewesen und wird, obwohl wir nichts davon wissen, mit den Gelehrten der nahegelegenen Universität Leyden in Berührung gekommen sein. Snell hatte damals, 1621, seinen Cyclometricus herausgegeben und arbeitete vermüthlich an dem im Jahre 1624 erschienenen Tiphys Batavus. Beide Schriften behandeln Gegenstände, die mit der Optik nichts zu schaffen haben, und so lässt sich vermuthen, dass er die optischen Studien erst in seinen letzten Lebensjahren energisch angegriffen haben wird, denn es erscheint nun kein Werk mehr bis zu seinem Tode, während sie früher schnell auf einander folgten.

Der zweite Aufenthalt des Descartes in Holland würde die zweite Gelegenheit geboten haben, das Snell'sche Gesetz kennen zu lernen, wenn Snell es bereits Ende 1621 formulirt hatte. P. Reis setzt nun dessen Entdeckung ins Jahr 1620,[21] jedoch ohne einen bestimmten Anhalt dazu zu haben, vielmehr nur nach Muthmassung. Whewell[19]) hat den Termin der Entdeckung ins Jahr 1621 gesetzt, aber ebenfalls nur nach allgemeiner Schätzung. Wir können beiden Zeitangaben kein Gewicht beilegen, da es keine Quellen dafür giebt, und ebenso wenig einer anderen, welche die Entdeckung ins Jahr 1625 setzt[22]).

Nachdem Descartes eine längere Reihe von Jahren in Frankreich gelebt hatte, siedelte er im März 1629 vollständig nach Holland über, wo er bis in die zweite Hälfte des Jahres 1649 blieb, um dann nach Schweden zu gehen, wo er 1650 starb.

Als er so zum dritten Male 1629 Holland aufsuchte, war das Snell'sche Brechungsgesetz gewiss schon mehrere Jahre hindurch bekannt, und es stand demnach nichts im Wege, dass er dasselbe erfahren konnte, da er in Holland viele Gelehrte zu Freunden hatte; obwohl er mit der überwiegenden Mehrzahl in keinem Verkehr stand.

Diesen letzten Aufenthalt haben nun offenbar Voss sowohl wie Leibnitz und Poggendorff im Auge, da sie sagen, dass er über zwanzig Jahre oder wenigstens sehr lange in Holland gelebt habe. Voss spricht es sogar deutlich genug aus, dass er nur diesen Aufenthalt meint. Er schreibt: „Nachdem er nach Holland übergesiedelt war[2]), habe er von dem Brechungsgesetz erfahren müssen.“ Hierin liegt das stillschweigende Zugeständniss, dass die früheren kürzeren Aufenthalte in Holland von Descartes wohl desshalb nicht hätten benutzt werden können, weil Snell weder vor 1619 noch vor 1622 sein Brechungsgesetz ausgesprochen habe, ein Zugeständniss, welches wir uns zunächst auch einfach aneignen können.

Gehen wir aber von dieser Voraussetzung aus, so kann man darthun, dass Descartes mit der vollen Kenntniss des Brechungsgesetzes nach Holland kam, und es fallen damit die Anklagepunkte 1 und 2 vollständig hin. Von besonderer Wichtigkeit sind nämlich für unsere Frage die Jahre 1627 und 1628. In diesen Jahren beschäftigt sich Descartes sehr eingehend mit der Herstellung von optischen Gläsern. Es lag überhaupt, nachdem durch die Erfindung der Ferngläser und Mikroskope alle Geister mächtig in Bewegung gerathen waren, in der Zeit, möglichst vollkommene Instrumente zu besitzen, und so sehen wir viele Männer theoretisch und praktisch thätig, um wirksame Brenngläser zu verfertigen, vor allen solche, welche sämmtliche auffallende Strahlen in einen einzigen Punkt zusammenbrechen, was bei Gläsern mit kugelförmig geschliffenen Flächen bekanntlich nicht der Fall ist

Kepler hatte die Abweichung wegen der Kugelgestalt bereits entdeckt und suchte ebenfalls schon nach der besten Form der Brenngläser oder Linsen, nach den anaklastischen Curven für solche Gläser, ohne jedoch Erfolg darin zu haben. Descartes studirte nun die Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel mit Rücksicht auf die Brechung und fand, dass sie die Strahlen, welche mit der grossen Axe parallel einfallen, nach dem von ihrem Ausgangspunkt abgewendeten Brennpunkte hin brechen, sobald die Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien diesseits und jenseits der Curven ein bestimmtes Verhältniss haben. Dieses Verhältniss fand er durch die grosse Axe und Excentricität jener Kegelschnitte fixirt. Um also Gläser zu erhalten, welche die gewünschte Eigenschaft haben, musste er dieses Grössenverhältniss der Hauptaxe zur doppelten Excentricität der Geschwindigkeit des Lichtes in Luft und Glas anpassen.

Dass dem Descartes unter Beihülfe des Mechanikers Ferrier bereits ums Jahr 1628 ein solches Glas ganz vorzüglich gelang[23]), ist nicht allein durch die Briefe des Descartes beglaubigt, sondern Poggendorff[24]) selbst führt es in seinen Vorlesungen an. Um ein solches schleifen zu können, waren aber nicht allein Maschinen und Vorübungen, sondern auch, und das ist das Wichtigste, Mittel nöthig, um die Grösse des theoretisch und allgemein gefundenen Brechungsexponenten für zwei bestimmte optische Medien, Luft und Glas, zu bestimmen. Dies glückte ihm mit Hülfe des im X. Kapitel der Dioptrik angegebenen Messlineals, dessen dort gegebene Beschreibung fast wörtlich mit den brieflichen Mittheilungen darüber aus dem Jahre 1629 übereinstimmt[25]). Um so zusammengesetzte Betrachtungen, wie sie dieses Messinstrument nöthig machte, durchzuführen, musste aber nothwendigerweise eine angemessene Zeit vergehen, und so werden wir nicht irren, wenn wir annehmen, dass Descartes bereits 1627 oder noch früher im Besitz aller zum Schliff brauchbarer elliptischer und hyperbolischer Gläser nothwendigen Hülfsmittel gewesen ist. Damit kommen wir dem Todesjahre Snell's 1626 so nahe, dass man versucht ist, die Beschäftigung beider Männer, Snell's und Descartes', mit den Brechungserscheinungen des Lichts für nahezu gleichzeitig zu halten, während beide räumlich weit von einander getrennt waren, auch einen unmittelbaren oder mittelbaren brieflichen Verkehr nicht hatten.

Aus alle dem geht hervor, dass Descartes bereits 1628 im vollen Besitz des Lichtbrechungsgesetzes gewesen ist, obwohl die Dioptrik erst 1637 heraus kam, dass er also vollkommen damit vertraut war, als er Holland zum dauernden Aufenthalt nahm, und dass ihm die ganzen 20 Jahre, die er dort verlebte, in diesem Punkte nichts mehr helfen konnten. Damit ist eigentlich auch der Punkt 2 erledigt, dass Hortensius ihm die

Kenntniss des Snell'schen Brechungsgesetzes vermittelt habe, indem wie Isaak Voss[2]) behauptet, Descartes durch dessen Vorträge die Hauptsache, die Verwendung von Strecken bei Aufstellung des Lichtbrechungsgesetzes, erfahren habe. Dem widerstreitet vor allem des Hortensius damals noch jugendliches Alter: er ist erst im Jahre 1605 geboren, war also, als Descartes zum zweiten Male im Winter 1621 auf 1622 Holland betrat, 16 bis 17 Jahre alt, und kann somit wohl kaum damals Vorträge über Snell's Dioptrik gehalten haben, vorausgesetzt, dass Snell zu jener Zeit bereits seinen Schülern und damit weiteren Kreisen, denn Hortensius war kein Schüler Snell's, das Brechungsgesetz mittheilen konnte. Im Jahre 1634 wird er Lehrer der Mathematik in Amsterdam, und hiermit lässt sich wohl vereinigen, dass Descartes, der sich später häufig in Amsterdam aufhielt, jetzt durch Hortensius Kunde von Snell's Entdeckung bekommen haben kann. Damals aber war, wie oben ausgeführt worden ist, Descartes längst im Besitze seines eigenen Brechungsgesetzes, und so konnte ihm Hortensius nichts Neues bieten, ja Descartes musste, wenn Hortensius die Snell'sche Fassung des Gesetzes vortrug, sich mit vollem Rechte sagen, dass die seinige bei weitem die bessere sei.

Fragt man, und das ist an dieser Stelle nothwendig, nach den hauptsächlichsten Quellen, auf welche man für richtige Beurtheilung der Beziehungen Descartes' zu Snell und seiner Entdeckung zurückgreifen muss, so ist ausser dem 70. und 81. Briefe des zweiten Buches besonders der ziemlich vollständige Briefwechsel zwischen Descartes und Ferrier zu erwähnen, welcher in den Briefen III, 79—83 vorliegt. Namentlich dürfte der 82. Brief eine besondere Bedeutung beanspruchen. Er ist wie die übrigen im Spätjahr 1629 geschrieben, als Descartes bereits nach Holland übergesiedelt war und Ferrier in Paris in gedrückter Stimmung zurückgelassen hatte. Ferrier hatte nämlich weitere Aufträge bekommen, Gläser, sei es zu Teleskopen, sei es zu andern Zwecken, zu schleifen und vermochte es, nachdem Descartes Paris verlassen hatte, nicht mehr auszuführen. Er war gewiss auch theoretisch gebildet und geeignet Descartes Entwicklungen zu verstehen, war aber jetzt dennoch einer vollständigen Rathlosigkeit zum Opfer gefallen, woraus hervorgeht, dass er nicht die selbstständige Bedeutung gehabt haben wird, die Kuno Fischer ihm in der Darstellung dieser Periode des Lebens Descartes' zuspricht. Er war allerdings ein Freund des letzteren und kann schon desshalb nicht ganz ohne Kenntnisse gewesen sein, aber gewiss wurde diese Freundschaft durch seine seltene technische Geschicklichkeit wesentlich befördert.

Die Briefe zwischen beiden Männern handeln lediglich von der Einrichtung der Schleifmaschinen für gekrümmte Gläser und den Entdeckungen

des Descartes, um die richtige Gestalt der hyperbolischen Gläser festzustellen. Ferrier hatte sich früher Notizen darüber gemacht, diese aber verloren und wendet sich nun brieflich an Descartes, da eine persönliche Zusammenkunft nicht ausgeführt werden konnte, um die wichtigen, zur Ausübung seiner Kunst nothwendigen Anleitungen zu erlangen. Descartes antwortet ihm sehr ausführlich. In diesen Antworten begegnet man nun, wie oben angedeutet wurde, allen den Gedanken und Entdeckungen, welche nach so langen Jahren erst in der Dioptrik niedergelegt und veröffentlicht wurden. Dass er hier auch Mydorge gegenüber, den man vielleicht als den einzigen Nebenbuhler des Descartes in optischen Dingen bezeichnen kann, durchaus selbstständig und völlig überlegen erscheint, ist namentlich aus einer Wendung ersichtlich, welche er bei der Beschreibung der hauptsächlichsten, zur Herstellung der Schleifmaschine nothwendigen Construktion gebraucht. Da heisst es: „Ein weit grösseres Geheimniss ist es, mit Hülfe jener drei Punkte *A, B, C* oder *D, E, F* oder ähnlich liegender, den Neigungswinkel zu finden, den Deine Maschine haben muss, und ich glaube nicht, dass irgend jemand Dir ausser mir Auskunft darüber geben könnte, obwohl die Ausführung nicht besonders schwierig ist.“ Was sich Descartes hier selbst zuschreibt, muss auch unbedingt als sein geistiges Eigenthum angesehen werden. Aber auch, was den übrigen Inhalt der Briefe und die ganze Art, die hier behandelten Probleme aufzufassen, betrifft, so geht Descartes im Vergleich zu Snell von so verschiedenen Grundlagen aus, dass es kaum möglich ist, zu verstehen, wie er, wenn er die Snell'schen Entdeckungen schon kannte, den Umweg durch die Kegelschnitte und sein Diopterinstrument hat machen können.

Aber auch abgesehen von diesen inneren Gründen, welche gegen eine Abhängigkeit von Snell sprechen, muss man bedenken, dass Descartes, als er sich das Brechungsgesetz klar machte, in Paris in der allergrössten Zurückgezogenheit lebte, so dass er selbst für einen Theil seiner pariser Freunde für verschollen galt, und dass er mit Holland in gar keinem Verkehre stand. Es wird somit nahezu undenkbar, dass er bei den damaligen Verkehrsmitteln von einem nur im Manuscripte vorhandenen Werke eines Leydener Gelehrten, wie es das Werk Snell's über Optik war, Kenntniss bekommen habe, welches in Holland selbst fast völlig unbekannt blieb. Dass damals wie auch später nach Frankreich von der Snell'schen Entdeckung nichts gedrungen war, lässt sich vielleicht am besten aus dem Verhalten Fermat's ersehen, welcher von 1637 ab mit Descartes in einen heftigen wissenschaftlichen Streit über das Brechungsgesetz gerieth, und da er dem Descartes und seinen Schülern eine Zeitlang äusserst feindselig gesinnt war, gewiss kein Mittel von der Tragweite des Vorwurfs einer Fälschung unbenutzt gelassen hätte, um Descartes zu bekämpfen. Durch

den jahrelangen Streit geht auch nicht die leiseste Andeutung davon hindurch, dass noch ein Anderer ein Brechungsgesetz formulirt habe.

So kommen wir denn zu dem Schluss, dass Descartes, wenn er überhaupt von des Snell Entdeckung Nutzen gezogen haben soll, dieselbe während seines kurzen Aufenthalts in Holland während des Winters 1621 auf 22 erfahren haben müsste, dass er aber, wenn dies nicht geschehen ist, das Brechungsgesetz selbstständig aufgefunden hat. Die von Voss und Poggendorff aus den Zeitumständen entnommenen Gründe für die Entlehnung desselben von Snell reichen nicht mehr hin, und man müsste sich daher auf andere stützen; solche sind aber nicht vorhanden.

Beachten wir nun noch kurz den Anklagepunkt 3, „dass er so gut wie niemals seine Quellen nennt." Soll man diesen Vorwurf so auffassen, dass er gesucht habe, auch wo er die Quellen wusste, den mitgetheilten Inhalt derselben als sein Eigenthum in Anspruch zu nehmen, so braucht dem nur entgegengehalten zu werden, einmal, dass es in unserm Falle wohl ein hoffnungsloses Unternehmen gewesen wäre, ein anerkanntermassen auf Snell zurückgeführtes Gesetz noch nach elf Jahren als sein Eigenthum zu reklamiren, ohne besonders es zu betonen, dass nicht Snell, sondern er der Entdecker sei, dann aber auch, dass Descartes brieflich eine solche Absicht überhaupt weit von sich weist. Poggendorff spricht den schweren Vorwurf der Unredlichkeit ganz allgemein aus, ist dabei aber blindlings seinen Gewährsmännern Leibnitz und Wilde gefolgt, ohne zu prüfen, ob es den vorliegenden Aeusserungen des Descartes selbst entsprechend war, eine solche Anklage zu erheben. Worauf Leibnitz seinen Zweifel an Descartes Ehrlichkeit gründete, wissen wir nicht, denn dass Spleissius die Wirbel des Descartes bereits bei Giord. Bruno und Kepler gefunden haben will, kann doch nicht genügen. Descartes hatte, diese Ueberzeugung dürfen wir nicht so leicht preisgeben, ein viel zu reges Gewissen, um sich eine solche wissenschaftliche Niedrigkeit, wie sie in dem Vorwurfe Poggendorffs liegt, hier zu Schulden kommen zu lassen. Sind wir doch in der Lage, sein Verhalten in mehreren ganz ähnlichen Fällen zu beobachten.

Man hatte ihm den Vorwurf gemacht, wie er durch Mersenne erfuhr, dass er, ohne Kepler zu nennen, seine Kenntniss der hyperbolischen und elliptischen Gläser sowie ihre Benutzung aus Kepler's Schriften in seine Dioptrik herübergenommen habe. Auf diesen Vorwurf antwortet er in einem Briefe an Mersenne in unverblümter Weise, so dass wir einen Rückschluss auf den Fall mit dem Brechungsgesetz ziehen dürfen.

„Jener Mann, welcher mir vorwirft, ich hätte aus Kepler die Ellipsen und Parabeln meiner Dioptrik, zeigt entweder seine Bosheit oder seine Ignoranz. Was die Ellipse betrifft, so besinne ich mich nicht, dass Kepler

davon handelt, oder wenn er ihrer erwähnt, so lässt er merken, dass sie nicht die anaklastische sei, die er suchte. Was die Hyperbel betrifft, so besinne ich mich, dass er versucht habe, zu beweisen, dass sie solche ebenfalls nicht ist, obwohl er sagt, dass sie von ihr nicht viel unterschieden sei. Ich überlasse es Dir also zu urtheilen, ob ich die Wahrheit einer Sache von einem Manne gelernt habe, welcher zu beweisen sucht, dass sie falsch sei. Das hindert aber nicht, dass ich gestehe, wie Kepler mein hauptsächlichster Lehrer in der Optik und von allen bis dahin der bewandertste darin gewesen ist.“[26])

In diesem Falle also ist es klar, dass Descartes keinen Grund hatte Kepler in seiner Schrift zu erwähnen. Jedermann hatte Kepler's Dioptrik in Händen und konnte den bedeutenden Fortschritt, welchen Descartes darüber hinaus that, selbst beurtheilen. Letzterer hat sich aber überhaupt niemals ernstlich mit dem Gedanken getragen, anderen zu nahe zu treten oder ist damit umgegangen, anderen zuvorzukommen. Schreibt er doch einem befreundeten Jesuiten, nachdem die Dioptrik erschienen war: „Ich danke Dir, dass Du mir Deine Freude darüber ausdrückst, dass ich mir bei der Veröffentlichung meiner Ideeen von andern nicht habe zuvorkommen lassen. Das habe ich in Wahrheit nie gefürchtet. Denn abgesehen davon, dass mir wenig daran liegt, ob ich etwas eher schreibe als andere, wenn es nur wahr ist, was ich schreibe, so hängen meine Gedanken so eng unter einander zusammen, dass Niemand sich etwas davon zuschreiben kann, wenn er nicht das Ganze kennt.“[27]) Konnte wohl Jemand, der den Hauptinhalt seiner Abhandlung, nämlich das Brechungsgesetz, von einem andern entnommen haben sollte, es einem gänzlich unbetheiligten gegenüber so einfach und natürlich aussprechen, dass er in Sachen der Dioptrik niemals gefürchtet habe, es werde ihm Jemand zuvorkommen. Das widerspricht aller Wahrscheinlichkeit, denn für so verlogen hat bisher auch der feindseligst gesinnte Gegner den Descartes nicht gehalten, betont doch im Gegentheil K. Fischer geradezu seine Wahrheitsliebe.

Es ist in der That kein besonderer Grund vorhanden, anzunehmen, angesichts der beiden mitgetheilten brieflichen Zeugnisse, dass Descartes bei Ausarbeitung seiner Dioptrik nicht in gutem Glauben, sein Eigenthum mitzutheilen, vorgegangen sei. Dass er von Snell's Entdeckung gehört haben wird, nachdem er in Holland sich niedergelassen hatte, ist dabei sehr wohl möglich, aber wie schon oben erwähnt, waren seine Ideeen durchaus besser, und es liegt kein Grund vor, in einem methodischen Werke, wie es der Discours mit seinen Anhängen ist, die Entdeckungen Anderer über denselben Punkt, zumal wenn sie dem Werth nach geringer sind, unter Anführung des Namens der Entdecker aufzuführen.

Es wird dem Descartes in diesem Falle aus seiner vermeintlichen Gewohnheit, die Namen der Autoren, aus welchen er schöpfte, zu verschweigen, ein Vorwurf nicht gemacht werden können.

Der zweite jener oben erwähnten Fälle betrifft seine Stellung zu Galilei. Ebenfalls durch Mersenne hatte er erfahren, man habe es ihm verdacht, dass er bei den Ferngläsern nicht Galilei genannt habe. Hierauf antwortet er in einem auch sonst noch vieles auf unsere Frage bezügliches Interessante enthaltenden Briefe: Was den betrifft, der mir einen Vorwurf daraus macht, dass ich Galilei nicht genannt habe, so scheint es mir, als habe er es darauf angelegt, etwas auszusetzen, aber einen wirklichen Grund hat er doch nicht gefunden. Denn Galilei schreibt sich ja selbst die Erfindung der Fernröhre nicht zu — und ich brauchte nur über ihren Erfinder zu berichten. Auch hatte ich keinen von denen, welche vor mir über Optik schrieben, zu erwähnen, weil ich keine Geschichte der Optik verfassen wollte, und ich glaube, damit genug gethan zu haben, dass ich im Allgemeinen aussprach, wie Manche vor mir vieles entdeckt hätten, damit ich nicht beschuldigt würde, ich hätte mir die Entdeckungen anderer zuschreiben wollen. Hätte ich mir damit doch selbst viel grösseres Unrecht gethan, als denjenigen, deren Namen ich fortliess. Es lässt sich dabei sogar denken, dasse jene viel mehr gethan hätten, als man es vielleicht meinen würde, wenn ich gesagt hätte, wer diese gewesen sind [28]).

Diese Aeusserung widerlegt auf das Bündigste jede Anschuldigung einer absichtlichen Aufnahme fremder Entdeckungen in sein Werk, um sich mit dem Eigenthum Anderer zu bereichern. Freilich wäre es für unsere Frage von der grössten Wichtigkeit zu erfahren, wen Descartes unter denjenigen, welche früher über Optik schrieben, gemeint haben wird. Kepler ohne Zweifel, und ausser den Alten Alhazen nebst Vitello, auch Antonius de Dominis, Aguilonius und Maurolycus. Dass nach den Worten des Briefes nur solche gemeint sein können, deren Schriften gedruckt vorliegen, ist zwar nicht durch einen zwingenden Schluss zu entnehmen, liegt aber doch sehr nahe, so dass wir nicht nothwendig auf die Benutzung unedirter Manuscripte geführt werden.

Dieser zweite Fall zeigt aber auch, wie genau man dem Schriftsteller damaliger Zeit nachrechnete, wo er etwa dies oder jenes hergenommen haben könnte, und um so mehr muss man sich heute die Ansicht bilden, dass des Snell Manuscript damals, selbst noch bis 1638, so gut wie unbekannt war, dass aber Descartes nicht mehr wie jeder andere in der Lage war es zu kennen. Wenn Hortensius das Gesetz nach Snell lehrte, so konnte das immerhin schon lange geschehen sein, ehe sich die allgemeine

Ueberzeugung bildete, hier sei wirklich das richtige Gesetz gefunden, da gewiss sehr mühsame Versuche dazu gehörten, um es in der von Snell ausgesprochenen Form durch Beobachtungen zu bestätigen.

Der Schluss jener oben angeführten Auslassung gegenüber Mersenne darf wohl dahin interpretirt werden, dass Descartes überhaupt nicht im entferntesten daran gedacht hat, irgend jemandes Verdienst zu beeinträchtigen, und dass er der Meinung gewesen ist, dass so sehr viel vor ihm in der Optik nicht geleistet worden ist, womit er im Ganzen und Grossen auch völlig im Recht war.

Im Anschluss an die beiden so eben erwähnten Gelegenheiten, wo sich dem Descartes Anlass bot, seine Beziehungen zu älteren Autoren und seine Ansichten über die Benutzung der von ihnen gewonnenen Resultate darzulegen, kann ich es nicht vorübergehen lassen, auch noch eines dritten Falles zu erwähnen, der zwar, weil eine Mittelsperson wie Mersenne fehlt, einen privateren Charakter trägt als jene beiden anderen, der zugleich aber auch durch die ausführlicheren Mittheilungen des Descartes für das Verständniss seiner Persönlichkeit eine nicht zu unterschätzende Bedeutung erhält. Descartes war, wie oben erwähnt wurde, bei seinem ersten Aufenthalt in Breda mit dem holländischen Mathematiker Beekmann unter Umständen, die zwar interessant genug sind, hier aber unerwähnt gelassen werden sollen, bekannt geworden und hatte sich, trotzdem jener bedeutend älter war, eng mit ihm befreundet. Er hatte jenem seine Abhandlung über Musik gewidmet, musste aber erfahren, dass Beekmann sich gegen dritte Personen äusserte, Descartes habe das, was er in dieser Abhandlung niedergelegt, von ihm gelernt. Ueber diesen Punkt entspann sich zwischen beiden ein Briefwechsel, der zum Theil noch erhalten ist; es sind nämlich noch zwei Briefe von Descartes an Beekmann vorhanden. Zwar fehlt bei beiden die Ueberschrift, aber der Inhalt lässt gar keinen Zweifel darüber aufkommen, dass sie an Beekmann gerichtet sind. Der längere von ihnen, der zwölfte im zweiten Theil, ist vom 17. Oct. 1630 datirt, was zur richtigen Deutung einer besonders wichtigen Stelle werthvoll ist. In diesem letzteren Briefe behandelt Descartes seinen Freund wie einen, der an einer psychischen Krankheit leidet und sucht in wahrhaft freundschaftlicher Weise sein auf Irrwege gerathenes Gemüth wieder auf den richtigen Pfad zu lenken. Beekmann muss von krankhafter Ruhmsucht ergriffen worden sein, denn Descartes legt ihm in der ihm eignen klaren und einfachen Weise die Fälle dar, wie Entdecker wissenschaftlicher Wahrheiten zu ihren Resultaten kommen können. Leider verbietet der Charakter unserer Schrift näher darauf einzugehen, bemerkenswerth aber scheint mir folgende Partie: „Hast Du etwas der Erwähnung Werthes allein durch die Kraft Deines

Geistes und unter Anleitung Deiner Vernunft zu Stande gebracht, so gestehe ich, dass ich Dich loben muss, aber zu gleicher Zeit brauchst Du nicht besorgt zu sein, dass man es Dir raube. Wasser ist zwar stets Wasser, hat aber doch immer einen anderen Geschmack, wenn man es aus der Quelle, oder aus einem Kruge, oder aus dem Flusse trinkt. Wird etwas von dem Ort, wo es entstand, übertragen in einen anderen, so kann es zwar geschehen, dass es besser wird, noch häufiger aber verdirbt es, und niemals verläugnet es seine angeborenen Eigenschaften derart, dass man nicht leichtlich merken könne, es sei von anderwärts hergenommen. Du schreibst, Du habest viel von mir gelernt; ich läugne es nicht, wenn ich auch meine, dass es wenig ist, nicht vieles, aber wie viel es auch sei, mache davon Gebrauch, wenn Du kannst, schreibe es Dir sogar selbst zu, meinethalben. Ich habe es mir nirgends notirt, habe auch nicht dabei vermerkt, wann ich es gefunden, und dennoch glaube ich, dass, wenn ich den Leuten überhaupt den geistigen Boden meines Wesens bekannt werden lasse, ein jeder leicht erkennen wird, dass jene Früchte von ihm und von keinem andern entnommen sind."

Es spricht sich in diesen Worten nicht nur eine nachahmungswerthe Unbesorgtheit um seine eigenen Geistesfrüchte aus, sondern was mehr bedeutet, Descartes wird bei einem so stark entwickelten Gefühl für die unvertilgbare Originalität der Entdeckungen und Erfindungen eines Forschers niemals auf den Gedanken gekommen sein, sich der Früchte des Nachdenkens Anderer hinterlistig zu bemächtigen. Er reagirt daher auch jedesmal kräftig, wo ihm dergleichen zugemuthet wird, er reagirt auch hier, wo Beekmann an ihm selbst einen Raub begeht. Es war dieses nicht allein an seiner Schrift über die Musik geschehen, sondern auch noch an den von Descartes bei den Kegelschnitten gefundenen Eigenschaften. Derselbe Brief handelt weitläufig darüber und weist Beekmann in die gebührenden Schranken zurück. „Ich erwähnte einstmals die Eigenschaft der Hyperbel, die Strahlen zu brechen, deren Beweis mir gerade entfallen war und, wie es bei den leichtesten Dingen häufig geschieht, nicht gleich einfallen wollte; aber den entsprechenden bei der Ellipse theilte ich Dir mit und setzte Dir noch einige andere Theoreme auseinander, mit deren Hülfe jene Eigenschaft leicht bewiesen werden konnte, so dass sie Niemandem, der sich nur ein klein wenig anstrengte, entgehen konnte. Desshalb ermahnte ich Dich, Deinen Geist damit zu üben, was ich sicherlich nicht gethan hätte, wenn ich nicht, da Du in den Kegelschnitten selbst zugabst wenig zu wissen, die Aufgabe für sehr leicht gehalten hätte. Du suchtest, fandest und zeigtest es mir, und ich war erfreut darüber, sagte auch, dass ich den Beweis benutzen würde, falls ich einmal über diese Dinge etwas

schreiben würde.“ Beekmann hatte nun, weil er den Beweis aufgefunden, Descartes gegenüber geäussert, er (Descartes) habe ihm diese Eigenschaft zu danken. Wie nicht anders zu erwarten, weist Descartes dieses Ansinnen zurück und hatte dazu auch vollkommenen Grund.

Dieser Brief an Beekmann lässt ausser den eben besprochenen Verhältnissen, die sich auf die Eigenschaft der Hyperbel beziehen, auch noch eine ungefähre Zeitbestimmung zu, wann Descartes sich damit abgegeben haben wird. Wir haben oben die Briefe von Ferrier besonders hervorgehoben. Dieser im October 1630 an Beekmann geschriebene Brief ist die Antwort auf einen Brief des letzteren, der nach Unterbrechung der Correspondenz während eines vollen Jahres bei Descartes einlief. Die Besprechungen über die Hyperbel werden also wohl mindestens ins Jahr 1629 fallen, also in eine Zeit, wo Descartes gewiss noch in Frankreich war. Wir werden aber durch den Brief noch weiter geführt. Beekmann hatte in seinem letzten Briefe Descartes aufgefordert, zu ihm zu kommen, in der sonderbaren Meinung, er könne bei ihm besonders erfolgreich arbeiten. Descartes antwortet ihm: „Erinnerst du dich nicht, dass du mir damals, als ich den Studien oblag, die du selbst eingestandenermassen nicht verstandest, so dass du anderes von mir zu hören begehrtest, die ich aber längst als Jugendstudien bei Seite gelegt habe, so sehr hinderlich warst.“ Wir fragen billig, was waren das für Studien. Es will mir nicht unwahrscheinlich vorkommen, als wenn, nach der ganzen Fassung der darauf bezüglichen Briefstelle, Descartes mit Beekmann mündlich über die Hyperbel verhandelt habe, und dass die Kegelschnittstudien es gewesen sind, mit welchen Descartes sich damals 1618 und 1619 in Breda besonders abgegeben haben wird. Es könnte ja freilich auch die analytische Geometrie gewesen sein, aber auch in dieser kommen optische Probleme vor. Sind es die Kegelschnitte gewesen, so würde nicht nur, wie aus den Briefen an Ferrier hervorgeht, sich 1627 als das früheste Jahr der Bekanntschaft damit ergeben, was auch durch die sichere Berechnung aus dem Briefe an Beekmann im Allgemeinen bestätigt wird, sondern es würde bereits 1618 oder 1619 Descartes im Besitz der hauptsächlichsten Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel, die sich auf die Brechung der Lichtstrahlen beziehen, gewesen sein. Doch will ich gerne eingestehen, dass dies nur ein Wahrscheinlichkeitsschluss ist[29]), welcher aus einer Interpretation jener Briefstelle gefolgert wurde die freilich manches für sich hat, aber der Bestätigung durch andere Momente noch bedarf.

Es findet sich noch ein letzter Fall der erwähnten Art, wo dem Descartes vorgeworfen wird, in seiner Dioptrik das Eigenthum Anderer gemissbraucht zu haben. Er ist am Schluss eines langen Briefes an Mersenne[30]) erwähnt, und wird von Descartes mit den folgenden wenigen

Worten abgemacht: „Ich bin Dir sehr dankbar, dass Du meine Sache vertheidigst, auch glaube ich wirklich nicht, dass jemand mit nur einigermassen gesundem Urtheil der Meinung sein kann, ich hätte meine Dioptrik von Roger Baco entlehnt und noch viel weniger von Fioravanti, welcher ein reiner Marktschreier ist.“ Roger Baco hat ja manche Verdienste um die Optik, aber Descartes hat vollkommen Recht, wenn er jenen Vorwurf, er habe aus dessen Schriften seine Dioptrik zusammengetragen, kurz abfertigt.

Ueberblicken wir die Reihe der eben erwähnten Fälle, in welchen Descartes des Plagiats beschuldigt wird, so ist es ins Auge fallend, dass kaum ein bedeutender Name der damaligen Zeit dabei vergessen ist. Ueberall witterten die Gegner des Neuerers Unredlichkeiten und wollten es nicht gelten lassen, dass er etwas selbstständig gefunden habe. In allen drei Fällen sehen wir Descartes, der davon erfuhr und sich rechtfertigen konnte, siegreich die Anschuldigungen zurückweisen. Es erscheint uns nun als eine einfache Fortsetzung dieser Vorgänge, wenn Isaak Vossius von Neuem die Anklage des Plagiats erhebt und zwar unter besonders günstigen Umständen, denn Descartes ist bereits längst gestorben. Natürlich kann er sich nun nicht mehr rechtfertigen. Dass aber diese Anschuldigung so sehr spät auftritt, dass in dem ganzen, bis gegen 1660 hin sich fortspinnenden Streit um das Brechungsgesetz zwischen Clerselier und Fermat niemals ein Zweifel über den rechtmässigen Anspruch des Descartes auf das von ihm in der Dioptrik gegebene Brechungsgesetz geäussert wird, alles das führt darauf hin, wie unbekannt des Snell Schrift bis zu der Veröffentlichung ihres wesentlichen Inhalts durch Voss geblieben ist und wie unwahrscheinlich es sein muss, dass gerade Descartes, welcher selbst über denselben Gegenstand lange nachgedacht hatte, allein davon Kenntniss bekommen haben sollte.

Die bisher angeführten Zeugnisse, welche zu Descartes' Gunsten sprechen, sind aber nicht die einzigen, die zur Beurtheilung seiner inneren Stellung gegenüber einer so verurtheilungswürdigen That, wie es das Begehen eines Plagiats immer ist, wichtig sind. Es ist noch ein anderer merkwürdiger Brief an Mersenne aus dem Jahre 1630 vorhanden (Ep. pars II, ep. 103), in welchem er über seine Dioptrik und allerhand andere Pläne spricht. Mersenne scheint ihn, wie schon oft, wieder einmal angetrieben zu haben, seine Arbeiten zu Ende zu führen und Descartes weicht von neuem aus, spricht sich aber auf das zuversichtlichste darüber aus, dass ihm Niemand seine Ernte rauben werde[31]) und dass höchstens das, was er in den Briefen an D. F., worunter ohne Zweifel Dom. Ferrier zu verstehen ist, niedergelegt habe, auch von Anderen zum Gegenstand einer Abhandlung gemacht werden könnte. Der wörtliche Ausdruck in der betreffenden Stelle[31])

ist ein so charakteristischer, dass man bei unbefangener Prüfung desselben fast einen direkten Beweis davon vor sich hat, dass jemand, der ihn braucht, nicht selbst „seine Sichel in eine fremde Ernte" schlagen kann. Und wenn Descartes es hier voll Zuversicht ausspricht, dass Niemand dasselbe schreiben könne, was er schreibt, so muss man ihm wohl glauben, dass er dies zur Zeit der Abfassung jenes Briefes aufrichtig gemeint habe. Ist die Zeitangabe 1630 für dieselbe richtig, so konnte Descartes damals auch noch nichts von des Hortensius Vorträgen, falls er sie wirklich hörte oder von ihrem Inhalt Kenntniss bekam, gelernt haben, denn Hortensius wird kaum vor 1630 öffentliche Vorträge gehalten haben, es sind auch wohl überhaupt darunter nur seine Vorträge nach seiner Anstellung in Amsterdam zu verstehen. Ueber das, was Descartes hauptsächlich gemeint hat mit dem „was er schreibe", giebt uns ein anderer Brief[32]) Auskunft, in welchem er es einfach ausspricht, dass der erste Theil der Dioptrik nichts Anderes enthalten wird, als das Sinus-Verhältniss des Einfalls- und Brechungswinkels. Dieses Verhältniss wird nun in der Dioptrik selbst niemals unter dieser Bezeichnung erwähnt, was gewiss auffallend ist. Erklärlich wird dieser Umstand nur dadurch, dass in damaliger Zeit die geometrische Interpretation die bevorzugte war, die trigonometrische daher von geringerer Bedeutung sein musste. In einem Briefe dagegen war die letztere, weil sie eine ungleich kürzere Art und Weise des Ausdrucks zuliess, sehr wohl angebracht. Einen positiven Beweis, dass dieses wohl der richtige Grund sein wird, finden wir in einem Briefe an Mersenne, der, wie aus seinem Anfange zu entnehmen ist, im Jahre 1641 geschrieben sein wird. Dort wird eines bekannten Verfahrens, die Brechung der Lichtstrahlen zu prüfen, gedacht, und Descartes rechtfertigt sich darüber, dass er es in seiner Dioptrik nicht erwähnt habe. Er sagt, „er habe das unterlassen, nicht weil er damit unbekannt gewesen wäre, sondern weil jene Art und Weise weniger geometrisch gewesen sei." So finden wir denn in der Dioptrik überall die geometrische Methode bevorzugt, und Vieles ohne direkten Beweis mitgetheilt, so dass gewisse Partien allerdings nicht allgemein verständlich sein konnten. Dieses letztere scheint er auch selbst gefühlt zu haben, er spricht es wenigstens in einer charakteristischen Briefstelle[33]), die vielleicht auch als Beleg dafür, dass er nur Eignes in der Dioptrik vortrage, genommen werden kann, hinlänglich deutlich aus.

Beachtung verdient ferner ein Brief[34]) an einen Ungenannten (Mersenne?), wo er schreibt: „Weil Du etwas von meiner Dioptrik zu sehen wünschest, schicke ich Dir den ersten Theil derselben, wo ich unter Beiseitesetzung aller Philosophie die Brechung zu erklären versucht habe. Du wirst sehen, dass das Werk wenig Bedeutung hat und wirst nach der Lek-

türe gewiss viel weniger Wesen davon machen als jetzt. Ich höre übrigens gerne Deine Meinung darüber. Schicke mir das Manuscript wieder zurück, da ich kein anderes Exemplar davon habe und ich nicht will, dass ein Anderer ausser Dir es sieht."

Wir finden in diesem Briefe den unbefangenen Ausdruck eines Mannes, der seine Arbeit einem Freunde gegenüber charakterisirt, und erhalten den Eindruck, dass der Erklärungsversuch der Brechung durchaus Eigenthum des Briefschreibers ist. Allerdings ist es ja immer möglich, zwischen der Erklärung und der Entdeckung des Brechungsgesetzes noch zu unterscheiden. Descartes braucht, so könnte man schliessen, nur die Erklärung des von einem Anderen gefundenen Gesetzes als sein Eigenthum in Anspruch genommen zu haben. Indess hängt die Erklärungsweise so eng mit seiner eignen Entwicklung des Gesetzes zusammen, dass man kaum das eine von dem andern trennen kann.

Von allen die Refraktion direkt betreffenden Briefstellen scheint mir endlich diejenige die wichtigste zu sein, in welcher er sich Mersenne gegenüber über die Ausstellungen ausspricht, welche ein gewisser Bourdin von der Gesellschaft Jesu, ein damals bekannter Mathematiker, an seiner Dioptrik gemacht hatte[35]). Bourdin muss die Beweisführungen des Descartes in sehr geringschätziger Weise beurtheilt und sehr verletzende Ausdrücke dabei gebraucht haben, so dass letzterer sich dem Freunde gegenüber weitläufiger als sonst rechtfertigt. Dann fährt er fort: „Ich wundere mich auch darüber, dass er sagt, „„mein sogenannter Beweis könne durch ihm längst bekannte Mittel geführt werden, von denen er aber in meinen Schriften nichts bemerkt habe, die ich also, als wenn sie zur Sache nichts thäten, einfach bei Seite gelassen hätte."" Wenn ich dies mit der 5. und 6. seiner optischen Thesen Seite 9 vergleiche und mit seinem ganzen Unternehmen überhaupt, so kann ich mir gar nichts Anderes denken, als dass er über die Reflexion und Refraktion genau das, was ich lehre, und **was Niemand vor mir bewiesen hat**, seinen Schülern mitgetheilt habe, nur mit veränderten und entstellten Worten, so dass er etwas Anderes zu sagen scheint und dass er mir andere Ansichten unterstellt, um sie nachher zu verbessern." Wie soll man das hier dem Mersenne gegenüber gegebene Geständniss, der mindestens ebenso gut wie Descartes mit allen literarischen Erscheinungen bekannt war, anders deuten, als dass Descartes in gutem Glauben die Beweise für die optischen Gesetze nicht allein als sein Eigenthum beansprucht, sondern noch besonders hervorhebt, dass Niemand sie früher gegeben habe. Es betrifft dies wesentlich die Refraktion, gegen welche Bourdin auftrat. Hätte er früher das Snell'sche Manuscript gesehen, worin nach Voss ein Beweis des Brechungsgesetzes enthalten war,

so würde er so nicht haben schreiben können. Hätte er von Hortensius den Beweis gehört, so würde er gleichfalls den obigen Ausdruck nur mit Einschränkung haben brauchen können, denn Hortensius konnte auch nur Snell's Beweis mittheilen. Es bleibt freilich auch hier wieder die Möglichkeit, unter Berücksichtigung natürlich des oben aus der historischen Darlegung Gewonnenen, Descartes habe zwar den Beweis mit ihm eigenthümlichen Mitteln gegeben, aber für ein Gesetz, dessen wesentlichen Charakter, nämlich die Benutzung der Strecken statt der Winkel, er von Anderen überkommen habe. Unwahrscheinlich bleibt eben bei der Erwägung, in wie frühe Zeit des Descartes Bekanntschaft mit dem Brechungsgesetz hinaufreicht, diese Möglichkeit auf jeden Fall, die angeführte Briefstelle gehört aber zu den merkwürdigsten und ist, wie die Mehrzahl der oben benutzten, bisher völlig unbeachtet geblieben.

Damit verlassen wir die Betrachtung der Zeitverhältnisse und der Momente, welche aus dem Charakter des Descartes für seinen Anspruch auf die selbstständige Entdeckung des Brechungsgesetzes angeführt werden können und wenden uns der Erörterung des Weges zu, auf welchem er zur Aufstellung seines Gesetzes gelangen konnte.

## 2.

Versuchen wir uns den Gedankengang, den Descartes bei der Entdeckung des Brechungsgesetzes verfolgt haben wird, falls er selbstständig zu demselben gelangt ist, zu vergegenwärtigen, so sind es hauptsächlich seine Studien an den Kegelschnitten, welche dabei zu berücksichtigen sind. Ausser diesen dürfen aber die Bestrebungen, welche, wie bereits oben erwähnt wurde, in der damaligen Zeit lagen, möglichst gute Brenngläser zu construiren und die Beschäftigung mit den optischen Schriften seiner Vorgänger, namentlich Kepler's, nicht unerwähnt gelassen werden. Durch Kepler war die Optik zuerst in wirklich wissenschaftlicher Weise behandelt worden, und wenn er auch das Brechungsgesetz noch nicht auffand, so waren doch namentlich die Eigenschaften der Linsengläser, so wie die der optischen Instrumente, auf ganz neue Weise von ihm behandelt worden. Doch mag sein Einfluss auch besonders durch seine kritischen Bemerkungen nicht unerheblich gewesen sein. Im 4. Kapitel nämlich der Paralipomena in Vitellionem, dem Kapitel, welches von der Brechung handelt, bespricht Kepler im zweiten Abschnitt die Meinungen des Alhazen und Vitello und führt, wie das überhaupt seine Art ist, alles Wesentliche mit peinlichster Genauigkeit und Ausführlichkeit auf. Dabei erwähnt er, dass letzterer noch etwas ganz besonders Subtiles ersonnen habe, dem er aber doch nicht bei-

stimmen könne. Die Bewegung des schräg einfallenden Lichtstrahles sei, so lehre jener, zusammengesetzt aus einer Bewegung senkrecht und einer andern parallel zur Oberfläche des dichteren Mediums[36]). Wir begegnen also hier der Anschauung, welche auch Descartes bei seinem methodischen Beweise des Brechungsgesetzes im zweiten Kapitel der Dioptrik auseinandersetzt. Kommt so diese von Kepler wieder aus den älteren Schriftstellern hervorgehobene Anschauung, die übrigens Descartes auch unmittelbar aus den Originalwerken derselben entnommen haben konnte (Alhazen war erst 1572 durch Fridericus Risnerus auf Antrieb des Petrus Ramus zu Basel herausgegeben und die Schrift des Vitello war demselben Bande beigefügt), erst bei dem Beweise zur Geltung, so konnte eine Bemerkung Keplers im Anschluss an jene Meinungen Descartes auf seinen Weg der Entdeckung des Gesetzes gelenkt haben. Kepler überschlägt alle Unzuträglichkeiten, welche aus des Alhazen und Vitello Ansicht entspringen, wonach der Lichtstrahl desshalb vom graden Wege abgelenkt werde, damit er dasjenige, was er an Intensität durch das Eintreten in ein dichteres Medium verliert, durch das Näherherantreten an das Einfallsloth wieder gewinne, indem er dann kräftiger den Boden des Gefässes trifft. Bei dieser Erwägung kommt er zu der Ueberzeugung, dass dann die Brechungen mit den Sinus gewisser Winkel wachsen müssten, weil ja die schräg einfallenden Strahlen in diesem Verhältniss abgeschwächt werden. Die Erwähnung des Sinus an dieser Stelle hat für uns in der That etwas Auffallendes, da das Brechungsgesetz durch ein Sinus-Verhältniss ausgedrückt wird.

Es ist nicht unmöglich, dass Descartes hierdurch auf die Sinusse der Winkel aufmerksam geworden ist, gerade wie er vermuthlich ebenfalls durch Keplers Betrachtungen über die Kegelschnitte, die allerdings zu einem Resultat nicht geführt hatten, bewogen worden sein wird, eben diese Curven noch einmal vorzunehmen.

Das Studium an den Kegelschnitten war für Descartes entscheidend. Er fand, dass das Verhältniss der Excentricität zur halben Axe eine merkwürdige Bedeutung bei den optischen Eigenschaften der Kegelschnitte bekommt, woran sich seine weiteren Untersuchungen anschlossen, welche sich in der Dioptrik im achten Kapitel niedergelegt finden[37]). Indem er dieselben verfolgte, fand er, dass, wenn die Ellipse oder Hyperbel die Eigenschaft haben soll, die mit der Axe parallelen Strahlen in einem ihrer Brennpunkte zu sammeln, sich die verschiedenen Lichtgeschwindigkeiten in der Luft und im Glase verhalten müssen wie die halbe Axe zur Excentricität[38]). Dass dieses Verhältniss unmittelbar in das der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels umgesetzt werden kann, wird ihm nicht entgangen sein, denn, wenn er auch bei dieser Gelegenheit diese Sinusse nicht

direkt erwähnt, so leitet er doch das Verhältniss derjenigen Strecken ab, durch welche sie repräsentirt werden. So war Descartes, indem er von rein theoretischen Gesichtspunkten ausging, auf die Constanz des Sinusverhältnisses zwischen den beiden charakteristischen Winkeln gekommen [39]. Dies wird nach den früheren Auseinandersetzungen 1627 oder schon früher gewesen sein.

Es galt nun blos noch, ein wirkliches elliptisches oder hyperbolisches Brennglas aus Krystallglas zu verfertigen, welches diese theoretischen Gedanken durch den damit anzustellenden Versuch bestätigen konnte. Zu dem Ende musste man für Luft und Glas das Geschwindigkeitsverhältniss der Lichtfortpflanzung kennen. Descartes wird folgenden Schluss gezogen haben. Das Sinus-Verhältniss muss nach der Theorie aus den Kegelschnitten constant sein, also braucht man nur für einen einzigen beliebig einfallenden Strahl den Brechungswinkel zu berücksichtigen, so wird man für Luft und Glas das Sinus-Verhältniss construiren können. Wird hiernach ein Glas geschliffen, bei dem die grosse Axe und die doppelte Excentricität dasselbe Verhältniss besitzen, so wird sich erweisen müssen, ob dies die mit der Axe parallel auffallenden Strahlen in einem seiner Brennpunkte sammelt. Geschieht dies, so ist jenes Verhältniss der Ausdruck des Brechungsgesetzes, geschieht es nicht, so muss weiter gesucht werden, worin dieses Gesetz besteht. Um das Sinusverhältniss für ein Paar zusammengehöriger Winkel, eines Einfalls- und Brechungswinkels zu finden, benutzt Descartes das zu diesem Zweck construirte, höchst sinnreiche Diopter-Instrument, welches, wenn man will, auch bereits von Kepler angedeutet war [40]), aber, wie ein *Blick* in seine Dioptrik beweist, in sehr unvollkommener Weise und ohne dass die merkwürdige Schlussfolgerung daran angeknüpft war. Auch dieser Versuch geht gewiss bis auf 1627 zurück und ist eine ungemein interessante Anwendung der Eigenschaften des rechtwinkligen Prisma [41]). So kam es, dass Descartes keine Experimente zu machen brauchte, und es fällt damit der vierte Einwand fort. Er ging vielmehr deduktiv zu Werke und nicht wie Snell induktiv. Die einzige Probe auf die Richtigkeit seiner Vorstellungen bestand darin, dass er nach dem an seinem Diopterinstrument abgelesenen Sinus-Verhältniss für Luft und Glas eine Sammellinse schliff und mittelst derselben die zur Axe parallelen Strahlen auffing. Hierin bestand sein Experimentum crucis. Dasselbe ein einziges Mal mit aller Sorgfalt ausgeführt, leistete genau dasselbe, wie zahlreiche Messungen, welche ein rein empirisches Verfahren nöthig machen würde. Dass dieses entscheidende Experiment gelang, war für Descartes stets eine Quelle des grössten Vergnügens, wie er es denn auch mehrmals beschrieb.

Wir haben somit innerhalb des dem Descartes zugänglichen Ideeen-

kreises den vollständigen Schlüssel für den Inhalt und die Form des von ihm ausgesprochenen Lichtbrechungsgesetzes und brauchen nicht nach fremden Hülfen auszuschauen. Descartes selbst deutet auf die Art und Weise, wie er die hierhergehörige Aufgabe gelöst hat, hin, wenn er in einem Briefe an Mersenne[42]) ausspricht, dass die geometrische Betrachtung ihn zum Brechungsgesetz geführt habe.

3.

Es erübrigt noch ein Wort über den von Leibnitz[4]) erhobenen Einwand, dass Descartes sich bei seinem Beweise arg verwickelt habe, beizubringen. Schon Voss spricht es an der bereits mehrfach angeführten Stelle[2]) seiner „Antwort u. s. w." aus, dass Descartes wohl den von Snell gegebenen Beweis für das Brechungsgesetz nicht gesehen haben könne, er hätte sonst nicht seinen eignen umständlicheren dafür gegeben. Diese Aeusserung ist in sofern nicht ohne Bedeutung, als die Aussage von Huyghens[3]) damit nicht recht in Einklang zu bringen ist. Letzterer erwähnt nämlich, dass er in Erfahrung gebracht habe, Descartes habe die Handschrift des Snell selbst gesehen. Ist dem so, so wird er ja auch wohl den darin enthaltenen Beweis des Lichtbrechungsgesetzes gesehen haben. Es ergiebt sich hieraus, dass selbst zwischen den alten Gewährsmännern für das Plagiat des Descartes keine Einstimmigkeit besteht, was indess hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Der von Descartes im zweiten Kapitel der Dioptrik gegebene Beweis hat schon zu seinen Lebzeiten mannigfache Anfechtungen erfahren, wie aus den zahlreichen diesen Punkt betreffenden Briefen hervorgeht. Er ist auch späterhin immer wieder befehdet und Poggendorff nennt ihn mit Recht nur einen Versuch zum tieferen Eindringen in die Natur des Lichtes[43]).

Das Merkwürdigste, was daran auffällt, ist jedenfalls dies, dass die Hauptsache, nämlich die Unveränderlichkeit des durch die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels bestimmten Verhältnisses gar nicht, wie sich's gebührt, in den Vordergrund gerückt ist. Dem Leser wird vielmehr zugemuthet, den Schluss, der zu dieser fundamentalen Wahrheit führt, selbst zu ziehen, ohne dass Descartes darauf hinweist, dass er gezogen werden muss. Nachdem er nämlich in sehr ausführlicher Darlegung Beispiele und einzelne Fälle besprochen und die Neigung des gebrochenen Strahls gegen die horizontale Gränzfläche beider Medien durch Construktion gefunden hat, fährt er fort: „Es muss dabei betont werden, dass diese Neigung gemessen werden muss durch die Grösse der Linien *CB* oder *AH* und *EB* oder *GJ* oder ähnlich liegender, nicht durch die Grösse der Winkel, wie *ABH* oder *GBJ* und noch viel weniger durch die von *DBJ*, welcher der Brechungswinkel

genannt wird. (Fig. 1.) Denn das Verhältniss dieser Winkel ändert sich nach der Grösse derselben, dagegen das der Linien $AH$ und $GJ$ oder das entsprechender ändert sich nicht, bei irgend einer Brechung, welche von demselben Körper herrührt."[44]) Hiermit und einigen wenigen anderen gelegentlichen Andeutungen ist die ganze Sache abgethan.

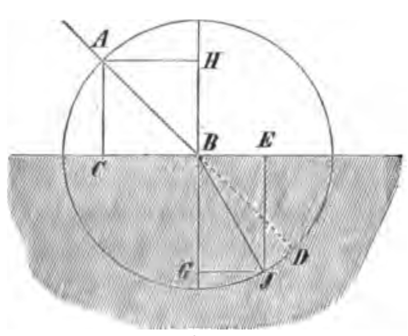


Fig. 1.

Es hat hiernach den Anschein, als wenn Descartes ganz und gar kein Gewicht auf dies merkwürdige Gesetz legte, als wenn er von durchaus Bekanntem spräche, welches er nur noch einmal gelegentlich gegen einige geltend gemachte Irrthümer wahren will. Es macht alles dies durchaus nicht den Eindruck, als wenn Descartes das Bewusstsein habe, etwas ungewöhnlich Bedeutendes ausgesprochen zu haben, wie sich denn auch in dem ganzen an seine Beweisführung anknüpfenden wissenschaftlichen Streit mit Fermat, Hobbes und anderen kein Wort davon findet, dass hier ein bisher noch unbekanntes Naturgesetz ausgesprochen sei. Wüssten wir nicht aus brieflichen Mittheilungen[32]) von Descartes genau, dass diese Unveränderlichkeit des Sinus-Verhältnisses von ihm wirklich als die Hauptsache angesehen worden ist, die Dioptrik würde uns darüber völlig in Zweifel lassen, ob Descartes wirklich diesen wesentlichen Inhalt des neuen Gesetzes richtig gewürdigt hatte. Es findet dies eigenthümliche Verhalten dadurch vielleicht eine Erklärung, dass es Descartes in der Dioptrik auf eine methodische Entwicklung der Ursachen für die Brechung ankam, denn er beweist die Refraktion in völlig derselben Weise, wie die Reflexion. Bemerkenswerth aber bleibt es immerhin, dass der Leser nur wie im Vorübergehen auf das grosse Gesetz aufmerksam gemacht wird und dass er sich selbst in den für ein und dasselbe Medium unveränderlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den eigentlichen Grund für die Unveränderlichkeit des Sinus-Verhältnisses suchen muss.

Gehen wir nun auf den Einwand des Leibnitz ein, dass Descartes sich bei seinem Beweise arg verwickelt habe[45]).

Bei diesem Beweise muss man bedenken, dass er concipirt wurde in einer Zeit, wo die Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte noch durchaus nicht ins allgemeine Bewusstsein übergegangen war. Leibnitz dagegen war in diesen neuen Vorstellungen schon durchaus heimisch. So musste ihm denn eine Darstellung, in welcher zwar der Begriff der Componenten verwerthet war, bei dem aber der der Resultanten

noch völlig fehlte, fast unverständlich sein. Dazu kam, dass zu demselben Beweise offenbar ein bestreitbares Theorem von Kepler benutzt wurde, nach welchem ein Lichtstrahl nur an der Gränzfläche (oder eigentlich in derselben) eines dünneren und dichteren Mediums eine Hinderung seiner Bewegung erfährt[46]).

Wenn auch Descartes sich dieses Theorem Kepler's nicht wörtlich aneignet, so lassen sich doch Aussprüche auffinden, welche darauf hindeuten, dass nicht die Beschaffenheit des Körpers, durch welche das Licht hindurchdringt, als solche einen Einfluss auf die Brechung haben könne. So findet man in einem Brief an Mersenne die bemerkenswerthe Stelle: Was jener sagt, dass nämlich die Dichtigkeit des Mediums die Brechung bewirke, lässt sich sogleich als irrthümlich beweisen. Ein Lichtstrahl nämlich, wenn er durch das Wasser dringt, wird nach dem Einfallsloth hin abgelenkt, während ein Ball sich vom Einfallsloth entfernt, so dass eine und dieselbe Dichtigkeit zwei gänzlich entgegengesetzte Wirkungen haben müsste[47]). Descartes hatte sich die Bewegung des Lichtes vollständig in derselben Weise vor sich gehend gedacht, wie die eines gegen die Wasserfläche schräg geworfenen Balles, er konnte also mit Fug und Recht schliessen, wie er es eben that.

Nach jenem Theorem muss, wenn man mit Descartes den schräg gegen eine Wasserfläche gerichteten Lichtstrahl wie aus bewegten Lichttheilchen bestehend ansieht, diese Bewegung in zwei zu einander senkrecht gerichtete zerlegt gedacht werden, von denen die eine parallel mit der Wasserfläche, die andere senkrecht dazu verläuft. Die letztere erfährt allein eine Aenderung der Geschwindigkeit, und damit ist nach den Principien, welche in dem Kepler'schen Satze verborgen liegen, ausgesprochen, dass sich das Licht nach dem Durchtritt durch die Gränzfläche im Wasser nach allen Seiten mit derselben abgeänderten Geschwindigkeit fortbewegt. Der Strahl wird also, wenn die neue Geschwindigkeit $^3/_2$ der alten beträgt, jetzt in $^2/_3$ der früheren Zeiteinheit auf der Peripherie des Kreises angelangt sein, welcher um den Eintrittspunkt des Strahls in das Wasser als Mittelpunkt mit derjenigen Strecke als Radius gelegt ist, welche den Weg während der früheren ganzen Zeiteinheit darstellt[48]). Der Punkt selbst auf dieser Peripherie wird nicht durch Zusammensetzung der vorhandenen Bewegungen gefunden, sondern auf dieselbe Weise, wie es auch beim Reflexionsgesetz geschah, und hiermit sind wir an der Stelle angelangt, an welcher man billig Anstoss nehmen kann und welche auch bereits von den Jesuiten in Clermont, denen Descartes seinen Discours übersandte, beanstandet wurde. Descartes ist jedoch, und das ist für den Augenblick die Hauptsache, bei diesem Beweise durchaus nicht mit seinen Principien in Collision gerathen, denn er besass gar keine speciellen, auf Lichtbewegung bezüglichen, sondern er

suchte sich, so gut es eben anging, mit seinen noch unvollkommenen mechanischen Anschauungen über die Schwierigkeiten des methodischen Beweises hinwegzubringen. Descartes fasst die Aufgabe, den Punkt zu finden, in welchem der Strahl nach seinem Eintritt in ein anderes Medium einen Kreis von gegebener Grösse trifft, nicht als mechanische, wie sie doch eigentlich ist, sondern als geometrische, und behandelt sie darnach, indem er nach Orten für diesen Punkt frägt, für deren Bestimmung dann allerdings mechanische Gesichtspunkte, aber in sich zusammenhangslose, geltend gemacht werden.

Was der Einwurf des Leibnitz eigentlich bezwecken soll, nämlich nachzuweisen, dass Descartes gewaltsam gegen seine Principien und alle Regeln des Schlussverfahrens in seinem Beweise vorgegangen sei, um zu einem Resultat zu gelangen, das er selbst niemals entdeckt, sondern von einem andern entnommen hatte, das können wir nach dem Vorstehenden nicht gelten lassen, glauben vielmehr, dass gerade in seinen Beweisen Descartes besonders methodisch, wenn auch nicht besonders glücklich, zu Werke gegangen sei, und so kann auch der letzte Einwurf gegen die Annahme, dass Descartes das Brechungsgesetz selbstständig entdeckt habe, eine wirkliche Bedeutung nicht behalten.

## 4.

Die fünf Haupteinwürfe haben wir hiermit auf den Werth zurückgeführt, den sie nach unserer Meinung beanspruchen dürfen. Wir haben nachgewiesen, dass der lange Aufenthalt von 20 Jahren in Holland (1629—1649) Descartes in Bezug auf das Brechungsgesetz nichts helfen konnte, da er schon 1627, wenn nicht viel früher, dasselbe kannte; dass Hortensius ihm nichts mitzutheilen vermochte, da dieser um 1627 ihm mündliche Mittheilungen zu machen nicht im Stande war; dass des Descartes Charakter es gestattet anzunehmen, dass er ein Plagiat mit seinem Ehrgefühl für unvereinbar halten musste; dass er Versuche nicht nöthig hatte, um das Brechungsgesetz zu finden; endlich, dass er in seinem Beweise für dasselbe sich nicht mit seinen eignen Grundsätzen in Widerspruch gesetzt, auch überhaupt sich nicht verwickelt hat. Hiernach sind die aus alter und neuer Zeit stammenden Gründe dafür, dass Descartes das Brechungsgesetz entlehnt habe, wohl nicht mehr als vollgültig anzusehen.

Wie es nun bei historischen Untersuchungen stets der Fall sein wird, so ist auch in unserer speciellen Frage auf die Reihe der Zeitbestimmungen das grösste Gewicht zu legen, sobald es nicht gelingt, einen beglaubigten Ausspruch des Descartes zu finden, durch welchen seine Abhängigkeit von Snell direkt widerlegt wird. Nun ist es zwar möglich gewesen, aus den vorhandenen Briefen zahlreiche Aussprüche zu entnehmen, durch welche

mindestens die Unwahrscheinlichkeit einer solchen bewussten aber verschwiegenen Abhängigkeit sich ergiebt, aber sie sind sämmtlich nicht derart, dass sie eine weitere historische Nachforschung überflüssig machten. Die Frage steht also meiner Ansicht nach so: Hat man die bisherige Meinung von dem Plagiat des Descartes allein darauf gebaut, dass man sich sagte, Descartes müsste nach seiner Uebersiedelung nach Holland 1629 unbedingt, aber auch nur unter dieser Bedingung, das Snell'sche Gesetz erfahren haben, so hat die historische Untersuchung ergeben, dass dann ein Plagiat unmöglich ist, weil er schon 1627 oder 1628 das Brechungsgesetz kannte, er es also selbstständig gefunden haben musste.

Giebt man, und das wäre nun die neue Phase, in welche die Streitfrage eintritt, dem Jahre 1629 eine so entscheidende Bedeutung nicht, so kann sich Descartes entweder 1617—19 oder 1621—22 direkte Kunde von dem Gesetz verschafft haben, er muss dann aber Snell persönlich begegnet sein[49]). Hier lässt uns die historische Untersuchung zunächst im Stich; wir wissen nicht, wann Snell sein Gesetz formulirt hat, doch scheint es, nach den Werken, die er herausgab, zu urtheilen, erst nach 1621 gewesen zu sein. Ist dies der Fall, so müssen wir Descartes als selbstständigen Entdecker des Brechungsgesetzes ansehen, da er nach dem Frühjahr 1622 bis zu seinen optischen Entdeckungen Holland nicht wieder betritt. Ist es dagegen nicht der Fall, so bleibt es immer sehr unwahrscheinlich, dass von allen Gelehrten damaliger Zeit nur der junge und in Holland nur gelegentlich sich aufhaltende Descartes es gewesen sein soll, der von dem Gesetz Kunde erhielt. Endlich aber ist es, wenn sonst die Deutung jenes Briefes an Beekmann zulässig ist, wie wir sie oben und in Anmerkung 29 versucht haben, nicht unmöglich, dass Descartes bereits während seines ersten Aufenthalts in Holland 1617—19 auf die optischen Eigenschaften der Kegelschnitte gestossen ist, und dann würden wir Descartes bedingungslos als selbstständigen Entdecker des betreffenden Gesetzes ansehen müssen, zumal er auf einem durchaus originellen Wege auch später die damit in Zusammenhang stehenden Untersuchungen durchführte.

Jedenfalls glauben wir berechtigt zu sein, die augenblicklich geltende Meinung von des Descartes Plagiat fallen lassen zu können und uns eine bedeutend günstigere Ansicht von seiner selbstständigen Entdeckung des Brechungsgesetzes bilden zu dürfen.

---

# Anmerkungen und Litteraturnachweise.

NB) Die Citate aus den Briefen des Descartes sind nach der Ausgabe von 1692 und 1693, die aus der Dioptrik nach der Ausgabe von 1666 gemacht.

1) In Betreff des „brennenden Ehrgeizes in der Wissenschaft zu glänzen" beachte man, dass Descartes nur nach vielem Drängen von Seiten seiner Freunde sich entschliessen konnte, sein erstes Hauptwerk Discours sur la methode etc. herauszugeben. Auch war er bereits über 40 Jahre alt, als es endlich erschien, obwohl er lange Jahre vorher alle Materialien dazu gesammelt hatte, und schliesslich erschien es anonym. Nicht viel anders erging es ihm mit seiner zweiten Hauptschrift, den Principien der Philosophie, die er eigentlich gar nicht herausgeben wollte; theils aus Furcht, dadurch in Streitigkeiten verwickelt zu werden, theils aus Scheu vor einer abschliessenden Fassung seiner Gedanken. Er konnte nicht gut fertig werden mit einer Ausarbeitung seiner Ideeen. Auch kam er, je länger er lebte, um so mehr zu der Ueberzeugung, dass es besser wäre, überhaupt zu schweigen und sich im Stillen zu unterrichten, denn er erfuhr, nicht um seiner herausfordernden Eigenschaften, sondern um der neuen und bahnbrechenden Gedanken in seinen Schriften willen vielerlei Angriffe, so namentlich in Holland, wo seine Anhänger zuerst anfingen sich die academischen Lehrstühle zu erobern. Es war ihm nichts lieber als das zurückgezogenste Leben; unbemerkt zu bleiben, war sein höchster Wunsch, Qui bene latuit bene vixit seine Devise. Ging er doch allein desswegen nach Holland, um gänzlich für sich und seine Studien zu leben, durch deren Fortschritt er glaubte der Menschheit Dienste erweisen zu können. Auch vergleiche man, was er in den Briefen häufig ausspricht, wie *z. B.*: „Es liegt mir wenig daran, ob ich etwas eher schreibe als andere, wenn es nur wahr ist, was ich schreibe." Aus alledem geht hervor, dass der Ehrgeiz in der Wissenschaft zu glänzen, ein hervorstechender Zug in seinem Charakter nicht gewesen sein kann. Und so wenig wie dieser bei Descartes unangenehm hervortrat, ist es mit der zu Streitigkeiten führenden Reizbarkeit gewesen. Es ist bekannt genug, dass die Streitigkeiten, in welche er namentlich in Holland verwickelt wurde, von ihm nie gesucht wurden, dass sie sich vielmehr ganz von selbst aus der Neuheit seiner philosophischen Principien ergaben und dass er so lange wie möglich zögerte, persönlich in diesen Streit einzugreifen.

2) Mensura porro Cartesii non differt a communi opticorum mensura, sed demonstrationis ratio diversa est. Postquam quippe in Hollandiam venit, satis liquet et ipsum quoque nonnihil intellexisse de Snellii methodo ad mensurandas refractiones, utpote quam multi satis norant quamque Hortensius et publice et privatim exposuerat. Quod itaque (Cartesius) habet, refractionum momenta non exigenda esse ad angulos, sed ad lineas, istud Snellio acceptum ferre debuisset, cujus nomen more solito dissimulavit. Ipsam tamen Snellii demonstrationem non

vidisse lubenter admiserim' utpote cum omissa faciliori demonstratione operosiorem sectatus sit. (Isaac Vossius, responsio ad obj. Joh. de Bruin p. 32.)

3) Theils um ihrer Wichtigkeit überhaupt, theils desshalb, weil darin eine Andeutung der Snell'schen Gedanken enthalten ist, mag die Angabe des Huyghens vollständig hier Platz finden.

Haec autem refractionum mensura, non sinuum sed angulorum ipsorum proportione, ab Alhazeno Arabe et Vitellione olim definita fuerat et experimentis quibusdam utcunque confirmata. Sed cum in majoribus radiorum inclinationibus a vero discrepare proportio illa reperiretur diligentius sibi recentiores investigandam existimarunt. In quibus Keplerus plurimis frustra tentatis ipsam quidem rei veritatem non est assecutus, conjecturis tamen suis variisque molitionibus non parum sequentium studia adjuvit. Post eum vero Wilebrordus Snellius cum jam majus operae pretium appareret quippe exorto telescopii invento, multo labore multisque experimentis eo pervenit ut veras quidem refractionum mensuras teneret, nec tamen quod invenerat, satis intelligeret. Nam posita exempli gratia aquae superficie $AB$, visibili vero sub aqua in $D$, quod oculo in $F$ posito appareat quasi in recta $FC$, donec in $G$ puncto occurreret rectae $AD$ ad superficiem aquae perpendiculari, hisque itaque descriptis statuebat, imaginem rei visae apparere in $G$, rectaeque $CD$ ad $CG$ certam esse rationem, veluti in aqua sesquitertiam.

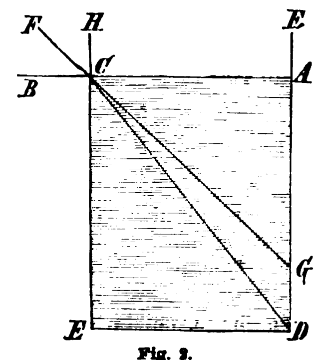


Fig. 2.

Quae rectarum inter se ratio vera est, ac convenit prorsus cum ea, quam paulo ante explicuimus, refractionis lege, quia $CD$ est ad $CG$ ex doctrina triangulorum ut sinus anguli $DGC$ vel $AGC$ seu $HCF$ ad sinum anguli $CDG$ sive $DCE$. Verum ad hanc sinuum proportionem nequaquam attendit Snellius et usque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere existimavit, ut etiam in radio perpendiculari qualis $HC$ effectum refractionis seu ut falso opinatur, decurtationem radii visorii agnosceret deceptus eo, quod etiam recta desuper in vas aquae plenum inspicienti fundus omni parte attoli videtur.

Haec autem omnia, quae de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, inedita mansere, quae et nos vidimus aliquando et Cartesium quoque vidisse accepimus, ut hinc fortasse mensuram illam, quae sinibus constitit, elicuerit, qua in explicanda iride et vitrorum figuris investigandis felicissime est usus. Chr. Zuitlichemii op. reliqua vol. II, dioptr. p. 2.

4) Eodem modo ratio sinuum complementi angulorum refractionis et incidentiae, cum nobis sit reciproca resistentiae mediorum, semper eadem erit: quod est theorema Cartesianum, licet de resistentia mediorum diversa nostris imo contraria senserit Cartesius. Quare non abs re cl. Spleissius, vir in his quoque studiis versatissimus, animadverso hoc consensu conclusionum, dubitat annon Cartesius, cum in Batavis esset, viderit theorema Snellianum; notat enim solenne ipsi fuisse praeterire nomina autorum et exemplum affert Mundanorum vorticum, ad quos Jordanus Brunus et Johannes Keplerus ita digitum intenderint, ut tantum istud vocabulum ipsis defuisse videatur. Accedit, quod Cartesius theorema hoc suum proprio marte demonstraturus in magnas incidit salebras. Acta erud. 1682, p. 187.

5) Spleiss war auch erst 1705, in demselben Jahre also wie Hortensius ge-

boren, beschäftigte sich aber frühzeitig mit optischen Studien. So gab er 1728 seine dissertatio de propagatione luminis heraus.

6) J. Millet, Descartes, sa vie, ses traveaux, ses découvertes avant 1637. Paris 1867, p. 142.

7) J. Priestley, the history and present state of discoveries relating to vision light and colours 1772.

8) Priestley, Geschichte der Optik übersetzt von Klügel 1776, p. 87.

9) J. C. Fischer, Geschichte der Physik, II, 41.

10) Wilde, Geschichte der Optik, I, 227—230.

11) von Kampen, Beknopte Geschidenis van de letteren 125*—126*:

Het is desniettemin mogelijk, dat Cartesius van zijne ziete, zonder iets van Snellius te weten, tot dezelfde ontdekking als hij is gekommen.

12) Delambre, histoire de l'astronomie moderne II, 224:

Tout cela est possible et ne manque pas de vraisemblance, mais il s'en faut, que le plagiat soit prouvé. Descartes peut avoir fait la découverte de son côté et sans rien devoir à Snellius, c'est le sentiment de Leibnitz, qui ne laissait pas de pencher du côté de ceux, qui estiment, qu'il avait pu profiter des lumières du savant hollandais.

13) Delambre, h. de l'astr. mod. II, 226:

Un anonyme, qui a chargé de notes l'édition des lettres, que je cite, et qui est de la bibliothèque de l'institut, conjecture, que la lettre a écrite à Golius en 1632. Ce Golius était professeur à Leyde, il n'est pas étonnant qu'il connut le théorème de Snellius. Descartes a pu lui dire, qu'il savait la manière de diviser la règle de l'instrument, ne serait-ce pas ce Golius, qui l'aurait appris à Descartes, qui en réconnaissance lui indique un moyen pour le vérifier. V. Cousin theilt Näheres über das von Delambre so wie auch von ihm benutzte Exemplar der Briefe des Descartes mit (oeuvres de Descartes Bd. VI avant propos pag. II), aber es ergiebt sich daraus nichts über den Urheber der Randbemerkungen und den Werth der letzteren.

14) Ep. pars II, ep. LXX: vitrum, cujus figuram D. Mydorgius ipse delineaverat.

Dass in beiden Briefen, diesem 70. im zweiten Theil und dem 81. in demselben Theile dasselbe Glas erwähnt wird, ergiebt sich daraus, dass beide Male Mydorge ganz speciell als Zeichner der zum Schleifen nothwendigen Modellfiguren erwähnt wird; auch wird beide Male der Umstand ganz besonders hervorgehoben, dass das Glas die Lichtstrahlen genau in einem vorher bestimmten Punkte sammelte.

15) Golius (J. Golius, geb. 1596, war Professor der orientalischen Sprachen zu Leyden und wurde 1629 des W. Snell Nachfolger) wird einmal in einem Briefe an Mersenne erwähnt und nicht gerade besonders ehrenvoll, so dass es hiernach zweifelhaft erscheinen kann, dass Descartes ihm eine so wichtige Mittheilung wie das Brechungsgesetz zu verdanken haben wird. In jenem Briefe (Ep. pars III ep. XXXIII) handelt es sich um die Geometrie, welche ebenfalls so wie die Dioptrik als Anhang des Discours erschien und Descartes äussert sich darüber folgendermassen: E professoribus autem scholasticis nemo est qui eam intelligat, neque Golius et multo minus Hortensius, qui sufficientibus ad eam praeceptis non est imbutus. Dass hier auch des Hortensius und zwar in ziemlich geringschätziger

Weise Erwähnung geschieht, ist für uns noch besonders interessant, weil es zeigt, was Descartes von ihm hielt.

16) Montucla, histoire des Mathematiques, II, 245. Huygens ne tire point absolument la consequence que Descartes leur dut sa découverte; il se contente de la soupçonner et nous ne croyons pas, qu'on puisse aller plus loin, nous laisserons donc cette question indécise, comme tant d'autres impossibles à résoudre, faute de faits suffisamment constatés, car il paraît qu'il était en possession de toutes les découvertes, qu'il étale, dans sa géometrie et sa dioptrique, plusieurs années avant de les publier, ainsi il aurait pu avoir fait lui-même la découverte de la loi de la réfraction, avant d'avoir vu les manuscripts dont étaient en possession les héritiers d' Hortensius.

17) Chr. Fr. Pfleiderer, Thesium inauguralium pars mathematico-physica. 1792. Tubing.

Th. XXVII. Inique autem plagii illius Cartesium accusari, varia epistolarum illius loca, praesertim Pars III, ep. 89, 90, 91, 92, Pars II ep. 81, 74 collatis Dioptrices cap. X et cap. VIII, § X. evincere videntur.

Th. XXVIII. Neque Hugenius (opusc. posth. Tom. I, Dioptr. p. 3) certo sibi constare asserit (Montucla, l. c. p. 182; Gehler, l. c. § 417) tantum se accepisse commemorat, quae de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, Cartesium vidisse.

18) Millet, Descartes, sa vie, ses travaux etc. p. 142. En consultant les lettres, qu'il écrivit de Hollande en 1629 à Ferrier, ouvrier, qu'il avait formé lui-même dans l'art de la taille des verres, et à Mersenne, son ami, on voit que presque toutes, pour ne pas dire toutes ses découvertes en optique ont été faites à Paris et que Leibnitz et Huyghens ont fait une supposition aussi fausse que malvaillante en imaginant, qu'il avait emprunté à un manuscript de Snellius l'idée d'exprimer la loi de la réfraction par la comparaison des sinus des angles d'incidence et de réfraction.

19) Whewell, history of the inductive sciences vol. II p. 379.

The person, who did discover the law of the sines, was Willebrord Snellius about 1621*), but the law was first published by Descartes, who had seen Snells papers.

20) In der Biographie universelle ancienne et moderne, tome 42, p. 520 finden wir über Descartes Folgendes:

Son discours sur la dioptrique renferme aussi beaucoup d'applications géométriques ingénieuses; mais la dioptrique était impossible à faire, quand la réfrangibilité inégale des divers rayons de la lumière n'était pas connue. Cependant on y trouve encore une nouvelle preuve du génie de Descartes dans la découverte qu'il y donne de la véritable loi de la réfraction. Il est vrai, qu'après sa mort Huygens lui a contesté cette découverte, en alléguant, qu'elle existait dans les manuscripts de Snellius, que Descartes a pu voir en Hollande, mais cette réclamation tardive, faite à une epoque où Descartes ne pouvait plus se défendre ne suffit pas pour lui ôter une découverte, qui ne lui fut contestée tant qu'il vécut; car il n'existe pas dans les sciences d'autres titres de possession que la publicité. Wir können selbstverständlich den in der angeführten Stelle entwickelten Grundsätzen nur sehr bedingter Weise zustimmen. Es handelt sich in unserer Streit-

*) Diese Zeitangabe ist nur nach allgemeiner Schätzung angesetzt.

frage nicht blos um gewöhnliche Priorität, sondern hauptsächlich darum, ob Descartes in seiner Dioptrik absichtlich des Snell Namen verschwiegen hat, und ob er selbstständig das Brechungsgesetz fand. Die Priorität scheint unbedingt dem Snell zu gehören.

21) P. Reis, Lehrbuch der Physik. 1. Aufl. p. 271 § 298. (Es sind seither schon mehrere Auflagen erschienen, in denen in Bezug auf den hier in Frage kommenden Punkt nichts geändert ist.)

22) R. Gantzer, Leitfaden für den physikalischen Unterricht. 1873, p. 261.

23) Octennium est jam aut novennium, quod secandum curavi vitrum ope torni, quod optime successit; nam quamvis diameter ejus semissem tuae non excederet, tamen magna vi urebat ad octo digitorum distantiam, illudque charta eodem modo perforata explorando, cernebantur omnes radii haec foramina pervadentes proportionaliter accedere ad octo digitorum distantiam, ubi in unum exactissime coibant. Sed quid in illo secando praecaverim dicam. Primo triangula tria aequalia curavi secanda, quorum singula angulum unum rectum, alterum vero triginta graduum habebant, ita ut latus unum alterius duplum esset; erat autem illorum unum ex montano crystallo, alterum ex crystallino seu venetiano vitro, tertium ex vitro minus puro; deinde conficiendum curavi regulam aëneam cum duobus foraminibus, quibus triangula ista applicando refractiones mensurarem, quemadmodum in Dioptrica mea exposui; atque inde deprehendi montani crystalli refractionem esse multo majorem, quam crystallini, crystallini vero quam vitri minus puri. Sed singularum magnitudinem non recordor. Deinde D. Mydorgius, de quo forsan audivisti, et quem in delineanda figura aliqua mathematica omnium hominum exactissimum duco, descripsit hyperbolen, quae ad venetiani crystalli refractionem referebatur, super magna lamina cuprea polita, idque ope circini, cujus mucrones chalybaei erant instar cuspidis acus; deinde laminam hanc juxta hyperboles figuram exacte limavit, ut esset archetypus, ex quo mathematicorum instrumentorum faber quidam, nomine Ferrier, secuit modulum ex cupro sphaerice cavatum ejusdem cum vitro secando magnitudinis, et ne primum archetypum huic modulo saepius applicando corrumperet, chartas tantum ex illius figura secabat, quibus ejus vice utebatur, donec perfecto modulo, vitrum torno affixum, et cote interposita applicatum secaret, sed cum vellet postea concavum eodem modo secare, impossibile illi fuit, propterea quod cum torni motus minor esset in medio quam in extremis vitrum ibi semper atterebatur minus, ubi debuisset magis. Sed si tum venisset in mentem id quod ab eo tempore animadverti, vitia nempe concavi vitri non esse tanti momenti atque convexi, credo quod satis bona ope torni conficere potuisset. Ep. pars II, ep. LXXXI.

Aus diesem Briefe ergiebt sich auch die Stellung, welche Mydorge zu den Entdeckungen des Descartes einnahm und welche später (Anmerkung 25) noch einmal zur Sprache kommen wird. Mydorge gehörte dem Kreise von Männern an, welcher sich um Descartes als geistigem Mittelpunkt in Paris sammelte und war letzterem besonders werth wegen seiner mathematischen Kenntnisse. Das vertraute Verhältniss zwischen beiden dauerte auch noch fort, als Descartes sein Vaterland längst verlassen hatte. Mydorge war ein sehr geschickter Zeichner und desshalb trug ihm Descartes in dem vorliegenden Falle die Ausführung der Hyperbel-Zeichnung auf, was darauf schliessen lässt, dass er in damaliger Zeit für jenen manches ausführte, ohne dass er selbstständig an den Entdeckungen Theil nahm. Dass er sich auch auf eigene Hand mit optischen Problemen befasste, be-

weist eine andere Briefstelle, ep. pars II, ep. LXXXIV, wo Descartes von der Theorie des Sehens spricht. Non miror, quod D. Mydorgius in multis quae de visione scripsi, a me dissentiat, huic enim materiae multum ante hac studuit et cum diversa a me principia fuerit secutus, diversas etiam opiniones hauserit necesse est. Sed rationes meas quo magis perpendat, eo magis illi satis facturas spero; ipse autem nimis pollet ingenio, quam ut veritatem non amplectatur.

24) Poggendorff, Vorl. S. 316: „Er gab auch eine Maschine zum Schleifen solcher*) Linsen an, mit welcher der Künstler Ferrier 1628 in Paris wirklich eine convexe dieser Art zu Stande brachte, aber keine concave.“

Poggendorff erwähnt hier selbst das Jahr 1628 als Jahr des Gelingens, er musste also wohl auch berücksichtigen, dass die Maschine vorher erfunden war, und sie war ziemlich complicirt; ehe aber die Maschine construirt werden konnte, musste Descartes das Sinus-Gesetz erkannt haben, denn darauf beruht sie einzig und allein. Auch hatte Descartes den Glasschleifer Ferrier sich selbst herangebildet und überhaupt alles Wesentliche, was bei diesen Operationen zu thun war, selbst angegeben (vgl. die folgende Nr. 25). So lag es auch für Poggendorff nahe diesen Termin auf S. 316 mit dem zu vergleichen, was auf S. 311 entwickelt vorliegt. Er wäre vielleicht dann zu andern Schlüssen gekommen.

25) Descartes war im October 1629 nach Holland gegangen und hatte Ferrier in Paris zurückgelassen. Dieser bekam Aufträge um Gläser von derselben Wirksamkeit zu schleifen wie früher, und da Descartes ihm nicht mehr zur Seite stand, war er rathlos. In einem Briefe datirt vom 26. Oct. 1629 schüttet er sein Herz über eine Menge Dinge aus und fährt fort:

Omnes istae difficultates me non adeo turbant, ope enim tua spero me eas superaturum, et ostensurum posse me melius facere quam dicere. Superest mihi adhuc unum dubium manifestandum, quantum ad modum requisitum ad inveniendam lineam necessariam per triangulos et meum Quadrantem**), nimirum, an si duo trianguli vitri ejusdem Diaphani sint diversi, et consequenter diversos faciant effectus super linea divisa, quae retinet radium in dicto Quadrante, et formentur duo moduli, conformes diversis lineis refractionis, nimirum, inquam, utrum effectus duorum vitrorum possit esse similis veluti ad urendum in puncto quodam determinato secundum tuas regulas. Docuisti me triangula posse construi tali angulo, quo placuerit; non possum ejus experimentum facere; triangula enim, quae ad praesens habeo, omnia sunt similia; rogatum te velim, ut hunc mihi articulum resolvas. Novi enim, te mihi dixisse, omnia parva vitra concava posse inservire cuilibet grandi vitro. Amisi frustulum chartae, in quo mihi delineaveras modum describendi lineam requisitam cum ordinario circino, quaerendo plura puncta per quae ea transire debet. D. Mydorgius proponit modum quo utitur delineandae lineae necessariae ad urendum in aliquo puncto quod determinabit cuilibet vitro dato, diametro ejus nihil imminuto, neque densitate ejus in medio deintegrata, aitque se eum solum invenisse; Novi secretum illud tibi non incognitum esse, praedictumque D. Mydorgium nihil ejus rei scire nisi quod a te didicerit. Si existimares posse me eum capere, gratissimum mihi faceres si mihi

---

*) Es ist kurz vorher von hyperbolischen Gläsern die Rede.

**) Es ist hier das von Descartes construirte Brechungsexponenten-Messinstrument gemeint, bei welchem ein Glasprisma und ein Quadrat die Hauptttheile ausmachten.

illum, quod commodo tuo fieri possit, communicares. Petit autem ut sibi praestetur artifex qui sciat exacte secare vitra. Arbitror hanc ultimam conditionem aeque difficilem ac omnia reliqua, nisi faciat ipse artifices de industria, et quibus imperet, nam ad praesens ad suum modum inveniri non credo. Adeo me vilipendit, ut non credat, satis mihi ingenii esse ad quippiam capiendum aut conandum; quod ipse me praesente asserere ausus est. Fateor tenuitatem meam, quae tamen excusari debet, cum nemo me quicquam docuerit praeter te cui omnia mea debeo. (Ep. XCI, Pars III.)

Auf den Brief Ferriers antwortet Descartes sehr ausführlich, und geht namentlich auf die Methode, den Brechungsexponenten zwischen Licht und Glas zu finden, genau ein. Die darauf bezügliche Stelle lautet:

Sit linea tui Quadrantis $AE$, triangulum vitreum applicatum super $FGH$, cujuscunque magnitudinis esse possit, dum linea ejus $GH$ decidat ad angulos rectos super $AE$, quo solis radius transiens per pinnulam $J$, recta progrediatur versus $D$, nulla facta refractione dum in vitrum ingreditur, sed saltem tum cum egre-

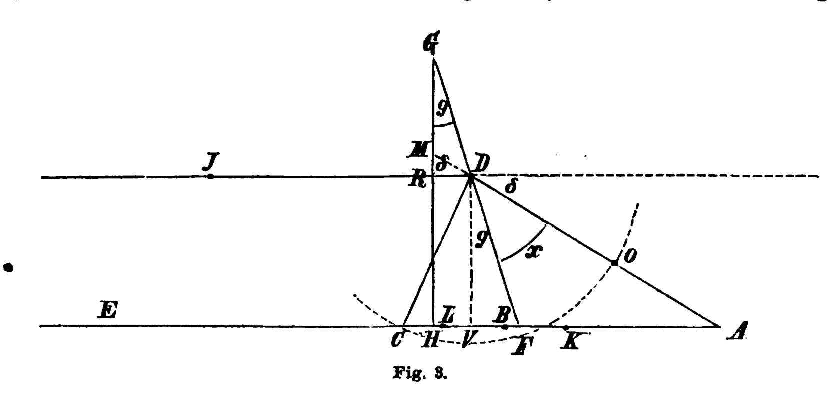


Fig. 8.

ditur, nimirum in puncto $D$. Nota igitur lineam $GDF$ quae repraesentat inclinationem vitri, in qua sit refractio et punctum $D$, in quo illa intersecta est per radium solis et punctum $A$, in quo radius Solis $JDA$ intersecat lineam tui Quadrantis. Habes itaque angulum $ADF$. Postmodum a puncto $D$ duces aliam lineam $DC$, adeo ut angulus $FDC$ aequalis sit angulo $ADF$, et nota in quo puncto haec linea $DC$ intersecabit tuum Quadrantem nimirum in puncto $C$, quo invento sume lineam $CK$ aequalem $CD$ et lineam $AL$ aequalem $AD$. Quaere postea medium inter puncta $K$ et $L$, nimirum $B$. Et si habeas tria puncta $ABC$, quae tibi dant proportionem quae est inter lineas $AB$ et $BC$, nihil tibi de reliquo opus est. Proportio autem ista semper veniet aequalis qualecunque triangulum vitreum sumas, dum omnia ejusdem sint diaphani.

Der Brief ist der 92. des dritten Theils der Briefe und vom 13. Nov. 1629 aus Amsterdam datirt. Die Construktion des Brechungsverhältnisses ist, wie sich aus den nachfolgenden Anmerkungen Nr. 41 ergiebt, hier eine etwas andere.

Wird die spätere, zu Anmerkung 41 gehörige Figur benutzt und um $D$ mit $DC$ der Kreis geschlagen, welcher $DA$ in $O$ trifft, so ist nach dem im 10. Kapitel der Dioptrik angegebenen Verfahren $CA : AO$ das Brechungsverhältniss. Dies lässt sich auf das hier erwähnte folgendermassen zurückführen.

$$CA : AO = CA : DA - DO = CA : DA - CD = CB + BA : DA - CD$$
$$= AL - \frac{LK}{2} + CK - \frac{LK}{2} : AL - \frac{LK}{2} - \left(CK - \frac{LK}{2}\right)$$
$$= AL - \frac{LK}{2} : CK - \frac{LK}{2} = AB : BC.$$

Ist also, wie unter N. 41 nachgewiesen werden wird, $CA : AO = \sin (g + \delta)$: $\sin \delta$, so ist auch $AB : BC = \sin (g + \delta) : \sin \delta$ und stellt also das Brechungsverhältniss zwischen Luft und Glas dar.

Wie Descartes auf die hier angegebene Construktion gekommen ist, giebt er so wenig an, als bei der späteren. Es ist aber ein Beweis für das grosse Interesse und den Werth, den er gerade auf diesen Brechungsexponenten legt, dass wir zwei so verschiedene Construktionsweisen dafür von ihm mitgetheilt erhalten. Die auffallende Notiz Ferriers, dass Mydorge sich für den Erfinder des Instrumentes ihm gegenüber ausgegeben habe, scheint Descartes keines Wortes der Erwiederung für werth zu halten, wenigstens findet sich in dem ganzen langen Antwortschreiben nichts darüber. Es ist hier auch kaum die Gefahr zu befürchten, dass man dem Descartes den Vorwurf machen wird, er habe diese zum Schleifen der hyperbolischen Gläser nothwendigen theoretischen Kenntnisse dem Mydorge zu verdanken. Ferrier selbst führt deutlich genug an, wie Mydorge es selbst zugegeben habe, alles von Descartes erst mitgetheilt bekommen zu haben.

26) Ep. pars III, ep. LXI:

Vir ille qui me insimulat hausisse e Keplero ellipses et parabolas meae Dioptrices aut malitiam suam aut ignorantiam aperit; Quantum enim ad Ellipsin, non memini Keplerum de ea agere, aut si mentionem ejus faciat, id innuit, non esse illam anaclasticam, quam quaerit. Et quantum ad Hyperbolen, memini eum demonstrare conari, neque eam esse, quamvis dicat ab illa non multum differre. Cogitandum itaque tibi relinquo, utrum rei alicujus veritatem didicerim a tali homine, qui eam falsam esse probare conatur. Quod tamen non obstat, quominus fatear Keplerum fuisse primum doctorem meum in Optica, ipsumque omnium in ea hactenus versatissimum fuisse.

27) Ep. pars I, ep. CXIV: Gratias tibi habeo, quod te gaudere testificeris, quod in cogitationum mearum promulgatione ab aliis praeverti me non fuerim passus: sed certe id nunquam veritus sum; nam praeterquàm quod mea parum refert utrum prior aliquid scribam, an posterior, modo tantum vera sint quae scribo, opiniones meae omnes ita simul cohaerent, ut nemo possit earum ullam sibi vindicare, nisi omnes noverit.

28) Ep. pars III, ep. XXXIII: Quantum ad illum quem me culpare dicis, quod Galilaeum non nominaverim, apparet eum quaerere quod reprehendat, nec tamen ejus invenire causam. Neque enim ipse Galilaeus sibi perspicillorum inventionem attribuit, mihi autem non nisi de eorum inventore dicendum fuit. Neque enim nominandi mihi fuerunt, qui ante me de Optica scripserunt, neque enim scribere historiam animus erat, satisque habui in genere asseruisse etiamnum fuisse qui plurima invenerint, ne possem argui me aliorum inventionem mihi attribuere voluisse, in quo plus mihimet ipsi injuriae feci, quam illis quorum nomina omisi. Cogitari quippe potest eos multo plura fecisse, quam fortasse eos fecisse deprehenderetur, si dixissem quinam illi essent.

29) Ep. pars II, ep. XII: Dixi quandam ejus (der Hyperbel) proprietatem ad

radios inflectendos, cujus mihi demonstratio memoria exciderat, atque ut fit interdum in rebus facillimis ex tempore non occurrebat; sed ejus conversam in Ellipsi tibi demonstravi, explicuique nonnulla theoremata, ex quibus tam facile poterat deduci; ut neminem qui tantillum attenderet, posset effugere. Quamobrem te hortatus sum, ut in illa quaerenda ingenium exerceres, quod sane non fecissem, cum te conicis plane nihil scire fatereris, nisi facillimam esse judicassem. Tu vero quaesivisti, invenisti, ostendisti mihi, laetatus sum, dixique me illa usurum demonstratione, si unquam de ista re essem scripturus.

Ich sprach oben die Ansicht aus, dass der hier gegebene Bericht der eines mündlich zwischen Beekmann und Descartes verhandelten Vorgangs sei. Das mehrfach wiederholte dixi weist auf ein Gespräch hin und kann sich wohl nicht recht auf eine in Briefen niedergelegte Aussage beziehen, das ex tempore non occurrebat scheint darauf hinzudeuten, dass zur Stunde des Gesprächs der von Beekmann erwartete Beweis von Descartes nicht gegeben werden konnte, weil er ihn augenblicklich vergessen hatte. Bei Annahme eines blos brieflichen Verkehrs zwischen beiden hat diese Wendung überhaupt keinen Sinn, da ja Descartes mit einer eventuellen Antwort auf die Frage des Beekmann nach dem Beweise so lange warten konnte, bis er ihm wieder eingefallen war. Das ostendisti weist auf ein thatsächliches Vorzeigen des von Beekmann schriftlich niedergelegten Beweises hin und hat ebenfalls bei blos brieflich gedachter Mittheilung keine rechte Stelle.

Es scheint mir hiernach nicht ganz ohne Grund anzunehmen, dass wir es in dieser Darstellung mit einem Vorgang aus der Zeit des ersten Aufenthaltes des Descartes in Holland zu thun haben, wo er in Breda mit Beekmann verkehrte. Beekmann war eigentlich in Dordrecht angestellt, verweilte aber dazumal am Hoflager des Herzogs Moritz. Als Descartes zum zweiten Male in Holland war, Dezember 1621 bis Febr. 1622, hat er schwerlich mit Beekmann so lange an demselben Ort, wenn überhaupt, zusammen gelebt, dass er obigen Vorgang mit erlebt haben wird, auch war er 1621 und 1622 ganz in philosophische Spekulationen versunken und hatte die Mathematik gänzlich bei Seite gelegt. Darf man jenen Bericht so deuten, wie ich es so eben gethan habe, so bedarf es keines weiteren Beweises, dass Descartes schon um 1619, also zu einer Zeit, wo Snell vermuthlich noch nicht an seine optischen Studien dachte, wo er aber sicher noch nichts für Descartes Zugängliches aufgeschrieben hatte, das Brechungsgesetz kannte.

30) Ep. pars II. ep. XCII: Tibi gratiam habeo quod causam meam sustinere labores; verum non metuo ne quisquam aliquo judicio praeditus suspicetur me mutuatum fuisse Dioptricam meam a Rogero Bacone, multoque minus a Fioravanti, qui merus fuit circulator.

Dass Descartes sich sehr früh mit optischen Dingen beschäftigt hat, geht aus einem Briefe hervor, dessen Datum durch Borel, also einen unserer zuverlässigsten Gewährsmänner aus dem siebzehnten Jahrhundert auf den 19. Januar 1642 fixirt worden ist. In diesem Briefe, dem 105. des dritten Theils, der in der Ausgabe von Cousin merkwürdiger Weise als der 114. des dritten Theils aufgeführt wird, schreibt Descartes: Inventio puncti reflexionis, datis speculo, oculo et objecto, est problema solidum quod Vitellio resolvit per hyperbolen quantum ad specula convexa, neque plus difficultatis habetur quoad concava, adeo ut in hoc operae pretium non sit inquirere; et plus Vicennio excessit ex quo id inveni, sed memoria elapsum est.

Hiermit haben wir den Beleg, dass, wenn wir der Zeitbestimmung des Des-

cartes, dass seit seiner Beschäftigung mit den gekrümmten Spiegeln mehr als zwanzig Jahre, vom 19. Jan. 1642 ab gerechnet, vergangen sind, nachgehen, er schon mindestens im Jahre 1621 diese optischen, wie er selbst sagt, an Vitellio und daher auch ohne Zweifel an Kepler sich anschliessenden Studien gemacht haben wird. Wird die Aeusserung, dass es „mehr als zwanzig Jahre her sind", in ihrem gewöhnlichen Sinne genommen, so werden wir wohl die Möglichkeit erwägen dürfen, dass er bereits 1619, als er noch in Breda mit Beekmann zusammen arbeitete, das Studium der Optik betrieben haben wird. Damit sind wir aber, sei es, dass wir 1621 oder 1619 annehmen, in die Zeit hinaufgerückt, welche vor dem zweiten Besuch Hollands vom Dezember 1621 bis Febr. 1622 liegt. Wenn es nun wohl auch angenommen werden kann, dass Descartes während dieses Aufenthalts in Leyden Snell persönlich gesprochen hat, so werden wir nach dem eben Erwähnten doch gezwungen, die erfolgreiche Beschäftigung Descartes' mit optischen Problemen vor diese Zeit zu setzen, womit ein Grund mehr gewonnen ist, seine Studien in Betreff der Lichtbrechung sich als selbstständige vorzustellen.

31) Ep. pars II, ep. CIII: Ceterum, quamvis dioptricam meam absolvere non festinem nullus tamen timeo ne quis mittat falcem in messem alienam, quicquid enim alii scribant, certus sum neminem fore, qui idem scribat, quod ego, nisi illud ex litteris, quas dedi ad D. F. desumat.

32) Ep. pars II, ep. LXXIII: Quod ad modum mensurandarum refractionum luminis instituo comparationem inter sinus angulorum incidentiae et angulorum refractorum, sed nollem hoc adhuc propalari, quia Dioptrices meae prima pars nihil aliud continebit. Non potest facile determinari qualem figuram linea visa in fundo aquae sit habitura, neque enim certus est aliquis locus imaginis in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgo persuaserunt optici.

Was den letzten Theil dieser Briefstelle anlangt, so mag erwähnt werden, dass W. Snell in seinem hinterlassenen Werke auch die Linie, unter welcher der gradlinige Gefässboden eines mit Wasser angefüllten Gefässes erscheint, als eine Conchoide bestimmt hat. Hätte Descartes das Werk Snell's gesehen, er würde wohl diese merkwürdige Entdeckung geprüft haben und nicht nur von der gewöhnlichen Anschauung der Physiker gesprochen haben. Es scheint ihm nicht gelungen zu sein, über den scheinbaren Ort der Punkte einer unter Wasser befindlichen graden Linie etwas Sicheres gefunden zu haben.

33) Ep. pars II, ep. CIII: Experiar in Dioptrica an possim cogitationes meas exprimere et veritatem, quam mihi ipsi persuasum habeo, aliis persuadere, quod quidem nequaquam puto.

34) Ep. pars II, ep. LXIX: Caeterum quia scribis, cupere te nonnulla ex Dioptrica mea videre, primam illius ad te partem mitto, in qua omissa reliqua Philosophia, conatus sum explicare refractionum materiam; videbis haud magni momenti opus, et forsan perlectum multo minoris facies, quam nunc. Mihi tamen volupe erit ut illud videas, ut tuam de illo sententiam mihi, si placet, aperias, manuscriptumque ad me remittas, exemplar enim illius nullum habeo, et praeterea nollem, ut ab alio ullo praeter te videretur.

35) Ep. pars III, ep. IX: Miror praeterea quod addat „praetensam meam demonstrationem posse accommodari per vias sibi cognitas, sed quarum nulla vidit vestigia in meis scriptis, imo", ut ait, „quas rejicio tamquam ad rem non facientes." Haec enim conferendo cum quinta et sexta ex ejus thesibus opticis, pag. 9, cumque integra ejus velitatione, nihil aliud mihi possum persuadere, quam illum

de reflexione et refractione eadem quae ego et quae nullus ante me demonstravit, discipulos suos docuisse, mutatis tantum et distortis verbis, ut aliud dicere videretur atque quaedam alia quae culparet mihi affinxisse ut ea deinde corrigeret.

36) Kepler, Paralipomena in Vitellionem, cap. IV, 2 (Ausgabe von Frisch, Bd. II, 181).

Lux, inquiunt (Alhazen und Vitellio), quaerit compensationem damni ex obliquo inflictu accepti. Quanto enim debilitata fuit a densioris occursu, tanto se recolligit accedendo ad perpendiculum ut rectiore ictu feriat fundum medii densioris. Ictuum enim, qui sunt recti, fortissimos esse. Et addunt subtile nescio quid: motum lucis oblique incidentis componi ex motu perpendiculari et motu parallelo ad densi superficiem, eumque motum sic compositum non aboleri ab occursu pellucidi densioris, sed tantum impediri. Totum ergo motum, ut est compositus sese munire iterum, residere scilicet in motu per densam superficiem jam alterato vestigia pristinae compositionis ut non plane fiat perpendicularis nec plane parallelus. Deflectere autem ad perpendicularem potius quam ad parallelum, quia fortior sit motus perpendicularis.

37) Ep. pars II, ep. XXXIV: Pauca enim habent Geometrae vestri, quae in scriptis meis reprehendant, quandoquidem demonstrationem meam de proprietate Ellipseos et Hyperbolae, quam in Dioptrica mea posui, vellicare conantur; cum enim haec proprietas ab alio ante me nemine unquam reperta fuerit, sitque maximi prae reliquis quae circa has figuras cognoscuntur, momenti, mihi certe videntur illiberaliter loqui dum dicunt esse hoc aliquid quod tyronem redoleat; neque enim inficiari possunt quin iste tyro illos in hoc ipso docuerit. Vergl. auch Chasles Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohnke, Seite 158, Anmerkung.

38) Descartes, Dioptrice cap. VIII, 2.

39) Die entscheidenden Entwickelungen finden sich im achten Kapitel der Dioptrik. § 2 und 12. (Ebenso auch in Ep. pars II, ep. XXXIV.)

Für die Ellipse setze ich sie in etwas zusammengezogener Gestalt her.

Zieht man von einem Punkte $B$ der Ellipse die Gerade $BA$ parallel der grossen Axe $DK$ nach aussen, verbindet $B$ mit dem entfernteren Brennpunkte $J$, wie auch mit dem näheren $H$ und macht $BA = BJ$; construirt man ferner die Normale der Ellipse im Punkte $B$ und fällt die Lothe $AL$ und $JG$ auf dieselbe, so haben $AL$ und $JG$ dasselbe Verhältniss zu einander wie $DK$ und $HJ$.

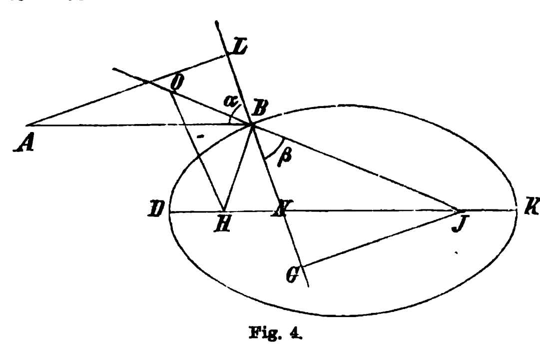


Fig. 4.

Beweis: 1) $\triangle\ ALB \sim \triangle\ NJG$, wobei $N$ der Durchschnittspunkt der Normale mit der grossen Axe ist.

2) $AL : JG = AB : NJ = BJ : NJ = OJ : HJ$, wobei $O$ der Durchschnittspunkt der durch $H$ zur Normale gezogenen Parallele mit der Verlängerung von $BJ$ über $B$ hinaus ist.

3) $OJ : HJ = DK : HJ$.

4) $AL : JG = DK : HJ = \sin\alpha : \sin\beta$.

Wenn daher $AB$ ein Lichtstrahl ist und die Ellipse der Schnitt der Ebene, in welcher der Lichtstrahl verläuft, mit der Oberfläche der Glaslinse, so wird,

wenn die Geschwindigkeiten des Lichtes sich verhalten wie $DK : HJ$, der in $B$ die Oberfläche treffende Strahl nach der Brechung durch $J$ gehen. Ist $B$ ein willkürlich gewählter Punkt, so wird stets für dieselbe Ellipse das Verhältniss des Sinus von $\alpha$ und $\beta$ gleich dem der grossen Axe zur doppelten Excentricität sein und sämmtliche auf die Ellipse fallende und der Hauptaxe parallele Strahlen werden durch $J$ gehen, dort also in einem einzigen Punkt gesammelt erscheinen.

Für die Hyperbel gilt das Entsprechende. Da nun das Verhältniss zwischen grosser Axe und doppelten Exentricität alles Nöthige enthält, um die Kegelschnitte auf organische Weise zu zeichnen, so reichen diese Elemente aus, um die elliptischen oder hyperbolischen Oberflächen von Brenngläsern zu finden.

40) Kepler, Dioptrice. IV.

41) Das Messinstrument, durch welches Descartes den Brechungsexponenten zwischen Glas und Luft bestimmt, ist, ausser in dem 92. Briefe des dritten Theils der Briefe, ausführlich im zehnten Kapitel der Dioptrik dargestellt.

Selecto vitro aut crystallo, quo uti placet, primo necessaria est inquisitio proportionis quae juxta superius tradita, refractionum illius mensura existat; atque illa obvia et exposita erit opera hujus instrumenti. $EFJ$ est asserculus aut regula, maxime plane et recta, ex qualibet materia, dummodo non nimis polita, vel pellucida sit, ut lumen in illum effusum facillime ab umbra dignoscatur. $EA$ et $FL$ sunt duae dioptrae id est laminae parvae cujuscunque materiae dummodo non sit transparens, ad perpendiculum arcetae in $EFJ$, et foramine exiguo singulae pertusae ut $A$ et $L$. Suntque haec duo foramina tam directe sibi invicem opposita ut radius $AL$ illa permeans parallelus feratur lineae $EF$. Solis duo foramina permeans per medium vitrum, irrefractus penetrat ad $B$, ubi non nisi declinans ad aliquod punctum asserculi $EF$ egredi potest, ut exempli gratia ad $J$.

Ist nun $BHP$ das Bild der Prisma, so ist der Gebrauch des Instrumentes folgender:

His tribus punctis $B$, $P$, $J$ accurate ita cognitis et consequenter etiam triangulo quod describunt, hoc triangulum in chartam aut aliud planum circino est transferendum. Deinde ex centro $B$, per punctum $P$ describendus circulus $NPT$ et sumpto arcu $NP$, aequali arcui $PT$, ducenda recta $PN$ secans $JP$ productam in puncto $H$. Hinc denuo

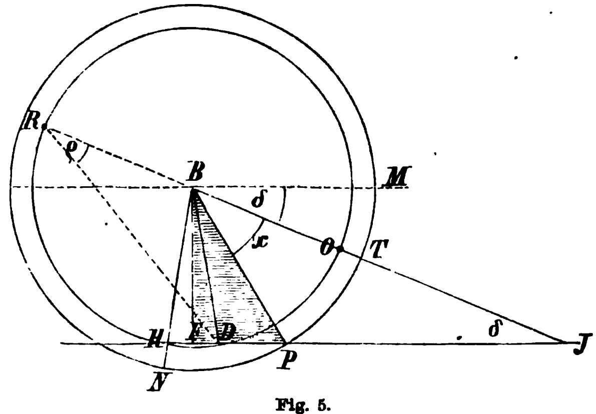


Fig. 5.

ex puncto $B$, per $H$ describendus circulus $HD$, secans $BJ$ in puncto $O$. Et habebitur proportio inter lineas $HJ$ et $OJ$ pro mensura communi refractionum quae produci possunt a differentia quae est inter aërem et vitrum quod examinatur.

Da Descartes für die Richtigkeit seiner Construktion keinen Beweis giebt, folgt hier ein ganz elementarer:

Vor: 1) $BF \perp HJ$,

2) $\angle FBP = g$, der brechende Winkel.

3) $\angle MBJ = \delta$.

4) $\angle FBP = PBN$.

Beweis: 1) $HJ : OJ = RJ : DJ = \sin(\varrho + \delta) : \sin \varrho$.

$$2)\ \varrho = \frac{JBD}{2} = \frac{DBP + PBJ}{2}$$

$$= \frac{DBP + PBH}{2}$$

$$= FBP = g$$

3) $HJ : OJ = \sin(g + \delta) : \sin g$.

Das letzte Verhältniss ist aber dasjenige, welches beim Prisma den Brechungsexponenten angiebt. Descartes hat also bereits sehr früh durch den brechenden Winkel und die Ablenkung, diese beiden Hauptelemente am Prisma, den Brechungsexponenten bestimmen können. Ueber den Zusammenhang dieser Figur mit der im 92. Brief des dritten Theils gegebenen siehe Anmerkung 25.

42) In dem 33. Brief des dritten Buches, welcher an Mersenne gerichtet wurde und schon oben einmal angeführt worden ist, findet sich folgende Stelle: Scias me Refractiones geometrice demonstrasse et a priori in mea Dioptrica, mirorque te de eo etiamnum dubitare. Sed versaris inter homines, qui quantum possunt in mei praejudicium declamant. Non ignoro eos qui iniquo erga me sunt animo te in eum finem invisere et ut novi quippiam de me percunctentur. Adeoque mirandum mihi potius est, quod non obstantibus tantis eorum machinationibus, non debilitato amore me prosequaris et in partibus meis perseveres; quapropter tibi summopere me devinctum profiteor.

Aus dem Anfangs erwähnten geht mindestens hervor, dass Descartes sich seines methodischen Beweises des Refraktionsgesetzes bewusst war. Er hatte es aus allgemeinen Principien heraus, wenn auch für unsere Zeit nicht streng genug, zu erweisen gesucht und glaubte, allen Anforderungen genug gethan zu haben, und konnte den Entgegnungen, namentlich Fermats und dessen Freunden in Paris eine Bedeutung nicht beimessen.

43) Poggendorff, Vorles. p. 312.

44) Desc. Dioptrice, cap. II, 7,

45) Leibnitz hat, so viel mir bekannt, an zwei Stellen sich über des Descartes Verhältniss zu Snell ausgesprochen. Einmal, wie oben bereits erwähnt (Anm. 4) im Jahrgang 1682 der acta eruditorum und dann in einem Aufsatz Remarques sur l'abrégé de la vie de Mons. des Cartes, abgedruckt in Gerhardt, Leibnitzens philosophische Schriften Bd. IV p. 318—319.

Diese letztere sehr ausgedehnte Darlegung, in welcher alle die alten Anschuldigungen gegen Descartes sich wiederholen, lautet folgendermassen:

M. de Fermat, n'estant nullement satisfait de l'explication de M. des Cartes méditait toujours quelque chose pour la dioptrique et anima M. Petit de faire des expériences la-dessus. Et comme M. de la Chambre songeait de publier un traité de la lumière, M. de Fermat luy manda, qu'il avait une pensée par laquelle il espérait de trouver la véritable raison de la loy des réfractions, mais que le calcul le rebutait. Enfin il s'y mit et découvrit, qu'en supposant que les rayons vont d'un point donné à un autre point donné par la voye la plus aisé, il vient justement la loy des sinus, que M. des Cartes avait voulu prouver par une autre voye. Et ce qu'il y a de plus curieux c'est que M. de Fermat suppose, que le verre resiste aux rayons plus que l'air, au lieu que M. des Cartes suppose tout

le contraire et se sert de la comparaison d'un tapi, qui n'est point juste dans la question dont il s'agit. Et cependant leurs conclusions sont les mêmes. Le premier qui a découvert la véritable loy des réfractions était Willebrord Snellius, Hollandais, un des plus grands Géomètres de son temps. Il l'avait expliquée dans un traité exprès, dont M. Isaac Vossius nous a conservé des extraits. Snellius l'enseignait à ses disciples, et entre autres à Hortensius, depuis professeur de Mathematiques, qui l'enseignait aussi; ainsi toutes les apparences sont que M. des Cartes, qui était si curieux de ces choses, qui avait été si longtemps en Hollande et qui pratiquait les meilleurs Mathematiciens l'a scue. Cela se confirme aussi en ce qu'il n'en a pas scû la raison, et que voulant l'expliquer à sa mode par la composition du mouvement perpendiculaire avec la parallèle, qu'il avait apprise par Kepler, il s'était embarasser étrangement. Ainsi on voit, qu'il a été obligé de donner la gêne à ses principes, pour y ajuster ce qu'il avait appris d'ailleurs. Je n'ai pas vue le manuscript de Snellius, mais je suis persuadé, que la voye, par laquelle il a trouvé cet important théorème a été la même, que M. Fermat a employée depuis et qui l'a mené à la même loy, sans s'y attendre et sans s'y rien sçavoir de Snellius. Et ce qui me le fait croire, c'est que les anciens se sont servis de la même méthode pour démontrer l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, que Mess. Snellius et Fermat ont poussé à la réfraction. La postérité a depuis rendu justice à ces Messieurs et ceux qui ont approfondi ces choses, demeurent d'accord que M. des Cartes n'a pas été inventeur ny de la loy de réfraction, ny de sa raison. Cependant la raison des anciens tient quelque chose de la considération des Finales, ce qui a fait, qu'on a cherché encore une raison ab efficienti. M. Hobbes s'estait servi de la considération d'un rayon solide. M. Barrow l'avait poussé plus avant. Mais il semble que l'explication de M. Hugens par les ondes est la plus profonde et la plus apparente que nous ayons jusqu'icy.

46) Kepler, Paralipomena in Vitellionem, caput I prop. XIV. Lux per densorum superficies impeditius transit, quatenus densae. Cum enim luci competat motus (per prop. 1), proprietates quoque motus recti ei competent. Quare et impedimentum a densiori medio. Non vero quatenus solidum per 10*), ergo quatenus superficie densa terminatur. Clarius: lucis motus fit naturaliter cum extensione per 6, quia semper ab uno fonte in omnes regiones. Sicut ergo superficies ob infinita puncta resistit motui, qui est in lineis, sic superficies densa resistit motui extenuanti cum densitas et extenuatio sint sub eodem genere.

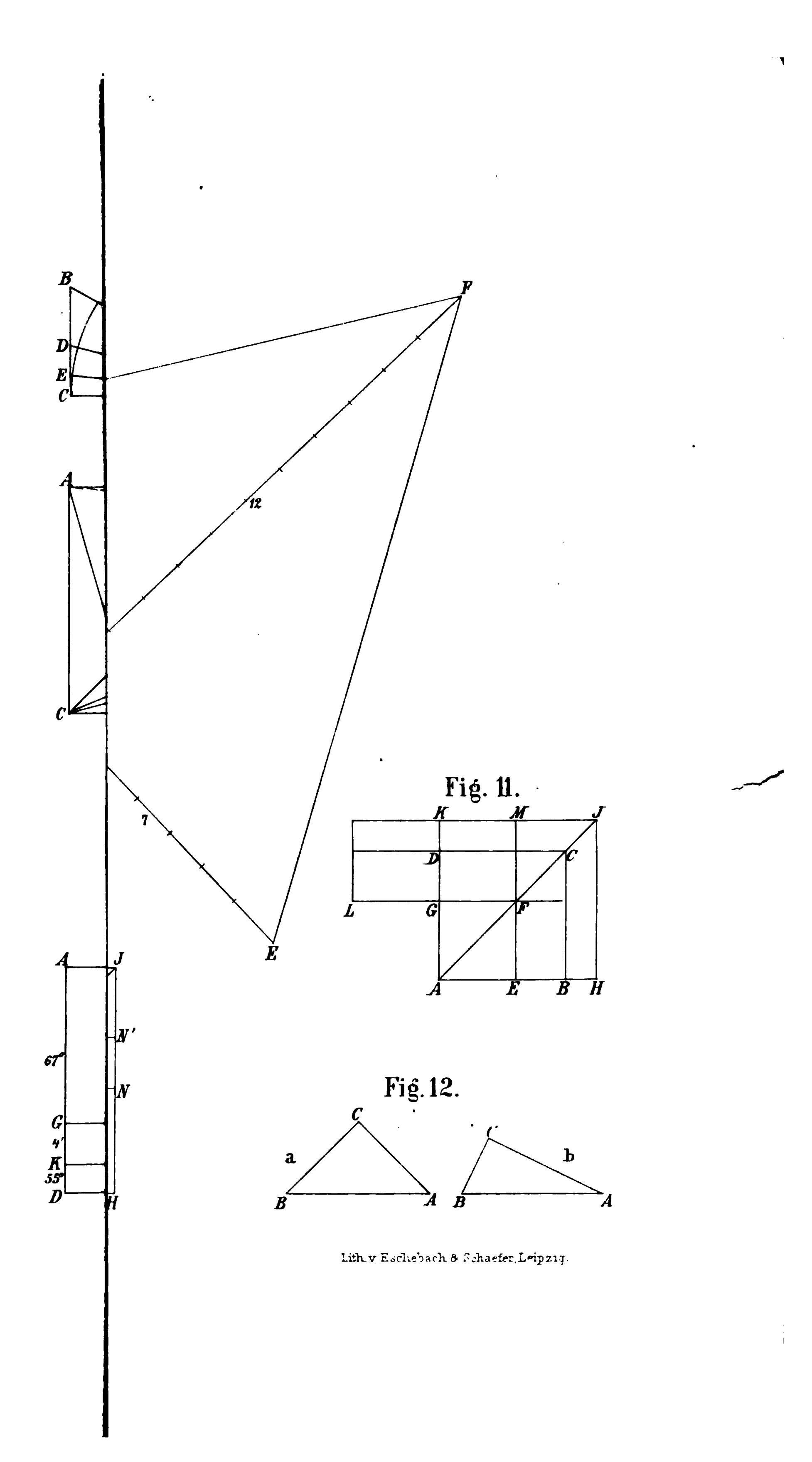
47) Epistolar. pars II, ep. XL. Quod autem ille ait, densitatem medii efficere refractionem, potest manifeste falsi convinci, quia refractio radii luminis aquam pervadentis fit versus perpendicularem, pilae vero fit a perpendiculari; ita ut una eademque densitas habitura esset hoc pacto duos effectus plane contrarios.

48) Dioptrice, cap. II. 6.

---

*) Prop. X. Lux non impeditur soliditate corporum quatenus solida; quo minus per ea transire possit. Quicquid enim impeditur, ab eo impeditur aut expellitur, quod est ex eodem genere ut corpus a corpore. Solida habent tres dimensiones, quatenus solida. Luci per 6 et 7 tantum duae competunt dimensiones. Ergo lux vel ejus radii nihil patiuntur a solidis quatenus solida, nec se mutuo afficiunt quoad soliditatem.

49) Dass Descartes irgend wann einmal Snell persönlich begegnet sei, lässt sich nicht feststellen, auch die Bekanntschaft mit Snell's Schriften ist nicht nachzuweisen. Nur über die mit einer Schrift des älteren Snell, des Vaters von Willebrord Snell giebt eine Briefstelle Auskunft. Im 65. Briefe des dritten Buches spricht nämlich Descartes von den Vorzügen seiner eigenen Geometrie und erwähnt summarisch, was bisher in diesem Fache geleistet worden ist. Hierbei wird auch des Apollonius Batavus gedacht; dieser ist ein Werk von Rudolf Snell dem Vater und ist 1597 herausgekommen.




Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

**Hochheim**, Dr. **Adolf**, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. ℳ 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. ℳ 1. 50. Zusammen ℳ 3.—

**Holzmüller**, Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Mit 26 lithographirten Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 11.20.

**Klein**, Dr. **Felix**, o. ö. Professor der Geometrie a. d. Universität Leipzig, über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. [VIII u. 82 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.40.

**Koehler**, Dr. **Carl**, über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen. [32 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.—.

**Krazer**, Dr. **Adolf**, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. [VII u. 66 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 3.60.

**Milinowski**, **A.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Weißenburg i. Elsaß, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8.80.

**Netto**, Dr. **Eugen**, a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. [VIII u. 290 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.80.

**Pasch**, Dr. **Moritz**, Professor an der Universität zu Gießen, Vorlesungen über neuere Geometrie. [IV u. 201 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 4.—.

——— Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 168 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.20.

**Prym**, Dr. **Friedrich**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. [VIII u. 112 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 6.—.

**Reidt**, Prof. Dr. **F.**, Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule in Hamm, die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VII u. 50 S.] gr. 8. kart. ℳ 1.20.

**Salmon, George,** analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilh. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweite verbesserte Auflage. gr. 8. [XVI u. 508 S.] geh. n. ℳ 11.20.

**Schlömilch, Dr. O.,** Geh. Schulrat, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Dritte Auflage. [VII u. 384 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 7.60.

**Wüllner, Dr. Adolph,** Professor der Physik an der Kgl. techn. Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII u. 849 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 10.—.

Die folgenden Bände des gegenwärtig den ersten Rang einnehmenden ausführlichen Lehrbuchs der Physik werden vorerst noch nicht in neuer Auflage erscheinen. Für die Abnehmer sämtlicher 4 Bände ist daher ein neues Gesamtregister gedruckt worden, welches sich über die 4. Auflage des I. Bandes und die 3. Auflage des II., III. und IV. Bandes erstreckt. Dasselbe wird den Käufern des vollständigen Werkes gratis geliefert.

**Zeuthen, H. G.,** Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. geh. ℳ 2.—.




This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.


3 2044 102 937 760